doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024513

一般 Gaussian 测度 Fock 空间上对偶 Toeplitz 算子的紧性

孙铭浩，邴　迪，李　然
（辽宁师范大学 数学学院，辽宁 大连 116029）

摘要：针对一般 Gaussian 测度 Fock 空间上对偶 Toeplitz 算子的紧性问题，先定义对数型完全平方函数，再通过构造一族函数，利用放缩和乘法算子分解等方法，给出一般 Gaussian 测度 Fock 空间上对偶 Toeplitz 算子有界性和紧性的充要条件，从而将 Fock 空间上对偶 Toeplitz 算子的研究方法推广到一般 Gaussian 测度 Fock 空间上.

关键词：Fock 空间；对偶 Toeplitz 算子；Gaussian 测度；紧性；有界性
中图分类号：O177.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2025)05-1225-06

Compactness of Dual Toeplitz Operators on Fock Spaces with General Gaussian Measures

SUN Minghao, BING Di, LI Ran
(*School of Mathematics*, *Liaoning Normal University*, *Dalian* 116029, *Liaoning Province*, *China*)

Abstract: Aiming at the compactness problem of dual Toeplitz operators on Fock spaces with general Gaussian measures. We first defined logarithm-type complete square functions, and then by constructing a family of auxiliary functions, and using methods such as scaling and multiplication operator decompositions, we gave necessary and sufficient conditions for the boundedness and compactness of dual Toeplitz operators on Fock spaces with general Gaussian measures. This extended the research methods of dual Toeplitz operators on Fock spaces to the general Gaussian measure Fock spaces.

Keywords: Fock space; dual Toeplitz operator; Gaussian measure; compactness; boundedness

0 引　言

记 $\mathbb{C}$ 为复平面，$\mathbb{D}$ 为 $\mathbb{C}$ 中单位开圆盘，$\mathbb{C}$ 上的 Gaussian 测度 μ 定义为

$$\mathrm{d}\mu(z)=\exp\left\{\frac{-|z|^2}{2}\right\}\frac{\mathrm{d}V(z)}{2\pi},$$

其中 V 为 $\mathbb{C}$ 上的 Lebesgue 测度，$L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu)=L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu)\cap H(\mathbb{C})$ 称为 $\mathbb{C}$ 上的 Fock 空间，又称为 Segal-Bargmann 空间，其中 $H(\mathbb{C})$ 为 $\mathbb{C}$ 上的解析函数全体.

考虑 $\mathbb{C}^3$ 上的函数 φ：$[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，使得 $\varphi'(x)>0$，$\varphi''(x)\geqslant 0$，$\varphi'''(x)\geqslant 0$. 由文献[1]知，

收稿日期：2024-12-13.
第一作者简介：孙铭浩（1999—），男，汉族，硕士研究生，从事复分析及算子理论的研究，E-mail：1207450400@qq.com. **通信作者简介**：李　然（1986—），男，汉族，博士研究生，副教授，从事复分析及算子理论的研究，E-mail：liranmika@163.com.
基金项目：国家自然科学基金（批准号：11901269）和辽宁省教育厅自然科学类项目（批准号：JYTMS20231041）.

$\mathbb{C}$上的一般Gaussian测度μ_φ定义为

$$\mathrm{d}\mu_\varphi(z)=\exp\{-\varphi(|z|^2)\}\frac{\mathrm{d}V(z)}{\pi}=\exp\{-\varphi(|z|^2)\}\frac{\mathrm{d}V(z)}{\pi},$$

$L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)=L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)\cap H(\mathbb{C})$称为$\mathbb{C}$上的一般Gaussian测度$\mu_\varphi$下的Fock空间[2].

近年来，由于量子力学、偏微分方程的快速发展，使人们对Fock空间上的算子理论越来越感兴趣. 紧性和交换性是算子理论的重要性质，其中解析函数空间上Toeplitz算子和对偶Toeplitz算子的紧性和交换性问题已成为目前该领域的研究热点，尤其对Fock空间上Toeplitz算子和对偶Toeplitz算子的研究备受关注. 例如：Stroethoff等[3]研究了Bergman空间上对偶Toeplitz算子的代数性质和谱性质；叶鹏等[4]利用构造函数族、放缩和乘法算子分解的方法，给出了Fock空间上对偶Toeplitz算子有界及紧的充要条件；Yu等[5]研究了Dirichlet空间上调和符号的对偶Toeplitz算子的交换性，并给出了两个调和符号的对偶Toeplitz算子乘积为一个对偶Toeplitz算子的有限秩扰动的充要条件；叶鹏等[6]给出了$\mathbb{C}^n$的Fock空间上对偶Toeplitz算子有界以及紧的充要条件；Seip等[1]研究了$\mathbb{C}^n$上的一般Gaussian测度，并研究了在该测度下Fock空间上Hankel算子的有界性；Yang等[7]给出了Dirichlet空间上对偶Toeplitz算子可交换的充要条件；文献[8]讨论了Fock空间上两个对偶Toeplitz算子乘积的有限和的紧性和零积问题；文献[9]研究了Fock-Sobolev空间正交补上对偶Toeplitz算子乘积有限和的紧性和零积问题，并且对于有界符号，构造了一个符号映射，给出了一个所有有界符号对偶Toeplitz算子生成的C^*-代数相关的短精确序列；Dong等[10]研究了Fock空间上Block对偶Toeplitz算子的有界性和紧性，并讨论了两个Block对偶Toeplitz算子乘积的有限和的紧性. 本文研究一般Gaussian测度Fock空间上对偶Toeplitz的有界性和紧性.

1 预备知识

通过计算，可得一般Gaussian测度μ_φ下的Fock空间的正规正交基和再生核为

$$\|z^k\|^2=\int_C|z|^{2k}\mathrm{d}\mu_\varphi(z)=\int_C|z|^{2k}\exp\{-\varphi(|z|^2)\}\frac{\mathrm{d}V(z)}{\pi}=$$
$$\int_0^{+\infty}r^{2k}\exp\{-\varphi(r^2)\}\mathrm{d}r^2=\int_0^{+\infty}p^k\exp\{-\varphi(p)\}\mathrm{d}p.$$

令$\Gamma_\varphi(k)=\int_0^{+\infty}p^k\exp\{-\varphi(p)\}\mathrm{d}p$，显然，$\Gamma_\varphi(k)$收敛. 因此，一般Gaussian测度$\mu_\varphi$下Fock空间的正规正交基为

$$e_k(z)=\frac{z^k}{\|z^k\|}=\frac{z^k}{\Gamma_\varphi(k)^{1/2}},$$

再生核为

$$K_z(w)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma_\varphi(k)^{1/2}}\frac{\overline{w}^k}{\Gamma_\varphi(k)^{1/2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z\overline{w})^k}{\Gamma_\varphi(k)}.$$

设P为$L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$到$L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$上的正交投影，对$\forall h\in L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$，$P$可表示为

$$(Ph)(z)=\int_{\mathbb{C}}h(\lambda)\overline{K_z(\lambda)}\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda),\qquad \forall z\in\mathbb{C}.$$

对$f\in L^\infty(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$，Toeplitz算子$T_f$：$L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)\to L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$定义为

$$T_f(g)=P(fg),\qquad g\in L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi).$$

记$Q=I-P$，$L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)=L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)\oplus L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp$，则Hankel算子$H_f$：$f\in L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)\to L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp$定义为

$$H_f(g)=Q(fg)=(I-P)(fg),\qquad g\in L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi).$$

对偶Toeplitz算子S_f：$L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp\to L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp$定义为

$$S_f(u)=Q(fu)=(I-P)(fu),\qquad u\in L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp.$$

当$f\in L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$时，对$\forall u\in L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp\cap L^\infty(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$，有

$$S_f(u)=Q(fu)\in L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp,$$

可知算子 S_f 在 $L^\infty(\mathbb{C},d\mu_\varphi)$ 上稠定义. 易知对 $\forall u\in L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp$，有

$$H_{\bar{f}}^* u(z)=\int_{\mathbb{C}} f(\lambda)u(\lambda)\overline{K_z(\lambda)}\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda). \tag{1}$$

当 $f\in L^\infty(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$时，乘法算子 M_f：$L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)\to L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$定义为

$$M_f(u)=fu,\qquad u\in L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi).$$

当 $f\in L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$时，对 $\forall u\in L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)\cap L^\infty(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$，有

$$M_f(u)=fu\in L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi),$$

可知 M_f 在 $L^\infty(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$上稠定义. 易检验 $\forall u\in L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp\cap L^\infty(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$，有

$$M_f(u)=S_f(u)+H_{\bar{f}}^*(u),\qquad S_f u\perp H_{\bar{f}}^* u. \tag{2}$$

当 $f,g\in L^\infty(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$时，一般 Gaussian 测度下的 Fock 空间上 Toeplitz 算子、Hankel 算子有如下代数关系：

$$T_{fg}=T_fT_g+H_{\bar{f}}^*H_g,\qquad S_{fg}=S_fS_g+H_fH_{\bar{g}}^*. \tag{3}$$

2　对偶 Toeplitz 算子的紧性

对任意的 $w\in\mathbb{C}$ 及 $0<s<1$，定义函数 $g_{w,s}$和 $u_{w,s}$分别为

$$g_{w,s}(\lambda)=\overline{(\lambda-w)}\exp\{\varphi(|z|^2)\}\chi_{w+s\mathbb{D}}(\lambda),\qquad u_{w,s}(\lambda)=\frac{g_{w,s}(\lambda)}{\|g_{w,s}\|_2}.$$

其中 $\chi_{w+s\mathbb{D}}(\lambda)$为 $w+s\mathbb{D}$ 上的特征函数.

引理 1　对任意的 $w\in\mathbb{C}$，$u_{w,s}\in L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp$.

证明：只需证 $g_{w,s}\in L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp$ 即可. 事实上，对任意的 $n\geqslant 0$，有

$$\int_{\mathbb{C}}\lambda^n\overline{g_{w,s}(\lambda)}\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)=\int_{w+s\mathbb{D}}\lambda^n(\lambda-w)\exp\{\varphi(|z|^2)\}\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)=$$
$$\int_{w+s\mathbb{D}}\lambda^n(\lambda-w)\frac{\mathrm{d}V(\lambda)}{\pi}=\int_{s\mathbb{D}}(\lambda+w)^n\lambda\frac{\mathrm{d}V(\lambda)}{\pi}=0,$$

即 $g_{w,s}\perp z^n$，而$\{z^n: n\geqslant 0\}$为 $L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$的一组基，从而有 $g_{w,s}\in L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp$. 证毕.

引理 2　设 $f\in L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$，则对任意的 $w\in\mathbb{C}$，有 $\lim\limits_{s\to 0^+}\|H_{\bar{f}}^*u_{w,s}\|_2=0$.

证明：对 $w\in\mathbb{C}$，由式(1)可知

$$H_{\bar{f}}^*u_{w,s}(z)=\int_{\mathbb{C}}f(\lambda)u_{w,s}(\lambda)\overline{K_z(\lambda)}\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda),$$

从而对任意的 $z\in\mathbb{C}$，有

$$|H_{\bar{f}}^*u_{w,s}(z)|=\left|\int_{\mathbb{C}}f(\lambda)u_{w,s}(\lambda)\overline{K_z(\lambda)}\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)\right|\leqslant$$
$$\int_{w+s\mathbb{D}}|f(\lambda)u_{w,s}(\lambda)K_z(\lambda)|\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)\leqslant$$
$$\|u_{w,s}\|_2\left(\int_{w+s\mathbb{D}}|f(\lambda)|^2|K_z(\lambda)|^2\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)\right)^{1/2}=$$
$$\left(\int_{w+s\mathbb{D}}|f(\lambda)|^2|K_z(\lambda)|^2\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)\right)^{1/2},$$

进而有

$$\|H_{\bar{f}}^*u_{w,s}\|_2^2\leqslant\int_{\mathbb{C}}\mathrm{d}\mu_\varphi(z)\int_{w+s\mathbb{D}}|f(\lambda)|^2|K_z(\lambda)|^2\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)=$$
$$\int_{w+s\mathbb{D}}|f(\lambda)|^2\left(\int_C|K_z(\lambda)|^2\mathrm{d}\mu_\varphi(z)\right)\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)=$$
$$\int_{w+s\mathbb{D}}|f(\lambda)|^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2k}}{\Gamma_\varphi(k)}\right)^2\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)\leqslant$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(s+|w|)^{2k}}{\Gamma_{\varphi}(k)}\right)^2\int_{w+s\mathbb{D}}|f(\lambda)|^2\mathrm{d}\mu_{\varphi}(\lambda)\leqslant$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+|w|)^{2k}}{\Gamma_{\varphi}(k)}\right)^2\int_{w+s\mathbb{D}}|f(\lambda)|^2\mathrm{d}\mu_{\varphi}(\lambda).$$

易证 $\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+|w|)^{2k}}{\Gamma_{\varphi}(k)}\right)^2$ 收敛，因此，由 $f\in L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_{\varphi})$ 可得 $\int_{w+s\mathbb{D}}|f(\lambda)|^2\mathrm{d}\mu_{\varphi}(\lambda)\to 0(s\to 0^+)$. 证毕.

引理3 设 $f\in L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_{\varphi})$，则对任意的 $w\in\mathbb{C}$，有 $|f(w)|=\lim\limits_{s\to 0^+}\|S_f u_{w,s}\|_2$.

证明：对任意的 $w\in\mathbb{C}$，有 $L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_{\varphi})=L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_{\varphi})\cap H(\mathbb{C})$，根据式(2)知

$$M_f u_{w,s}=S_f u_{w,s}+H_f^* u_{w,s},\qquad S_f u_{w,s}\perp H_f^* u_{w,s},$$

于是

$$\|M_f u_{w,s}\|_2^2=\|S_f u_{w,s}\|_2^2+\|H_f^* u_{w,s}\|_2^2.$$

由引理2可知，对 $\forall w\in\mathbb{C}$，有

$$\lim_{s\to 0^+}\|M_f u_{w,s}\|_2^2=\lim_{s\to 0^+}\|S_f u_{w,s}\|_2^2.$$

所以为证结论成立只需证对任意的 $w\in\mathbb{C}$，下式成立即可：

$$\lim_{s\to 0^+}\|M_f u_{w,s}\|_2^2=\lim_{s\to 0^+}\frac{\int_{|\lambda-w|<s}|f(\lambda)|^2|\lambda-w|^2\exp\{\varphi(|\lambda|^2)\}\mathrm{d}\mu_{\varphi}(\lambda)}{\int_{|\lambda-w|<s}|\lambda-w|^2\exp\{\varphi(|\lambda|^2)\}\mathrm{d}\mu_{\varphi}(\lambda)}=|f(w)|^2.$$

定义1 对任意的 $w\in\mathbb{C}$ 及 $0<s<1$，$\exists K\geqslant 0$，满足

$$\exp\{-\varphi[(s-|w|)^2]\}\leqslant K\exp\{-\varphi[(s+|w|)^2]\}$$

的函数 φ 称为对数型完全平方函数.

定义1中的不等式可通过两边取对数的方式进行比较，而自变量构成完全平方式的形式，因此命名为对数型完全平方函数.

下面引理说明一般 Gaussian 权函数是对数型完全平方函数.

引理4 若函数 φ：$[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，满足 $\varphi'(x)>0$，$\varphi''(x)\geqslant 0$，$\varphi'''(x)\geqslant 0$，则函数 φ 是对数型完全平方函数.

证明：对于函数 φ，由单调性易证对任意的 $w\in\mathbb{C}$ 及 $0<s<1$，存在 K，使得

$$0\leqslant\exp\{-\varphi[(s-|w|)^2]\}\leqslant K,$$

$$0\leqslant\exp\{-\varphi[(s+|w|)^2]\}\leqslant\exp\{-\varphi[(s-|w|)^2]\}.$$

对固定的 w,s，有

$$\lim_{w\to\infty}\exp\{-\varphi[(s+|w|)^2]\}=\lim_{w\to\infty}\exp\{-\varphi[(s-|w|)^2]\}=0.$$

要证存在 $M>0$，使得

$$0\leqslant\exp\{-\varphi[(s-|w|)^2]\}\leqslant M\exp\{-\varphi[(s+|w|)^2]\},$$

即证存在 $M>0$，使得

$$\frac{\exp\{-\varphi[(s-|w|)^2]\}}{\exp\{-\varphi[(s+|w|)^2]\}}\leqslant M,$$

即 $\exp\{\varphi[(s+|w|)^2]-\varphi[(s-|w|)^2]\}\leqslant M$. 令

$$f(|w|)=\exp\{\varphi[(s+|w|)^2]-\varphi[(s-|w|)^2]\},\tag{4}$$

将式(4)两边对 $|w|$ 求导得

$$f'(|w|)=\exp\{2|w|\varphi[(s+|w|)^2]+2|w|\varphi[(s-|w|)^2]\}.$$

显然，$f'(|w|)\geqslant 0$. 所以 $f(|w|)(w\in\mathbb{C})$ 单调递增，因此 $0\leqslant f(|w|)\leqslant 1$. 证毕.

下面继续完成引理3的证明.

令 $B(w,s)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-w|<s\}$，并注意到 $0<s<1$，则有下列不等式：

$$\mu_\varphi(B(w,s))=\int_{|\lambda-w|<s}\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)=\int_{|\lambda-w|<s}\exp\{-\varphi(|\lambda|^2)\}\mathrm{d}\frac{V(\lambda)}{\pi}\leqslant$$
$$\exp\{-\varphi[(s-|w|)^2]\}\int_{|\lambda-w|<s}\mathrm{d}\frac{V(\lambda)}{\pi}=\exp\{-\varphi[(s-|w|)^2]\}\frac{s^2}{2}=$$
$$\frac{K}{s^2}\exp\{-\varphi[(s+|w|)^2]\}\frac{s^4}{2}\leqslant\frac{K}{s^2}\int_{|\lambda-w|<s}|\lambda-w|^2\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda),\tag{5}$$

式(5)最后一个不等号成立是由于

$$\int_{|\lambda-w|<s}|\lambda-w|^2\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)=\int_{|\lambda-w|<s}|\lambda-w|^2\exp\{-\varphi(|\lambda|^2)\}\frac{\mathrm{d}V(\lambda)}{\pi}\geqslant$$
$$\exp\{-\varphi[(s+|w|)^2]\}\int_{|\lambda-w|<s}|\lambda-w|^2\frac{\mathrm{d}V(\lambda)}{\pi}=$$
$$\exp\{-\varphi[(s+|w|)^2]\}\frac{s^4}{2}.$$

从而有

$$\left|\frac{\int_{|\lambda-w|<s}|f(\lambda)|^2|\lambda-w|^2\exp\{(|\lambda|^2+1)^2\}\mathrm{d}\mu_{2,4}(\lambda)}{\int_{|\lambda-w|<s}|\lambda-w|^2\exp\{(|\lambda|^2+1)^2\}\mathrm{d}\mu_{2,4}(\lambda)}-|f(w)|^2\right|=$$
$$\left|\frac{\int_{|\lambda-w|<s}(|f(\lambda)|^2-|f(w)|^2)|\lambda-w|^2\exp\{(|\lambda|^2+1)^2\}\mathrm{d}\mu_{2,4}(\lambda)}{\int_{|\lambda-w|<s}|\lambda-w|^2\exp\{(|\lambda|^2+1)^2\}\mathrm{d}\mu_{2,4}(\lambda)}\right|\leqslant$$
$$\frac{s^2\exp\{[(s+|w|)^2+1]^2\}\int_{|\lambda-w|<s}\left||f(\lambda)|^2-|f(w)|^2\right|\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)}{\exp\{[(s-|w|)^2+1]^2\}\int_{|\lambda-w|<s}|\lambda-w|^2\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)}\leqslant$$
$$\frac{K}{\mu(B(w,s))}\int_{B(w,s)}\left||f(\lambda)|^2-|f(w)|^2\right|\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda).$$

最后令

$$A=\left\{w\in\mathbb{C}:\lim_{s\to0^+}\frac{1}{\mu(B(w,s))}\int_{B(w,s)}\left||f(\lambda)|^2-|f(w)|^2\right|\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)=0\right\},$$

易知 A^c 为 Lebesgue 零测集. 从而引理 3 得证.

定理 1　如果 $f\in L^\infty(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$，则 S_f 有界，且 $\|S_f\|\leqslant\|f\|_\infty<\infty$.

证明：必要性. 设 S_f 有界，则对任意的 $w\in\mathbb{C}$ 及 $0<s<1$，有 $\|S_fu_{w,s}\|_2\leqslant\|S_f\|$. 由引理 3 知，对 $w\in\mathbb{C}$，有 $|f(w)|\leqslant\|S_f\|$，即 $\|f\|_\infty\leqslant\|S_f\|$. 证毕.

引理 5　对任意的 $w\in\mathbb{C}$，当 $s\to0^+$ 时，$u_{w,s}$ 在 $L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp$ 中弱收敛到 0.

证明：当 $w\in\mathbb{C}$，对 $\forall\phi\in L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp$，有

$$|\langle u_{w,s},\phi\rangle|\leqslant\int_{w+s\mathbb{D}}|u_{w,s}(\lambda)\phi(\lambda)|\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)\leqslant$$
$$\|u_{w,s}\|_2\left(\int_{w+s\mathbb{D}}|\phi(\lambda)|^2\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)\right)^{1/2}=\left(\int_{w+s\mathbb{D}}|\phi(\lambda)|^2\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)\right)^{1/2}.$$

由 $\phi\in L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp$ 可得 $\left(\int_{w+s\mathbb{D}}|\phi(\lambda)|^2\mathrm{d}\mu_\varphi(\lambda)\right)^{1/2}\to0(s\to0^+)$，于是 $\langle u_{w,s},\phi\rangle\to0(s\to0^+)$. 证毕.

定理 2　如果 $f\in L^\infty(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$，则 S_f 为紧算子当且仅当 $\|f\|_\infty=0$.

证明：充分性显然.

必要性. 由引理 5 知. 当 $s\to0^+$ 时，$u_{w,s}$ 在 $L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp$ 中弱收敛到 0. 由 S_f 紧知，对任意的 $w\in\mathbb{C}$，有 $\|S_fu_{w,s}\|_2\to0(s\to0^+)$. 由引理 3 知，对 $w\in\mathbb{C}$，$f(w)=0$，即 $\|f\|_\infty=0$. 证毕.

定理 3　设 $f,g\in L^\infty(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)$，若 $S_fS_g-S_h$ 为紧算子，则对 $w\in\mathbb{C}$，有 $f(w)g(w)=h(w)$ 且 $H_fH_{\bar{g}}^*$ 为紧算子.

证明：由式(3)知

$$S_{fg-h}-H_fH_{\bar{g}}^*=S_{fg}-S_h-H_fH_{\bar{g}}^*=(S_fS_g+H_fH_{\bar{g}}^*)-S_h-H_fH_{\bar{g}}^*=S_fS_g-S_h,$$

因此 $S_{fg-h}-H_fH_{\bar{g}}^*$ 为紧算子. 由引理5知，对任意的 $w\in\mathbb{C}$，当 $s\to 0^+$ 时，$u_{w,s}$ 在 $L_a^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\varphi)^\perp$ 中弱收敛到0，所以 $\|(S_{fg-h}-H_fH_{\bar{g}}^*)u_{w,s}\|_2\to 0(s\to 0^+)$. 再由引理5可知 $\|H_fH_{\bar{g}}^*u_{w,s}\|_2\to 0$，于是 $\|S_{fg-h}u_{w,s}\|_2\to 0$. 由引理3可知，对 $w\in\mathbb{C}$，$\|S_{fg-h}u_{w,s}\|_2\to|f(w)g(w)-h(w)|$. 从而对 $w\in\mathbb{C}$ 有 $f(w)g(w)-h(w)=0$. 于是 $S_{fg-h}=0$，$H_fH_{\bar{g}}^*$ 紧. 证毕.

后续研究可以将上述结论推广到 $\mathbb{C}^n$ 上，得到更一般的Fock空间上对偶Toeplitz算子的有界性和紧性.

参考文献

[1] SEIP K, YOUSSFI E H. Hankel Operators on Fock Spaces and Related Bergman Kernel Estimates [J]. Journal of Geometric Analysis, 2011, 23(1): 170-201.

[2] ZHU K H. Analysis on Fock Spaces [M]. New York: Springer, 2012: 31-92.

[3] STROETHOFF K, ZHENG D C. Algebraic and Spectral Properties of Dual Toeplitz Operators [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2002, 354(6): 2495-2520.

[4] 叶鹏，于涛，吴时月. Fock空间上对偶Toeplitz算子的紧性[J]. 温州大学学报(自然科学版)，2008，29(1)：26-31. (YE P, YU T, WU S Y. The Compactness of Dual Toeplitz Operators on the Fock Space [J]. Journal of Wenzhou University (Natural Sciences), 2008, 29(1): 26-31.)

[5] YU T, WU S Y. Commuting Dual Toeplitz Operators on the Orthogonal Complement of the Dirichlet Space [J]. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2009, 25(2): 245-252.

[6] 叶鹏，于涛. C^n上Fock空间之正交补空间上的对偶Toeplitz算子的紧性[J]. 数学的实践与认识，2011，41(11)：125-131. (YE P, YU T. The Compactness of Dual Toeplitz Operators on the Orthogonal Complement of the Fock Space on C^n [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2011, 41(11): 125-131.)

[7] YANG J Y, HU Y Y, LU Y F, et al. Commuting Dual Toeplitz Operators on the Harmonic Dirichlet Space [J]. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2016, 32(9): 1099-1105.

[8] CHEN Y, LEE Y J. Sums of Dual Toeplitz Products on the Orthogonal Complements of the Fock Spaces [J/OL]. Integral Equations and Operator Theory, (2021-02-03)[2024-08-15]. https://doi.org/10.1007/s00020-021-02623-x.

[9] CHEN Y, LEE Y J. Sums of Dual Toeplitz Products on the Orthogonal Complements of Fock-Sobolev Spaces [J]. Acta Mathematica Scientia: Series B (English Edition), 2024, 44(3): 810-822.

[10] DONG J X, XU C X, LU Y F. Block Dual Toeplitz Operators on the Orthogonal Complements of Fock Spaces [J]. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2024, 40(8): 1967-1988.

(责任编辑：赵立芹)