doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024518

一类临界 Kirchhoff-Choquard 型问题正基态解的存在性

马　季，桑彦彬
（中北大学 数学学院，太原 030051）

摘要： 考虑一类临界 Kirchhoff-Choquard 型问题正基态解的存在性. 首先，采用截断函数的性质和积分估计对上临界指数进行分类，并对位势函数施加一定的可积性条件；其次，通过引入 Nehari 流形，并利用 Ekeland 变分原理，获得了在适当的参数假设下该问题至少存在一个正基态解.

关键词： Kirchhoff-Choquard 型问题；临界指数；Nehari 流形；正基态解
中图分类号： O175.2；O176.3　**文献标志码：** A　**文章编号：** 1671-5489(2025)05-1247-13

Existence of Positive Ground State Solutions for a Class of Critical Kirchhoff-Choquard Type Problems

MA Ji, SANG Yanbin
(*School of Mathematics, North University of China, Taiyuan* 030051, *China*)

Abstract: We considered the existence of positive ground state solutions for a class of critical Kirchhoff-Choquard type problems. Firstly, we used the properties and integral estimates of the truncated function to classify the upper critical exponents, and applied some integrable conditions to the potential function. Secondly, by introducing the Nehari manifold and utilizing the Ekeland variational principle, we obtain that there is at least one positive ground state solution to the problems under appropriate parameter assumptions.

Keywords: Kirchhoff-Choquard type problem; critical exponent; Nehari manifold; positive ground state solution

0　引　言

考虑一类具有临界指数的 Kirchhoff-Choquard 型方程

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u = f(x)\left(\int_\Omega \frac{|u|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}y\right)|u|^{2_\mu^*-2}u+\lambda k(x)|u|^{q-1}u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}\tag{1}$$

其中：$\Omega\subset\mathbb{R}^N(N\geqslant 3)$是具有光滑边界的有界区域；参数 $a,b,\lambda>0$，$0<q<1$，$0<\mu<N$，$2_\mu^*=\dfrac{2N-\mu}{N-2}$

收稿日期： 2024-12-19.
第一作者简介： 马　季(2001—)，男，汉族，硕士研究生，从事非线性泛函分析的研究，E-mail：1993947815@qq.com. **通信作者简介：** 桑彦彬(1979—)，男，汉族，博士，副教授，从事非线性泛函分析的研究，E-mail：sangyanbin@126.com.
基金项目： 山西省基础研究计划资助项目(批准号：202103021224198).

是 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式意义下的上临界指数；$f\in L^{\infty}(\Omega)$和集合$\{x\in\Omega: f(x)>0\}$具有正测度；$k\in L^{\infty}(\Omega)$且$k(x)\geqslant 0$，k不恒为0. 记 $\|u\|=\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)^{1/2}$ 为 $H_0^1(\Omega)$ 空间的标准范数，$|u|_p=\left(\int_{\Omega}|u|^{p}\mathrm{d}x\right)^{1/p}$ 为 $L^p(\Omega)$ 空间的标准范数.

Kirchhoff 型问题是偏微分方程领域的一个重要研究方向，应用广泛，目前已取得了许多研究成果. 例如，Li[1]研究了下列具有变号位势的临界 Kirchhoff 型问题：

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(x)|u|^{2^*-2}u+\lambda g(x)|u|^{q-1}u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{2}$$

利用 Nehari 方法和变分方法，得到了问题(2)正基态解的存在性，其中：$2^*=\dfrac{2N}{N-2}$；$\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\geqslant 3)$是光滑有界域；参数$a,b,\lambda>0$，$0<q<1$；$f\in L^{\infty}(\Omega)$和集合$\{x\in\Omega: f(x)>0\}$具有正测度；$g\in L^{\infty}(\Omega)$且$g(x)\geqslant 0$，g不恒为0. 文献[2-3]也对 Kirchhoff 型问题进行了研究和推广.

近年来，关于 Choquard 型问题的研究备受关注[4-12]，含 Choquard 项的偏微分方程在量子力学、量子光学、核物理等领域得到广泛应用. 对于 Choquard 型问题，当$0<q<2$时，Luo 等[4]研究了带有临界 Hardy-Littlewood-Sobolev 项的 Choquard 方程：

$$\begin{cases}-\left(a+\varepsilon\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\Delta u=\left(\int_{\Omega}\dfrac{|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y\right)|u|^{2_\mu^*-2}u+\lambda f(x)|u|^{q-2}u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{3}$$

通过对λ,μ进行合理限制，用约束极小化方法和集中紧性原理证明了问题(3)正基态解的存在性，其中$\varepsilon>0$足够小，λ是实参数，$f\in L^{\infty}(\Omega)$为非负函数，2_μ^*是上临界指数. 对于更一般的次线性扰动项，Liang 等[5]进一步研究了具有临界指数的 Choquard-Kirchhoff 型方程：

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\Delta u=\alpha k(x)|u|^{q-2}u+\beta\left(\int_{\mathbb{R}^N}\dfrac{|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y\right)|u|^{2_\mu^*-2}u,\qquad x\in\mathbb{R}^N,\tag{4}$$

利用第二集中紧性原理和集中紧性原理证明了 Palais-Smale(PS)条件的存在性，并利用变分方法得到了问题(4)的多重解，其中$a>0$，$b\geqslant 0$，$0<\mu<N$，$N\geqslant 3$，α和β都是正实参数，$k\in L^r(\mathbb{R}^N)$为非负函数，r满足以下条件：当$1<q<2^*$时$r=\dfrac{2^*}{2^*-q}$；当$q\geqslant 2^*$时$r=\infty$. 对于非线性项中含有线性扰动，即当$q=1$时，Song 等[6]研究了带有临界 Hardy-Littlewood-Sobolev 项的 Choquard 型问题：

$$\begin{cases}-\left(a+b\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)^{\theta-1}\right)\Delta u=\lambda k(x)u+\left(\int_{\Omega}\dfrac{|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y\right)|u|^{2_\mu^*-2}u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{5}$$

利用第二集中紧性原理和山路引理得到了问题(5)解的存在性和多重性，其中$1\leqslant\theta<2_\mu^*$，$0<\mu<N$，a,b,λ为正实数，函数$k(x)$是一个连续的非负实值函数，满足$k\in L^r(\Omega)$，$r=\dfrac{2^*}{2^*-2}$. 当$a=1$，$b=0$，$f(x)=1$，$g(x)=1$，$q=1$时，Gao 等[7]研究了下列 Choquard 方程非平凡解的存在性：

$$\begin{cases}-\Delta u=\left(\int_{\Omega}\dfrac{|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y\right)|u|^{2_\mu^*-2}u+\lambda u, & x\in\Omega,\\ u\in H_0^1(\Omega),\end{cases}\tag{6}$$

利用山路引理、环绕定理和 Pohozaev 恒等式证明了问题(6)解的存在性，其中$2_\mu^*=\dfrac{2N-\mu}{N-2}$，$0<\mu<N$，$\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\geqslant 3)$是有界域，λ是实参数. 此外，Mukherjee 等[8]研究了带反比例增长扰动项的 Choquard 方程，利用 Nehari 流形方法证明了该方程存在正解. Shen 等[9]研究了临界非齐次 Choquard 方程，利用变分方法得到了该方程多个解的存在性.

受上述研究结果的启发，本文将 Kirchhoff 型问题和 Choquard 型问题相结合，研究 Kirchhoff-

Choquard 型方程解的存在性，将文献[1]中的 Kirchhoff 型问题推广到带有变号位势的临界 Kirchhoff-Choquard 型问题上．注意到文献[4-6]中加权函数是非负函数，而本文中加权函数是可变号的，由于 $f(x)$ 的变号性以及 Hardy-Littlewood-Sobolev 嵌入紧性的缺失为获取解的存在性带来困难，因此本文通过构造适当的截断函数和积分估计，借助 Nehari 流形和 Ekeland 变分原理克服上述困难．当位势函数 $f(x)$ 满足一定可积性条件时，对上临界指数 2_μ^* 进行分类讨论，获得了当 λ 在适当范围时问题(1)正基态解的存在性，其中用弱解的正则性和强极大值原理证明了所得解为问题(1)的正解．

定义最佳嵌入常数为

$$S=\inf_{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{2/2^*}}=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega|u|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{2/2^*}},\tag{7}$$

$$S_{H,L}=\inf_{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^{2_\mu^*}|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2_\mu^*}},\tag{8}$$

其中 $2^*=\dfrac{2N}{N-2}$. 定义问题(1)对应的能量泛函 J_λ 为

$$J_\lambda(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{1}{2\cdot 2_\mu^*}\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u^+(x)|^{2_\mu^*}|u^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega k(x)(u^+)^{q+1}\mathrm{d}x,$$

则

$$\langle J_\lambda'(u),u\rangle=a\|u\|^2+b\|u\|^4-\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u^+(x)|^{2_\mu^*}|u^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\lambda\int_\Omega k(x)(u^+)^{q+1}\mathrm{d}x.$$

1　主要结果

下面令 $2_\mu^*\geqslant 2$，证明问题(1)正基态解的存在性．先建立 Nehari 流形

$$\mathcal{N}:=\{u\in H_0^1(\Omega):\langle J_\lambda'(u),u\rangle=0\}.$$

显然，若 u 是问题(1)的解，则 $u\in\mathcal{N}$. 为得到正基态解的存在性，将 $\mathcal{N}$ 分成以下 3 个子流形：

$$\mathcal{N}^+:=\Big\{u\in\mathcal{N}:a(1-q)\|u\|^2+b(3-q)\|u\|^4-(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u^+(x)|^{2_\mu^*}|u^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0\Big\},$$

$$\mathcal{N}^0:=\Big\{u\in\mathcal{N}:a(1-q)\|u\|^2+b(3-q)\|u\|^4-(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u^+(x)|^{2_\mu^*}|u^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\Big\},$$

$$\mathcal{N}^-:=\Big\{u\in\mathcal{N}:a(1-q)\|u\|^2+b(3-q)\|u\|^4-(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u^+(x)|^{2_\mu^*}|u^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0\Big\}.$$

对所有足够小的 $\lambda>0$，$\mathcal{N}\setminus\{0\}\neq\varnothing$.

引理 1　若 $2_\mu^*\geqslant 2$，则存在 $\bar\lambda>0$，使得对所有的 $0<\lambda<\bar\lambda$，$\mathcal{N}^\pm\neq\varnothing$，且 $\mathcal{N}^0=\{0\}$.

证明：根据 f 的假设，存在 $u\in H_0^1(\Omega)$，使得 $\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u^+(x)|^{2_\mu^*}|u^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0$. 事实上，令 $E=\{x\in\Omega:f(x)>0\}$，可知 E 是正测度集．从而对任何 $\varepsilon>0$，均存在闭集 F 和开集 G，使得 $F\subset E\subset G$ 满足 $\mathrm{meas}(G-F)<0$. 由 ε 的任意性可知 $\mathrm{meas}\,F>0$. 选取 $\tilde u\in C_0^1(\Omega)$，$0\leqslant\tilde u\leqslant 1$，使得在 F 中 $\tilde u=1$，在 $\Omega\setminus G$ 中 $\tilde u=0$. 显然，$\tilde u\in H_0^1(\Omega)$. 根据 Hölder 不等式，有

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{f(x)|\tilde{u}(x)|^{2_\mu^*}|\tilde{u}(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \int_F f(x)\mathrm{d}x - \int_{G-F}\int_{G-F}\frac{f(x)|\tilde{u}(x)|^{2_\mu^*}|\tilde{u}(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant$$

$$\int_F f(x)\mathrm{d}x - \operatorname{meas}(G-F)|f|_\infty \geqslant$$

$$\int_F f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon|f|_\infty \geqslant \frac{1}{2}\int_F f(x)\mathrm{d}x > 0,$$

这里选取 $\varepsilon=\min\left\{\dfrac{\int_F f(x)\mathrm{d}x}{2|f|_\infty},\dfrac{\operatorname{meas} G}{2}\right\}$，其中 $\operatorname{meas} F\geqslant\dfrac{\operatorname{meas} G}{2}>0$，$\varepsilon|f|_\infty\leqslant\dfrac{1}{2}\int_F f(x)\mathrm{d}x$.

对任意的 $u\in H_0^1(\Omega)$，使得 $\int_\Omega\int_\Omega \dfrac{f(x)|u^+(x)|^{2_\mu^*}|u^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0$，定义 Φ 为

$$\Phi(t)=at^{1-q}\|u\|^2+bt^{3-q}\|u\|^4-t^{2\cdot 2_\mu^*-1-q}\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u^+(x)|^{2_\mu^*}|u^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

对所有的 $t\geqslant 0$，令

$$\Phi_1(t)=at^{1-q}\|u\|^2-t^{2\cdot 2_\mu^*-1-q}\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u^+(x)|^{2_\mu^*}|u^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 $0<q<1$，有 $\Phi(0)=0$ 和 $\Phi(t)\to-\infty(t\to\infty)$ 以及 $\Phi'(t)\to+\infty(t\to 0^+)$ 和 $\Phi'(t)\to-\infty(t\to 0^-)$. 因此存在唯一的 $\tilde{t}_{\max}>0$，使得 Φ 在 $\tilde{t}_{\max}$ 处取最大值. 令 $\Phi_1'(t)=0$，则有

$$t_{\max}=\left(\frac{a(1-q)\|u\|^2}{(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u^+(x)|^{2_\mu^*}|u^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)^{1/(2\cdot 2_\mu^*-2)}.$$

从而对所有的 $0<t<t_{\max}$，$\Phi_1'(t)>0$；对所有的 $t>t_{\max}$，$\Phi_1'(t)<0$. 即对所有的 $0<t<t_{\max}$，Φ_1 都是递增的；对所有的 $t>t_{\max}$，Φ_1 都是递减的. 因此 Φ_1 在 $t_{\max}$ 处达到最大值.

根据 Hölder 不等式和式(7),(8)，有

$$\int_\Omega k(x)(u^+)^{q+1}\mathrm{d}x\leqslant|k|_\infty|u|_{2^*}^{1+q}|\Omega|^{(2^*-1-q)/2^*}\leqslant|k|_\infty S^{-(1+q)/2}|\Omega|^{(2^*-1-q)/2^*}\|u\|^{1+q},\tag{9}$$

$$\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u^+(x)|^{2_\mu^*}|u^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant|f|_\infty\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u^+(x)|^{2_\mu^*}|u^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant$$

$$|f|_\infty S_{H,L}^{-2_\mu^*}\|u\|^{2\cdot 2_\mu^*}.\tag{10}$$

则由式(10)可知

$$\Phi_1(t_{\max})\geqslant\frac{(2\cdot 2_\mu^*-2)a}{2\cdot 2_\mu^*-1-q}\left[\frac{a(1-q)}{2\cdot 2_\mu^*-1-q}\right]^{(1-q)/(2\cdot 2_\mu^*-2)}\times$$

$$\frac{\|u\|^{(2\cdot 2_\mu^*-1-q)/(2_\mu^*-1)}}{|f|_\infty^{(1-q)/(2\cdot 2_\mu^*-2)}\left(\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u^+(x)|^{2_\mu^*}|u^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{(1-q)/(2\cdot 2_\mu^*-2)}}.\tag{11}$$

由式(9)和式(11)得

$$\Phi(t_{\max})-\lambda\int_\Omega k(x)(u^+)^{q+1}\mathrm{d}x\geqslant\Phi_1(t_{\max})-\lambda\int_\Omega k(x)(u^+)^{q+1}\mathrm{d}x>$$

$$\Big\{\frac{(2\cdot 2_\mu^*-2)a}{2\cdot 2_\mu^*-1-q}\left[\frac{a(1-q)}{2\cdot 2_\mu^*-1-q}\right]^{(1-q)/(2\cdot 2_\mu^*-2)}\times$$

$$|f|_\infty^{-(1-q)/(2\cdot 2_\mu^*-2)}S_{H,L}^{2_\mu^*(1-q)/(2\cdot 2_\mu^*-2)}S^{(1+q)/2}|\Omega|^{-(2^*-1-q)/2^*}-\lambda|k|_\infty\Big\}\times$$

$$S^{-(1+q)/2}|\Omega|^{(2^*-1-q)/2^*}\|u\|^{1+q},\tag{12}$$

对所有的 $0<\lambda<\bar{\lambda}$，其中

$$\bar{\lambda}=\frac{(2\cdot 2_\mu^*-2)a}{2\cdot 2_\mu^*-1-q}\left[\frac{a(1-q)}{2\cdot 2_\mu^*-1-q}\right]^{(1-q)/(2\cdot 2_\mu^*-2)}\times$$

$$|f|_\infty^{-(1-q)/(2\cdot 2_\mu^*-2)}S_{H,L}^{2_\mu^*(1-q)/(2\cdot 2_\mu^*-2)}S^{(1+q)/2}|\Omega|^{-(2^*-1-q)/2^*}|k|_\infty^{-1}.$$

显然，$\Phi(\tilde{t}_{\max})>\Phi(t_{\max})>0$. 因此存在两个正数 t_0^+ 和 t_0^-，使得

$$0<t_0^+<\tilde{t}_{\max}<t_0^-,\quad \Phi(t_0^+)=\lambda\int_\Omega k(x)(u^+)^{q+1}\mathrm{d}x=\Phi(t_0^-),\quad \Phi'(t_0^+)>0>\Phi'(t_0^-),$$

即 $t_0^+u\in\mathcal{N}^+$，$t_0^-u\in\mathcal{N}^-$. 因此对所有的 $0<\lambda<\bar{\lambda}$，$\mathcal{N}^\pm\neq\varnothing$.

下面证明对所有的 $0<\lambda<\bar{\lambda}$，$\mathcal{N}^0=\{0\}$. 用反证法. 假设存在 $u_0\in\mathcal{N}^0$ 且 $u_0\neq0$，由于 $u_0\in\mathcal{N}$，则

$$a\|u_0\|^2+b\|u_0\|^4=\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_0^+(x)|^{2_\mu^*}|u_0^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\lambda\int k(x)(u_0^+)^{q+1}\mathrm{d}x,\tag{13}$$

$$a(1-q)\|u_0\|^2+b(3-q)\|u_0\|^4=(2\cdot2_\mu^*-1-q)\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_0^+(x)|^{2_\mu^*}|u_0^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{14}$$

由式(13)和式(14)可知

$$\lambda\int_\Omega k(x)(u_0^+)^{q+1}\mathrm{d}x=\frac{a(2\cdot2_\mu^*-2)}{2\cdot2_\mu^*-1-q}\|u_0\|^2+\frac{b(2\cdot2_\mu^*-4)}{2\cdot2_\mu^*-1-q}\|u_0\|^4,\tag{15}$$

$$a(1-q)\|u_0\|^2\leqslant(2\cdot2_\mu^*-1-q)\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_0^+(x)|^{2_\mu^*}|u_0^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{16}$$

则当 $2_\mu^*\geqslant2$ 时，根据式(12),(15),(16)，对所有的 $0<\lambda<\bar{\lambda}$，有

$$0<\frac{(2\cdot2_\mu^*-2)a}{2\cdot2_\mu^*-1-q}\left[\frac{a(1-q)}{2\cdot2_\mu^*-1-q}\right]^{(1-q)/(2\cdot2_\mu^*-2)}\frac{\|u_0\|^{(2\cdot2_\mu^*-1-q)/(2_\mu^*-1)}}{\left[\frac{a(1-q)}{2\cdot2_\mu^*-1-q}\right]^{(1-q)/(2\cdot2_\mu^*-2)}\|u_0\|^{(1-q)/(2_\mu^*-1)}}-$$
$$\frac{(2\cdot2_\mu^*-2)a}{2\cdot2_\mu^*-1-q}\|u_0\|^2-\frac{b(2\cdot2_\mu^*-4)}{2\cdot2_\mu^*-1-q}\|u_0\|^4=-\frac{b(2\cdot2_\mu^*-4)}{2\cdot2_\mu^*-1-q}\|u_0\|^4\leqslant0,$$

矛盾. 因此，对所有的 $0<\lambda<\bar{\lambda}$，$\mathcal{N}^0=\{0\}$. 证毕.

引理 2　能量泛函 J_λ 在 $\mathcal{N}$ 上是强制且下方有界的.

证明：对任意的 $u\in\mathcal{N}$，由式(8)和 $2_\mu^*\geqslant2$ 可得

$$J_\lambda(u)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot2_\mu^*}\right)a\|u\|^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot2_\mu^*}\right)b\|u\|^4-\lambda\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{2\cdot2_\mu^*}\right)\int_\Omega k(x)(u^+)^{q+1}\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot2_\mu^*}\right)a\|u\|^2-\lambda\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{2\cdot2_\mu^*}\right)|k|_\infty S^{-(1+q)/2}|\Omega|^{(2^*-1-q)/2^*}\|u\|^{1+q},$$

因为 $0<q<1$，即 J_λ 是强制的，并且在 $\mathcal{N}$ 上有下界，故结论得证. 证毕.

根据引理 1 和引理 2，对所有的 $0<\lambda<\bar{\lambda}$，定义 $d=\inf\limits_{u\in\mathcal{N}}J_\lambda(u)$，$d^+=\inf\limits_{u\in\mathcal{N}^+}J_\lambda(u)$，$d^-=\inf\limits_{u\in\mathcal{N}^-}J_\lambda(u)$，显然，$d\leqslant d^+$，$d\leqslant d^-$. 断言 $d^+<0$. 对任意的 $u\in\mathcal{N}^+$，有

$$a(1-q)\|u\|^2+b(3-q)\|u\|^4>(2\cdot2_\mu^*-1-q)\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u^+(x)|^{2_\mu^*}|u^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 $0<q<1$，有

$$J_\lambda(u)=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot2_\mu^*}\right)\left(\frac{1-q}{1+q}\right)a\|u\|^2-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot2_\mu^*}\right)\left(\frac{3-q}{1+q}\right)b\|u\|^4<0,$$

即 $d^+<0$，因此 $d\leqslant d^+<0$.

类似文献[1]中引理 3 的证明，可得：

引理 3　给定 $u\in\mathcal{N}\backslash\{0\}$，则存在 $\varepsilon>0$ 与可微泛函 $f=f(w)>0$，$w\in H_0^1(\Omega)$，$\|w\|<\varepsilon$ 满足 $f(0)=1$，$f(w)(u+w)\in\mathcal{N}\backslash\{0\}$，$\forall w\in H_0^1(\Omega)$，$\|w\|<\varepsilon$，对所有的 $\varphi\in H_0^1(\Omega)$，有

$$\langle f'(0),\varphi\rangle=\frac{1}{Q}\Big\{(2a\|u\|^2+4b\|u\|^4)\int_\Omega(\nabla u,\nabla\varphi)\mathrm{d}x-$$
$$2\cdot2_\mu^*\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u^+(x)|^{2_\mu^*}|u^+(y)|^{2_\mu^*-1}\varphi(y)}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\lambda(1+q)\int_\Omega k(x)(u^+)^q\varphi\mathrm{d}x\Big\},$$

其中 $Q=a(1-q)\|u\|^2+b(3-q)\|u\|^4-(2\cdot2_\mu^*-1-q)\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u^+(x)|^{2_\mu^*}|u^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

下面给出本文的主要结果.

定理1 若$a,b>0$, $0<q<1$, $f\in L^{\infty}(\Omega)$和集合$\{x\in\Omega: f(x)>0\}$具有正测度, $k\in L^{\infty}(\Omega)$且$k(x)\geqslant 0$, k不恒为0, 则:

1) 当$2_{\mu}^{*}>2$或$2_{\mu}^{*}=2$, $|f|_{\infty}>bS_{H,L}^{2}$时, 存在$\lambda_{*}>0$, 使得问题(1)对所有的$\lambda\in(0,\lambda_{*})$至少有一个正基态解$u_{\lambda}$. 此外,

$$\|u_{\lambda}\|<\left[\frac{(2\cdot 2_{\mu}^{*}-1-q)}{a(2\cdot 2_{\mu}^{*}-2)}|k|_{\infty}\right]^{1/(1-q)}S^{-(1+q)/[2(1-q)]}|\Omega|^{(2^{*}-1-q)/[2^{*}(1-q)]}\lambda^{1/(1-q)}.$$

2) 当$2_{\mu}^{*}=2$, $0<|f|_{\infty}\leqslant bS_{H,L}^{2}$或$1<2_{\mu}^{*}<2$, $2^{2_{\mu}^{*}-1}(2-2_{\mu}^{*})^{2-2_{\mu}^{*}}(2_{\mu}^{*}-1)^{2_{\mu}^{*}-1}|f|_{\infty}\leqslant 2_{\mu}^{*}a^{2-2_{\mu}^{*}}b^{2_{\mu}^{*}-1}S_{H,L}^{2_{\mu}^{*}}$时, 对所有的$\lambda>0$, 问题(1)都有一个正基态解.

证明: 1) 设$0<\lambda<\bar{\lambda}$. 由$\mathcal{N}$的定义可知$\mathcal{N}$是$H_{0}^{1}(\Omega)$中的闭集. 因此, 可将Ekeland变分原理应用于极小化问题$d=\inf\limits_{u\in\mathcal{N}}J_{\lambda}(u)$. 存在一个序列$\{u_n\}\subset\mathcal{N}$, 具有以下性质:

(i) $J_{\lambda}(u_n)<d+\dfrac{1}{n}$;

(ii) $J_{\lambda}(u)\geqslant J_{\lambda}(u_n)-\dfrac{1}{n}\|u-u_n\|$, $\forall u\in\mathcal{N}$.

显然, $\{u_n\}$在$H_{0}^{1}(\Omega)$中是有界的, 仍用$\{u_n\}$表示其子序列, 则存在$u_{\lambda}\in H_{0}^{1}(\Omega)$, 使得

$$\begin{cases} u_n\rightharpoonup u_{\lambda}, & \text{在 } H_0^1(\Omega) \text{ 中},\\ u_n\to u_{\lambda}, & \text{在 } L^{s}(\Omega) \text{ 中}, 1\leqslant s<2^{*},\\ u_n(x)\to u_{\lambda}(x), & \text{在 } \Omega \text{ 中几乎处处成立}. \end{cases}\tag{17}$$

当$n\to\infty$时, 由性质(i)知, 对所有足够大的n, 有$J_{\lambda}(u_n)<0$. 因此存在一个$\{u_n\}$的子序列(仍用$\{u_n\}$表示), 使得$\{u_n\}\subset\mathcal{N}\setminus\{0\}$. 对$\forall\varphi\in H_{0}^{1}(\Omega)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{f(x)|u_n^{+}(x)|^{2_{\mu}^{*}}|u_n^{+}(y)|^{2_{\mu}^{*}-2}u_n^{+}(y)\varphi(y)}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{f(x)|u_{\lambda}^{+}(x)|^{2_{\mu}^{*}}|u_{\lambda}^{+}(y)|^{2_{\mu}^{*}-2}u_{\lambda}^{+}(y)\varphi(y)}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{18}$$

因此当$n\to\infty$时, 有

$$\begin{cases} |u_n|^{2_{\mu}^{*}}\rightharpoonup|u_{\lambda}|^{2_{\mu}^{*}}, & \text{在 } L^{2N/(2N-\mu)}(\Omega) \text{ 中},\\ |u_n|^{2_{\mu}^{*}-2}u_n\rightharpoonup|u_{\lambda}|^{2_{\mu}^{*}-2}u_{\lambda}, & \text{在 } L^{2N/(N+2-\mu)}(\Omega) \text{ 中}. \end{cases}$$

由Hardy-Littlewood-Sobolev不等式, Riesz位势定义了从$L^{2N/(2N-\mu)}(\Omega)$到$L^{2N/\mu}(\Omega)$的一个线性连续映射, 有

$$\int_{\Omega}\frac{|u_n^{+}(y)|^{2_{\mu}^{*}}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y\rightharpoonup\int_{\Omega}\frac{|u_{\lambda}^{+}(y)|^{2_{\mu}^{*}}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y,\quad \text{在 } L^{2N/\mu}(\Omega) \text{ 中},\quad n\to\infty.$$

表明当$n\to\infty$时, 有

$$\int_{\Omega}\frac{f(x)|u_n^{+}(y)|^{2_{\mu}^{*}}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y|u_n^{+}(x)|^{2_{\mu}^{*}-2}u_n^{+}(x)\rightharpoonup$$
$$\int_{\Omega}\frac{f(x)|u_{\lambda}^{+}(y)|^{2_{\mu}^{*}}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y|u_{\lambda}^{+}(x)|^{2_{\mu}^{*}-2}u_{\lambda}^{+}(x),\quad \text{在 } L^{2N/(N+2-\mu)}(\Omega) \text{ 中},\quad n\to\infty.$$

故对$\forall\phi\in H_{0}^{1}(\Omega)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{f(x)|u_n^{+}(x)|^{2_{\mu}^{*}}|u_n^{+}(y)|^{2_{\mu}^{*}-2}u_n^{+}(y)\phi(y)}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{f(x)|u_{\lambda}^{+}(x)|^{2_{\mu}^{*}}|u_{\lambda}^{+}(y)|^{2_{\mu}^{*}-2}u_{\lambda}^{+}(y)\phi(y)}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{19}$$

特别地, 在式(19)中选择$\phi=\varphi$, 即得式(18). 下面证明$u_{\lambda}\in\mathcal{N}$是问题(1)的正基态解.

首先, 存在$\{u_n\}$的一个子序列(仍用$\{u_n\}$表示)及一个常数$C_1>0$(不依赖于n), 使得

$$\left|a(1-q)\|u_n\|^2+b(3-q)\|u_n\|^4-\right.$$
$$\left.(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega\int_\Omega \frac{f(x)\,|u_n^+(x)|^{2_\mu^*}\,|u_n^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\geqslant C_1. \tag{20}$$

由于 $u_n\in\mathcal{N}$，因此式(20)等价于

$$\left|a(2\cdot 2_\mu^*-2)\|u_n\|^2+b(2\cdot 2_\mu^*-4)\|u_n\|^4-\lambda(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega k(x)(u_n^+)^{q+1}\mathrm{d}x\right|\geqslant C_1. \tag{21}$$

由引理 1 可知对所有的 $0<\lambda<\bar\lambda$，$\mathcal{N}\setminus\{0\}=\mathcal{N}^+\cup\mathcal{N}^-$．一方面，假设 $u_n\in\mathcal{N}^+$，证明存在 $C_2>0$(不依赖于 n)，使得

$$a(2\cdot 2_\mu^*-2)\|u_n\|^2+b(2\cdot 2_\mu^*-4)\|u_n\|^4-\lambda(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega k(x)(u_n^+)^{q+1}\mathrm{d}x\leqslant -C_2. \tag{22}$$

由式(17)只需证明

$$a(2\cdot 2_\mu^*-2)\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^2+b(2\cdot 2_\mu^*-4)\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^4-$$
$$\lambda(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega k(x)(u_\lambda^+)^{q+1}\mathrm{d}x<0. \tag{23}$$

由于 $u_n\in\mathcal{N}^+$，有

$$a(2\cdot 2_\mu^*-2)\|u_n\|^2+b(2\cdot 2_\mu^*-4)\|u_n\|^4-\lambda(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega k(x)(u_n^+)^{q+1}\mathrm{d}x=$$
$$-\Big[a(1-q)\|u_n\|^2+b(3-q)\|u_n\|^4-$$
$$(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega\int_\Omega \frac{f(x)\,|u_n^+(x)|^{2_\mu^*}\,|u_n^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]<0, \tag{24}$$

因此

$$a(2\cdot 2_\mu^*-2)\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^2+b(2\cdot 2_\mu^*-4)\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^4-$$
$$\lambda(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega k(x)(u_\lambda^+)^{q+1}\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

用反证法，假设

$$a(2\cdot 2_\mu^*-2)\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^2+b(2\cdot 2_\mu^*-4)\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^4=$$
$$\lambda(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega k(x)(u_\lambda^+)^{q+1}\mathrm{d}x. \tag{25}$$

由 $\{u_n\}$ 的有界性和式(24)，并结合式(25)，令 $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n\|^2=l>0$，则有

$$a(2\cdot 2_\mu^*-2)l+b(2\cdot 2_\mu^*-4)l^2=\lambda(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega k(x)(u_\lambda^+)^{q+1}\mathrm{d}x. \tag{26}$$

由式(24)，(25)得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\int_\Omega \frac{f(x)\,|u_n^+(x)|^{2_\mu^*}\,|u_n^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a(1-q)}{2\cdot 2_\mu^*-1-q}l+\frac{b(3-q)}{2\cdot 2_\mu^*-1-q}l^2. \tag{27}$$

当 $2_\mu^*\geqslant 2$ 时，根据式(12)，(26)，(27)，对所有的 $0<\lambda<\bar\lambda$，令 $n\to\infty$，有

$$0<\frac{(2\cdot 2_\mu^*-2)a}{2\cdot 2_\mu^*-1-q}\left[\frac{a(1-q)}{2\cdot 2_\mu^*-1-q}\right]^{(1-q)/(2\cdot 2_\mu^*-2)}\times$$
$$\frac{\|u_n\|^{(2\cdot 2_\mu^*-1-q)/(2_\mu^*-1)}}{\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{f(x)\,|u_n^+(x)|^{2_\mu^*}\,|u_n^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{(1-q)/(2\cdot 2_\mu^*-2)}}-\lambda\int_\Omega k(x)(u_n^+)^{q+1}\mathrm{d}x<$$
$$\frac{(2\cdot 2_\mu^*-2)a}{2\cdot 2_\mu^*-1-q}\left[\frac{a(1-q)}{2\cdot 2_\mu^*-1-q}\right]^{(1-q)/(2\cdot 2_\mu^*-2)}\times$$
$$\frac{l}{\left[\frac{a(1-q)}{2\cdot 2_\mu^*-1-q}\right]^{(1-q)/(2\cdot 2_\mu^*-2)}}-\frac{(2\cdot 2_\mu^*-2)a}{2\cdot 2_\mu^*-1-q}l-\frac{b(2\cdot 2_\mu^*-4)}{2\cdot 2_\mu^*-1-q}l^2=$$

$$-\frac{b(2\cdot 2_\mu^*-4)}{2\cdot 2_\mu^*-1-q}l^2\leqslant 0. \tag{28}$$

矛盾. 因此式(22)成立, 即式(23)成立.

另一方面, 假设 $u_n\in\mathcal{N}^-$, 证明存在一个正常数 $C_3>0$(不依赖于 n), 使得

$$a(2\cdot 2_\mu^*-2)\|u_n\|^2+b(2\cdot 2_\mu^*-4)\|u_n\|^4-\lambda(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega k(x)(u_n^+)^{q+1}\mathrm{d}x\geqslant C_3. \tag{29}$$

由式(15), 只需证明

$$a(2\cdot 2_\mu^*-2)\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|^2+b(2\cdot 2_\mu^*-4)\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|^4-\lambda(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega k(x)(u_\lambda^+)^{q+1}\mathrm{d}x>0. \tag{30}$$

由于 $u_n\in\mathcal{N}^-$, 因此根据式(27)得

$$a(2\cdot 2_\mu^*-2)\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|^2+b(2\cdot 2_\mu^*-4)\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|^4-\lambda(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega k(x)(u_\lambda^+)^{q+1}\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

用反证法, 假设

$$a(2\cdot 2_\mu^*-2)\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|^2+b(2\cdot 2_\mu^*-4)\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|^4=\lambda(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega k(x)(u_\lambda^+)^{q+1}\mathrm{d}x. \tag{31}$$

由 $\{u_n\}$ 的有界性和式(24)并结合式(31), 可得

$$a(2\cdot 2_\mu^*-2)\lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2+b(2\cdot 2_\mu^*-4)\lim_{n\to\infty}\|u_n\|^4=\lambda(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega k(x)(u_\lambda^+)^{1+q}\mathrm{d}x.$$

同理可得式(26)~(31), 因此式(29)成立. 选择 $C_1=\max\{C_2,C_3\}$, 由式(21)和式(29)可得式(20)成立, 即式(15)成立.

其次, 证明 u_λ 是问题(1)的解. 应用引理 3, 可对子序列 $\{u_n\}$ 应用一个合适的可微泛函序列 $f_n=f_n(v)$, 使得 $f_n(0)=1$, $f_n(v)(u_n+v)\in\mathcal{N}\setminus\{0\}$, $\forall v\in H_0^1(\Omega)$, $\|v\|<\varepsilon_n$. 因此, 设 $\varphi\in H_0^1(\Omega)$, $t>0$, 取 $v=t\varphi$. 注意到 $u_n\in\mathcal{N}$, 有

$$a\|u_n\|^2+b\|u_n\|^4-\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_n^+(x)|^{2_\mu^*}|u_n^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\lambda\int_\Omega k(x)(u_n^+)^{1+q}\mathrm{d}x=0. \tag{32}$$

由范数和性质(ii)的次可加性, 得

$$\begin{aligned}
&\frac{|f_n(t\varphi)-1|\,\|u_n\|+tf_n(t\varphi)\|\varphi\|}{n}\geqslant\frac{1}{n}\|f_n(t\varphi)(u_n+t\varphi)-u_n\|\geqslant\\
&J_\lambda(u_n)-J_\lambda[f_n(t\varphi)(u_n+t\varphi)]=\\
&-a\frac{f_n^2(t\varphi)-1}{2}\|u_n\|^2-b\frac{f_n^4(t\varphi)-1}{4}\|u_n\|^4+\\
&\frac{f_n^{2\cdot 2_\mu^*}(t\varphi)-1}{2\cdot 2_\mu^*}\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|(u_n+t\varphi)^+(x)|^{2_\mu^*}|(u_n+t\varphi)^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\\
&\lambda\frac{f_n^{1+q}(t\varphi)-1}{1+q}\int_\Omega k(x)[(u_n+t\varphi)^+]^{q+1}\mathrm{d}x+\\
&a\frac{f_n^2(t\varphi)}{2}(\|u_n\|^2-\|u_n+t\varphi\|^2)+b\frac{f_n^4(t\varphi)}{4}(\|u_n\|^4-\|u_n+t\varphi\|^4)+\\
&\frac{1}{2\cdot 2_\mu^*}\Bigg(\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|(u_n+t\varphi)^+(x)|^{2_\mu^*}|(u_n+t\varphi)^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\\
&\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_n^+(x)|^{2_\mu^*}|u_n^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Bigg)+\\
&\lambda\frac{1}{1+q}\left\{\int_\Omega k(x)[(u_n+t\varphi)^+]^{q+1}-(u_n^+)^{q+1}\right\}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

然后除以 $t>0$ 取极限 $t\to 0^+$，并结合式(32)得

$$\frac{1}{n}\left(|\langle f_n'(0),\varphi\rangle|\,\|u_n\|+\|\varphi\|\right)\geqslant-(a+b\|u_n\|^2)\int_\Omega(\nabla u_n,\nabla\varphi)\mathrm{d}x+\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_n^+(x)|^{2_\mu^*}|u_n^+(y)|^{2_\mu^*-1}\varphi(y)}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\lambda\int_\Omega k(x)(u_n^+)^q\varphi\mathrm{d}x. \tag{33}$$

由引理 3 可得

$$\langle f_n'(0),\varphi\rangle=\frac{1}{Q}\Big\{(2a+4b\|u_n\|^2)\int_\Omega(\nabla u_n,\nabla\varphi)\mathrm{d}x-2\cdot 2_\mu^*\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_n^+(x)|^{2_\mu^*}|u_n^+(y)|^{2_\mu^*-1}\varphi(y)}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\lambda(1+q)\int_\Omega k(x)(u_n^+)^q\varphi\mathrm{d}x\Big\},$$

其中 $Q=a(1-q)\|u_n\|^2+b(3-q)\|u_n\|^4-(2\cdot 2_\mu^*-1-q)\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_n^+(x)|^{2_\mu^*}|u_n^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

由式(15)和 u_n 及 φ 的有界性可知

$$|\langle f_n'(0),\varphi\rangle|\leqslant C_4, \tag{34}$$

其中 C_4 是与 n 无关的正常数. 因此，对所有的 $\varphi\in H_0^1(\Omega)$，根据式(33)和式(34)并取极限 $n\to\infty$，由式(19)得

$$(a+b\lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2)\int_\Omega(\nabla u_\lambda,\nabla\varphi)\mathrm{d}x-\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_\lambda^+(x)|^{2_\mu^*}|u_\lambda^+(y)|^{2_\mu^*-1}\varphi(y)}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\lambda\int_\Omega k(x)(u_\lambda^+)^q\varphi\mathrm{d}x\geqslant 0. \tag{35}$$

式(35)同样适用于 $-\varphi$，对所有的 $\varphi\in H_0^1(\Omega)$，可得

$$(a+b\lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2)\int_\Omega(\nabla u_\lambda,\nabla\varphi)\mathrm{d}x-\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_\lambda^+(x)|^{2_\mu^*}|u_\lambda^+(y)|^{2_\mu^*-1}\varphi(y)}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\lambda\int_\Omega k(x)(u_\lambda^+)^q\varphi\mathrm{d}x=0. \tag{36}$$

下面证明 $H_0^1(\Omega)$ 中的 $u_n\to u_\lambda$，$n\to\infty$. 令 $w_n=u_n-u_\lambda$，在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $\|w_n\|\to 0$，$n\to\infty$. 否则，存在一个子序列 $\{w_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|w_n\|=l>0$. 由式(15)得

$$\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega|\nabla w_n|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla u_\lambda|^2\mathrm{d}x+o(1), \tag{37}$$

$$\left(\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2=\|w_n\|^4+\|u_\lambda\|^4+2\|w_n\|^2\|u_\lambda\|^2+o(1). \tag{38}$$

此外，根据 Brézis-Lieb 引理[13]，有

$$\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_n^+(x)|^{2_\mu^*}|u_n^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|w_n^+(x)|^{2_\mu^*}|w_n^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_\lambda^+(x)|^{2_\mu^*}|u_\lambda^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+o(1). \tag{39}$$

从而由式(32),(15),(37)～(39)可得

$$a\|u_\lambda\|^2+a\|w_n\|^2+b\|u_\lambda\|^4+b\|w_n\|^4+2b\|w_n\|^2\|u_\lambda\|^2-\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|w_n^+(x)|^{2_\mu^*}|w_n^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_\lambda^+(x)|^{2_\mu^*}|u_\lambda^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\lambda\int_\Omega k(x)(u_\lambda^+)^{q+1}\mathrm{d}x=o(1). \tag{40}$$

特别地，在式(36)中取 $\varphi=u_\lambda$，得

$$a\|u_\lambda\|^2+b\|u_\lambda\|^4+b\|w_n\|^2\|u_\lambda\|^2-\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_\lambda^+(x)|^{2_\mu^*}|u_\lambda^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\lambda\int_\Omega k(x)(u_\lambda^+)^{q+1}\mathrm{d}x=o(1). \tag{41}$$

一方面，由式(9),(41)可知

$$J_\lambda(u_\lambda)\geqslant\frac{a}{4}\|u_\lambda\|^2-\frac{\lambda(3-q)}{4(q+1)}|k|_\infty S^{-(1+q)/2}|\Omega|^{(2^*-1-q)/2^*}\|u_\lambda\|^{1+q}-\frac{b}{4}l^2\|u_\lambda\|^2\geqslant$$

$$-\Theta\lambda^{2/(1-q)}-\frac{b}{4}l^2\|u_\lambda\|^2,\tag{42}$$

这里最后一个不等式由 Young 不等式推出，其中

$$\Theta=\frac{1-q}{2}\left[\frac{2(1+q)}{a}\right]^{(1+q)/(1-q)}\left[\frac{3-q}{4(1+q)}\right]^{2/(1-q)}|k|_\infty^{2/(1-q)}S^{-(1+q)/(1-q)}|\Omega|^{2(2^*-1-q)/[2^*(1-q)]}>0.$$

另一方面，由式(40),(41)可知

$$J_\lambda(u_n)=J_\lambda(u_\lambda)+\frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{b}{4}\|w_n\|^4+\frac{b}{2}\|w_n\|^2\|u_\lambda\|^2-$$

$$\frac{1}{2\cdot 2_\mu^*}\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|w_n^+(x)|^{2_\mu^*}|w_n^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+o(1),\tag{43}$$

$$a\|w_n\|^2+b\|w_n\|^4+b\|w_n\|^2\|u_\lambda\|^2-\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|w_n^+(x)|^{2_\mu^*}|w_n^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=o(1).\tag{44}$$

根据式(10),(44)，有 $al^2+bl^4+bl^2\|u_\lambda\|^2\leqslant\dfrac{|f|_\infty l^{2\cdot 2_\mu^*}}{S_{H,L}^{2_\mu^*}}$，即

$$l^2\geqslant\begin{cases}\left[\dfrac{(a+b\|u_\lambda\|^2)S_{H,L}^{2_\mu^*}}{|f|_\infty}\right]^{2/2_\mu^*}, & 2_\mu^*>2,\\[2ex] \dfrac{(a+b\|u_\lambda\|^2)S_{H,L}^2}{|f|_\infty-bS_{H,L}^2}, & 2_\mu^*=2,\quad |f|_\infty>bS_{H,L}^2.\end{cases}\tag{45}$$

因此，由式(43)～(45)知，当 $2_\mu^*>2$ 时，对所有的 $0<\lambda<\left(\dfrac{\Gamma}{\Theta}\right)^{(1-q)/2}$，有

$$J_\lambda(u_\lambda)=d-\left[\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2\cdot 2_\mu^*}\right)l^2+\left(\frac{b}{4}-\frac{b}{2\cdot 2_\mu^*}\right)l^4+\left(\frac{b}{2}l^2\|u_\lambda\|^2-\frac{b}{2\cdot 2_\mu^*}l^2\|u_\lambda\|^2\right)\right]\leqslant$$

$$-\left\{\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2\cdot 2_\mu^*}\right)\left[\frac{(a+b\|u_\lambda\|^2)S_{H,L}^{2_\mu^*}}{|f|_\infty}\right]^{4/2_\mu^*}+\right.$$

$$\left.\left(\frac{b}{4}-\frac{b}{2\cdot 2_\mu^*}\right)\left[\frac{(a+b\|u_\lambda\|^2)S_{H,L}^{2_\mu^*}}{|f|_\infty}\right]^{8/2_\mu^*}\right\}-\frac{b}{4}l^2\|u_\lambda\|^2<$$

$$-\Theta\lambda^{2/(1-q)}-\frac{b}{4}l^2\|u_\lambda\|^2,$$

与式(42)矛盾，其中

$$\Gamma=\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2\cdot 2_\mu^*}\right)\left[\frac{(a+b\|u_\lambda\|^2)S_{H,L}^{2_\mu^*}}{|f|_\infty}\right]^{4/2_\mu^*}+\left(\frac{b}{4}-\frac{b}{2\cdot 2_\mu^*}\right)\left[\frac{(a+b\|u_\lambda\|^2)S_{H,L}^{2_\mu^*}}{|f|_\infty}\right]^{8/2_\mu^*}.$$

当 $2_\mu^*=2$，$|f|_\infty>bS_{H,L}^2$ 时，对所有的 $0<\lambda<\left(\dfrac{\Gamma'}{\Theta}\right)^{(1-q)/2}$，有

$$J_\lambda(u_\lambda)=d-\left(\frac{a}{4}l^2+\frac{b}{4}l^2\|u_\lambda\|^2\right)\leqslant-\frac{a^2S_{H,L}^2}{4(|f|_\infty-bS_{H,L}^2)}-\frac{b}{4}l^2\|u_\lambda\|^2<$$

$$-\Theta\lambda^{2/(1-q)}-\frac{b}{4}l^2\|u_\lambda\|^2,$$

与式(45)矛盾，其中 $\Gamma'=\dfrac{a^2S_{H,L}^2}{4(|f|_\infty-bS_{H,L}^2)}$. 因此，在 $H_0^1(\Omega)$ 中，对所有的 $0<\lambda<\lambda_*$，$u_n\to u_\lambda$，$n\to\infty$，其中 $\lambda_*=\min\left\{\bar{\lambda},\left(\dfrac{\Gamma}{\Theta}\right)^{(1-q)/2},\left(\dfrac{\Gamma'}{\Theta}\right)^{(1-q)/2}\right\}$. 对所有的 $0<\lambda<\lambda_*$，由式(35)及在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n\to u_\lambda$，$n\to\infty$，对所有的 $\varphi\in H_0^1(\Omega)$，有

$$(a+b\|u_\lambda\|^2)\int_\Omega(\nabla u_\lambda,\nabla\varphi)\mathrm{d}x-\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_\lambda^+(x)|^{2_\mu^*}|u_\lambda^+(y)|^{2_\mu^*-1}\varphi(y)}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$

$$\lambda\int_{\Omega}k(x)(u_{\lambda}^{+})^{q}\varphi\,\mathrm{d}x=0,\tag{46}$$

因此，u_{λ} 是问题(1)的弱解.

再次，证明 u_{λ} 是一个正基态解. 由于 $u_{\lambda}\in H_{0}^{1}(\Omega)$，则由嵌入定理有 $u_{\lambda}\in L^{2_{\mu}^{*}}(\Omega)$. 由于 $f,k\in L^{\infty}(\Omega)$，根据 Brézis-Kato 定理[14]，有 $u_{\lambda}\in L^{\infty}(\Omega)$. 由于 $J_{\lambda}(u_{\lambda})=d<0$，则有 u_{λ} 不恒为 0. 从而 $u_{\lambda}\geqslant 0$，u_{λ} 不恒为 0. 根据 $k(x)\geqslant 0$，k 不恒为 0，有

$$-\Delta u=\frac{f(x)\left(\int_{\Omega}\frac{|u_{\lambda}(y)|^{2_{\mu}^{*}}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y\right)|u_{\lambda}|^{2_{\mu}^{*}-2}u_{\lambda}+\lambda k(x)|u_{\lambda}|^{q}}{\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)}\geqslant$$

$$-\frac{f^{-}(x)\left(\int_{\Omega}\frac{|u_{\lambda}(y)|^{2_{\mu}^{*}}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y\right)|u_{\lambda}|^{2_{\mu}^{*}-2}u_{\lambda}}{\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)}\geqslant -Cu_{\lambda},$$

其中 $f^{\pm}=\max\{\pm f,0\}$，$f=f^{+}-f^{-}$，且 $C>0$ 为常数. 因此，由强极大值原理[15]可知，u_{λ} 是问题(1)的正解. 由于 $J_{\lambda}(u_{\lambda})=d$，故对所有的 $0<\lambda<\lambda_{*}$，u_{λ} 是 $J_{\lambda}(u_{\lambda})=d<0$ 的正基态解.

最后，证明 $\|u_{\lambda}\|<\left[\frac{2\cdot 2_{\mu}^{*}-1-q}{a(2\cdot 2_{\mu}^{*}-2)}|k|_{\infty}\right]^{1/(1-q)}S^{-(1+q)/[2(1-q)]}|\Omega|^{(2^{*}-1-q)/[2^{*}(1-q)]}\lambda^{1/(1-q)}$. 需证 $u_{\lambda}\in\mathcal{N}^{+}$. 显然 $u_{\lambda}\in\mathcal{N}$. 反之，假设 $u_{\lambda}\in\mathcal{N}^{-}$(对所有的 $0<\lambda<\bar{\lambda}$，$\mathcal{N}^{0}=\{0\}$). 由引理 1 可知，存在正数 $0<t_{\lambda}^{+}<t_{\max}<t_{\lambda}^{-}=1$，使得 $t_{\lambda}^{+}u_{\lambda}\in\mathcal{N}^{+}$，$t_{\lambda}^{-}u_{\lambda}\in\mathcal{N}^{-}$，

$$J_{\lambda}(t_{\lambda}^{+}u_{\lambda})<J_{\lambda}(t_{\lambda}^{-}u_{\lambda})=J_{\lambda}(u_{\lambda})=d=\inf_{u\in\mathcal{N}}J_{\lambda}(u),$$

矛盾. 因此，$u_{\lambda}\in\mathcal{N}^{+}$，$J_{\lambda}(u_{\lambda})=d=d^{+}$. 由 $u_{\lambda}\in\mathcal{N}^{+}$ 和式(9)可得

$$a(2\cdot 2_{\mu}^{*}-2)\|u_{\lambda}\|^{2}<\lambda(2\cdot 2_{\mu}^{*}-1-q)\int_{\Omega}k(x)u_{\lambda}^{1+q}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\lambda(2\cdot 2_{\mu}^{*}-1-q)|k|_{\infty}S^{-(1+q)/2}|\Omega|^{(2^{*}-1-q),2^{*}}\|u_{\lambda}\|^{1+q},$$

即

$$\|u_{\lambda}\|<\left[\frac{2\cdot 2_{\mu}^{*}-1-q}{a(2\cdot 2_{\mu}^{*}-2)}|k|_{\infty}\right]^{1/(1-q)}S^{-(1+q)/[2(1-q)]}|\Omega|^{(2^{*}-1-q)/[2^{*}(1-q)]}\lambda^{1/(1-q)}.$$

2) 根据结论 1)，只需考虑 $2_{\mu}^{*}=2$，$0<|f|_{\infty}\leqslant bS_{H,L}^{2}$ 或 $1<2_{\mu}^{*}<2$ 的情形. 下面设 $2_{\mu}^{*}=2$，$0<|f|_{\infty}\leqslant bS_{H,L}^{2}$ 或 $1<2_{\mu}^{*}<2$，$2^{2_{\mu}^{*}-1}(2-2_{\mu}^{*})^{2-2_{\mu}^{*}}(2_{\mu}^{*}-1)^{2_{\mu}^{*}-1}|f|_{\infty}\leqslant 2_{\mu}^{*}a^{2-2_{\mu}^{*}}b^{2_{\mu}^{*}-1}S_{H,L}^{2_{\mu}^{*}}$.

首先，$d=\inf\limits_{u\in H_{0}^{1}(\Omega)}J_{\lambda}(u)$，定义合理且 $d<0$. 由 Hölder 不等式和式(7),(8)可知

$$J_{\lambda}(u)\geqslant\frac{a}{2}\|u\|^{2}+\frac{b}{4}\|u\|^{4}-\frac{|f|_{\infty}}{2\cdot 2_{\mu}^{*}S_{H,L}^{2_{\mu}^{*}}}\|u\|^{2\cdot 2_{\mu}^{*}}-$$

$$\frac{\lambda|k|_{\infty}S^{-(1+q)/2}|\Omega|^{(2^{*}-1-q)/2^{*}}}{1+q}\|u\|^{1+q}.\tag{47}$$

当 $2_{\mu}^{*}=2$，$0<|f|_{\infty}\leqslant bS_{H,L}^{2}$ 时，由式(47)可知

$$J_{\lambda}(u)\geqslant\frac{a}{2}\|u\|^{2}-\frac{\lambda|k|_{\infty}S^{-(1+q)/2}|\Omega|^{(2^{*}-1-q)/2^{*}}}{1+q}\|u\|^{1+q}.\tag{48}$$

因为 $0<q<1$，即 J_{λ} 是强制的，并且在 $H_{0}^{1}(\Omega)$ 上有下界，因此当 $1<2_{\mu}^{*}<2$ 时，根据 Young 不等式，有

$$\frac{|f|_{\infty}}{2\cdot 2_{\mu}^{*}S_{H,L}^{2_{\mu}^{*}}}\|u\|^{2\cdot 2_{\mu}^{*}}\leqslant\frac{a}{2}\|u\|^{2}+\left(\frac{a}{4-2\cdot 2_{\mu}^{*}}\right)^{(2_{\mu}^{*}-2)/(2_{\mu}^{*}-1)}\frac{(2\cdot 2_{\mu}^{*}-2)|f|_{\infty}^{2/(2\cdot 2_{\mu}^{*}-2)}}{2\cdot(2\cdot 2_{\mu}^{*})^{2/(2\cdot 2_{\mu}^{*}-2)}S_{H,L}^{2_{\mu}^{*}/(2_{\mu}^{*}-1)}}\|u\|^{4}.$$

从而由式(47),(48)可知

$$J_{\lambda}(u)\geqslant\left[\frac{b}{4}-\left(\frac{a}{4-2\cdot 2_{\mu}^{*}}\right)^{(2_{\mu}^{*}-2)/(2_{\mu}^{*}-1)}\frac{(2\cdot 2_{\mu}^{*}-2)|f|_{\infty}^{2/(2\cdot 2_{\mu}^{*}-2)}}{2\cdot(2\cdot 2_{\mu}^{*})^{2/(2\cdot 2_{\mu}^{*}-2)}S_{H,L}^{2_{\mu}^{*}/(2_{\mu}^{*}-1)}}\right]\|u\|^{4}-$$

$$\frac{\lambda|k|_\infty S^{-(1+q)/2}|\Omega|^{(2^*-1-q)/2^*}}{1+q}\|u\|^{1+q}.$$

由于$0<q<1$，设$2^{2_\mu^*-1}(2-2_\mu^*)^{2-2_\mu^*}(2_\mu^*-1)^{2_\mu^*-1}|f|_\infty\leqslant 2_\mu^* a^{2-2_\mu^*}b^{2_\mu^*-1}S_{H,L}^{2_\mu^*}$，则可得$J_\lambda$在$H_0^1(\Omega)$上是强制有界的. 因此，当$2_\mu^*=2$，$0<|f|_\infty\leqslant bS_{H,L}^2$或$1<2_\mu^*<2$，$2^{2_\mu^*-1}(2-2_\mu^*)^{2-2_\mu^*}(2_\mu^*-1)^{2_\mu^*-1}|f|_\infty\leqslant 2_\mu^* a^{2-2_\mu^*}b^{2_\mu^*-1}S_{H,L}^{2_\mu^*}$时，$J_\lambda$是强制的，并且在$H_0^1(\Omega)$上有下界. 则$d=\inf\limits_{u\in H_0^1(\Omega)}J_\lambda(u)$定义合理. 此外，由于$0<q<1$，$\lambda>0$，$k\geqslant 0$，且$\Omega$中$k$不恒为0，则得到$d<0$. 因此结论得证.

其次，证明$d=\inf\limits_{u\in H_0^1(\Omega)}J_\lambda(u)$可达到. 根据$d$的定义，由Ekeland变分原理知，存在一个极小序列$\{u_n\}\in H_0^1(\Omega)$，使得在$(H_0^1(\Omega))^*$中，$\lim\limits_{n\to\infty}J_\lambda(u_n)=d$且$J_\lambda'(u_n)\to 0$，$n\to\infty$. 显然，$\{u_n\}$在$H_0^1(\Omega)$中有界. 由于$J_\lambda(u_n)=J_\lambda(|u_n|)$，因此假设对$x\in\Omega$，$u_n(x)\geqslant 0$，其子序列仍用$\{u_n\}$表示，则存在$u_*\geqslant 0$，使得

$$\begin{cases} u_n\rightharpoonup u_*, & \text{在 } H_0^1(\Omega)\text{ 中}, \\ u_n\to u_*, & \text{在 } L^s(\Omega)\text{ 中}, 1\leqslant s<2^*, \\ u_n(x)\to u_*(x), & \text{在 } \Omega \text{ 中几乎处处成立}. \end{cases} \tag{49}$$

当$n\to\infty$时，令$w_n=u_n-u_*$，由$\{u_n\}$在$H_0^1(\Omega)$中的弱收敛性和Brézis-Lieb引理[13]，得

$$\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega|\nabla w_n|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla u_*|^2\mathrm{d}x+o(1), \tag{50}$$

$$\left(\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2=\|w_n\|^4+\|u_*\|^4+2\|w_n\|^2\|u_*\|^2+o(1), \tag{51}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_n^+(x)|^{2_\mu^*}|u_n^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=&\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|w_n^+(x)|^{2_\mu^*}|w_n^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\\&\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u_*^+(x)|^{2_\mu^*}|u_*^+(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+o(1).\end{aligned} \tag{52}$$

由式(49)～(52)可知

$$\begin{aligned}d=&J_\lambda(u_n)+o(1)\geqslant\\&J_\lambda(u_*)+\frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{b}{4}\|w_n\|^4-\frac{|f|_\infty}{2\cdot 2_\mu^* S_{H,L}^{2_\mu^*}}\|w_n\|^{2\cdot 2_\mu^*}+o(1)\geqslant J_\lambda(u_*),\end{aligned} \tag{53}$$

需满足

$$\frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{b}{4}\|w_n\|^4-\frac{|f|_\infty}{2\cdot 2_\mu^* S_{H,L}^{2_\mu^*}}\|w_n\|^{2\cdot 2_\mu^*}\geqslant 0. \tag{54}$$

下证式(54)成立. 若$2_\mu^*=2$，$0<|f|_\infty\leqslant bS_{H,L}^2$，则

$$\frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{b}{4}\|w_n\|^4-\frac{|f|_\infty}{4S_{H,L}^2}\|w_n\|^4\geqslant\frac{a}{2}\|w_n\|^2>0,$$

即式(54)成立. 若

$$1<2_\mu^*<2,\quad 2^{2_\mu^*-1}(2-2_\mu^*)^{2-2_\mu^*}(2_\mu^*-1)^{2_\mu^*-1}|f|_\infty\leqslant 2_\mu^* a^{2-2_\mu^*}b^{2_\mu^*-1}S_{H,L}^{2_\mu^*},$$

将式(48)中的$\|u\|$替换为$\|w_n\|$，得

$$\begin{aligned}&\frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{b}{4}\|w_n\|^4-\frac{|f|_\infty}{2\cdot 2_\mu^* S_{H,L}^{2_\mu^*}}\|w_n\|^{2\cdot 2_\mu^*}\geqslant\\&\left[\frac{b}{4}-\left(\frac{a}{4-2\cdot 2_\mu^*}\right)^{(2_\mu^*-2)/(2_\mu^*-1)}\frac{(2_\mu^*-1)|f|_\infty^{1/(2_\mu^*-1)}}{(2\cdot 2_\mu^*)^{1/(2_\mu^*-1)}S_{H,L}^{2_\mu^*/(2_\mu^*-1)}}\right]>0,\end{aligned}$$

即式(54)成立，从而式(53)成立. 显然，$J_\lambda(u_*)\geqslant d$，因此$J_\lambda(u_*)=d$.

最后，证明u_*是问题(1)的正解. 由于J_λ是$H_0^1(\Omega)$上的C^1泛函，因此可得u_*是问题(1)的解. 类似于结论1)，由弱解的正则性和强极大值原理[15]可得u_*是问题(1)的正解. 由于$J_\lambda(u_*)=d$，则

u_* 是一个正的基态解．证毕．

参 考 文 献

[1] LI H Y. Existence of Positive Ground State Solutions for a Critical Kirchhoff Type Problem with Sign-Changing Potential [J]. Computers & Mathematics with Applications，2018，75(8)：2858-2873.

[2] NAIMEN D，SHIBATA M. Existence and Multiplicity of Positive Solutions of a Critical Kirchhoff Type Elliptic Problem in Dimension Four [J]. Differential and Integral Equations，2020，33(5/6)：223-246.

[3] YANG L，LIU Z S，OUYANG Z G. Multiplicity Results for the Kirchhoff Type Equations with Critical Growth [J]. Applied Mathematics Letters，2017，63：118-123.

[4] LUO X R，MAO A M，SANG Y B. Nonlinear Choquard Equations with Hardy-Littlewood-Sobolev Critical Exponents [J]. Communications on Pure and Applied Analysis，2021，20(4)：1319-1345.

[5] LIANG S H，PUCCI P，ZHANG B L. Multiple Solutions for Critical Choquard-Kirchhoff Type Equations [J]. Advances in Nonlinear Analysis，2021，10(1)：400-419.

[6] SONG Y Q，SHI S Y. Existence and Multiplicity of Solutions for Kirchhoff Equations with Hardy-Littlewood-Sobolev Critical nonlinearity [J]. Applied Mathematics Letters，2019，92：170-175.

[7] GAO F S，YANG M B. The Brezis-Nirenberg Type Critical Problem for the Nonlinear Choquard Equation [J]. Science China：Mathematics，2018，61(7)：1219-1242.

[8] MUKHERJEE T，SREENADH K. Positive Solutions for Nonlinear Choquard Equation with Singular Nonlinearity [J]. Complex Variables and Elliptic Equations，2017，62(8)：1044-1071.

[9] SHEN Z F，GAO F S，YANG M B. Multiple Solutions for Nonhomogeneous Choquard Equation Involving Hardy-Littlewood-Sobolev Critical Exponent [J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik，2017，68(3)：61-1-61-25.

[10] ZHANG Y P，QIN D D. Existence of Solutions for a Critical Choquard-Kirchhoff Problem with Variable Exponents [J]. Journal of Geometric Analysis，2023，33(7)：200-1-200-28.

[11] GUO Z Y，ZHAO L J. Ground States for Fractional Choquard Equations with Doubly Critical Exponents and Magnetic Fields [J]. Izvestiya Mathematics，2024，88(1)：43-53.

[12] GAO Q，HE X M. Normalized Solutions for the Choquard Equations with Critical Nonlinearities [J]. Advances in Nonlinear Analysis，2024，13(1)：20240030-1-20240030-33.

[13] BRÉZIS H，LIEB E. A Relation between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1983，88(3)：486-490.

[14] BRÉZIS H，KATO T. Remarks on the Schrödinger Operator with Singular Complex Potentials [J]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées，1979，58(2)：137-151.

[15] CINGOLANI S，GALLO M，TANAKA K. On Fractional Schrödinger Equations with Hartree Type Nonlinearities [J]. Mathematics in Engineering，2022，4(6)：056-1-056-33.

（责任编辑：赵立芹）