第 63 卷 第 5 期 吉 林 大 学 学 报 (理 学 版) Vol. 63 No. 5
2025 年 9 月 Journal of Jilin University (Science Edition) Sep 2025

doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2025004

带时间依赖记忆核的非局部非经典扩散方程解的长时间动力学行为

汪 璇, 史慧霞
(西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070)

摘要: 当非线性项满足次临界增长条件时, 在时间依赖空间 $H_0^1(\Omega)\times L_{\mu_t}^2(\mathbb{R}^+;H_0^1(\Omega))$ 中讨论带时间依赖记忆核的非局部非经典扩散方程解的长时间动力学行为. 先利用 Galerkin 逼近法得到解的适定性和正则性, 然后借助分解技巧和积分估计法证明时间依赖全局吸引子的存在性和正则性.

关键词: 非局部非经典扩散方程; 时间依赖记忆核; 时间依赖全局吸引子; 正则性
中图分类号: O175.29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)05-1276-17

Long-Time Dynamical Behavior of Solutions for Nonlocal Nonclassical Diffusion Equation with Time-Dependent Memory Kernels

WANG Xuan, SHI Huixia
(*College of Mathematics and Statistics*, *Northwest Normal University*, *Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: When the nonlinear term satisfied the subcritical growth condition, long-time dynamical behavior of solutions for nonlocal nonclassical diffusion equation with time-dependent memory kernels was discussed in $H_0^1(\Omega)\times L_{\mu_t}^2(\mathbb{R}^+;H_0^1(\Omega))$. We first used Galerkin approximation method to obtain the well-posedness and regularity of the solution, and then used decomposition technique and integral estimation method to prove the existence and regularity of the time-dependent global attractors.

Keywords: nonlocal nonclassical diffusion equation; time-dependent memory kernel; time-dependent global attractor; regularity

0 引 言

经典反应扩散方程[1]广泛应用于流体力学、固体力学和热传导领域. 在反应扩散过程中, 传导介质的性质会对反应扩散过程产生深刻影响. 如果在模型中考虑传导介质的黏性、弹性、压力等因素, 即为非经典扩散方程. 关于非经典扩散方程的研究目前已取得了丰富的成果[2-4]. Ma 等[3]研究了非经典反应扩散方程在 $\mathbb{R}^3$ 上解的渐近行为, 利用半群方法证明了其全局吸引子的存在性; Wang 等[4]证明了非经典扩散方程在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中全局吸引子的上半连续性. 此外, 对于带时滞的非经典扩散方程目前也取得了很多研究成果[5-9].

近年来, 为更好地模拟现实生活中种群的行为, 如扩散、聚集、生长及对食物和资源的竞争, 人们

收稿日期: 2025-01-03.
第一作者简介: 汪 璇(1973—), 女, 汉族, 博士, 教授, 从事非线性微分方程和无穷维动力系统的研究, E-mail: wangxuan@nwnu.edu.cn. **通信作者简介:** 史慧霞(1997—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事无穷维动力系统的研究, E-mail: 1623276119@qq.com.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11961060; 11961059; 12061062).

提出了具有非局部项的反应扩散系统．文献[10-13]研究表明，动力系统中带有非局部扩散项可以更深刻地描述许多实际问题．特别是带时间依赖记忆核和非局部扩散的非经典扩散方程，在描述材料科学、生物入侵、化学反应等自然现象中的扩散过程时能更准确地刻画种群在空间上的非局部作用，以及时间依赖记忆效应对扩散过程的影响，从而使带时间依赖记忆核的非局部非经典扩散方程的研究受到广泛关注．Chipot 等[11]研究了依赖于 Dirichlet 积分的带非局部项的非线性抛物方程边值问题，证明了其解的存在性、唯一性和渐近性问题，并将非局部项拓展到了更一般的非局部算子 $a(l(u))$：

$$\begin{cases}\partial_t u - a\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = f, & \text{在 } \Omega\times\mathbb{R}^+ \text{ 内},\\ u(x,0)=u_0(x), & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ u=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}^+,\end{cases}$$

其中 $a=a(s)$ 是一个连续函数，满足 $\forall s\in\mathbb{R}$，$0<m\leqslant a(s)\leqslant M$．Caraballo 等[14]证明了当 f 满足次临界增长条件时，在空间 $L^2(\Omega)$ 和 $H_0^1(\Omega)$ 中拉回吸引子的存在性．Simsen 等[15]证明了 $\forall s\in\mathbb{R}$，f 满足 $-k-\alpha_1|s|^p\leqslant f(s)s\leqslant k-\alpha_2|s|^p$，其中 k,α_1,α_2 为正常数且 $p\geqslant 2$，应用 Faedo-Galerkin 逼近方法和 Aubin-Lions 紧性估计，研究了非局部扩散方程弱解初值的存在性、唯一性和连续性，并证明了全局吸引子的存在性．基于上述工作，Xu 等[12]利用 Galerkin 逼近法和能量估计研究了带有时滞和记忆的非自治非局部偏微分方程

$$\begin{cases}\partial_t u - a(l(u))\Delta u = f(u)+h(t,u_t), & \text{在 } \Omega\times[\tau,\infty) \text{ 内},\\ u=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times[\tau,\infty),\\ u_\tau(x,t)=\varphi(x,t), & \text{在 } \Omega\times(-\rho,0] \text{ 内}\end{cases}$$

的动力学行为，其中 $a\in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^+)$ 是一个局部 Lipschitz 连续函数，$l\in\mathscr{L}(L^2(\Omega);\mathbb{R})$，$l(u)$ 是作用于 u 的线性泛函，h 包含时滞，u_t：$(-\infty,0]\to\mathbb{R}$ 且 $u_t(s)=u(t+s)$．然而文献[12]仍不能解决记忆核带有奇点的情况，因此文献[13]对相应方程进行研究，解决了记忆核带有奇点的问题并改进了已有研究结果．

此外，在一些与记忆材料相关的物理问题推动下，关于具有长时间记忆的偏微分方程的研究也获得了丰富的研究成果．文献[16-18]研究了具有衰退记忆的非经典扩散方程

$$\partial_t u - \Delta\partial_t u - \Delta u - \int_0^\infty k(s)\Delta u(t-s)\mathrm{d}s + f(u) = g(x)$$

解的渐近状态，由于对应的动力系统的能量耗散速度受函数 Δu 和记忆核 $k(\cdot)$ 卷积的影响，因此比通常(无记忆项)的非经典扩散方程更快．Caraballo 等[6,19]研究了具有衰退记忆的非经典扩散方程的非自治情况．Yuan 等[20]研究了当非线性项满足任意阶多项式增长条件时，一类具有记忆的扰动非经典反应扩散方程全局吸引子的存在性和正则性．

考虑下列带时间依赖记忆核的非局部非经典扩散方程解的长时间动力学行为：

$$\begin{cases}\partial_t u - \Delta\partial_t u - a(l(u))\Delta u - \int_{-\infty}^t h_t(s)\Delta u(t-s)\mathrm{d}s + f(u) = g(x), & x\in\Omega,\quad t>\tau,\\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\quad t>\tau,\\ u(x,\tau)=u_\tau(x,t), & x\in\Omega,\quad t\leqslant\tau,\end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 上带有光滑边界的有界域．假设函数 $a\in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^+)$ 为局部 Lipschitz 连续函数，即存在 Lipschitz 常数 $L_a(R)$，使得

$$|a(l(u_1))-a(l(u_2))|\leqslant L_a(R)|l(u_1)-l(u_2)|, \tag{2}$$

且存在正常数 m,M，使得

$$1-\theta<m\leqslant a(r)\leqslant M,\qquad \forall r\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

设时间依赖记忆核函数 $h_t(s)$ 是非负的、凸的且可和的，并且满足

$$h_t(s)=\int_s^\infty \mu_t(y)\mathrm{d}y,\quad \forall s\in\mathbb{R}^+,\quad t\in\mathbb{R}.$$

假设 $\mu_t(s)=-\partial_s h_t(s)$，并且映射 $(t,s)\mapsto\mu_t(s)$：$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$，满足以下条件：

(H_1) 对任意的 $t\in\mathbb{R}$,映射 $s\mapsto\mu_t(s)$是非增的、绝对连续且可和的,定义

$$\kappa(t):=\int_0^\infty \mu_t(s)\mathrm{d}s,\qquad \inf_{t\in\mathbb{R}}\kappa(t)>0;$$

(H_2) 对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$,存在一个连续函数 K_τ:$[\tau,\infty)\to\mathbb{R}^+$,使得

$$\mu_t(s)\leqslant K_\tau(t)\mu_\tau(s),\quad \forall t\geqslant\tau,\quad \text{a.e. } s\in\mathbb{R}^+;$$

(H_3) 对每个固定的 $s>0$,映射 $t\mapsto\mu_t(s)$对所有的 $t\in\mathbb{R}$ 是可微的,并且对任意的紧集 $\mathscr{K}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$,有

$$(t,s)\mapsto\mu_t(s)\in L^\infty(\mathscr{K}),\qquad (t,s)\mapsto\partial_t\mu_t(s)\in L^\infty(\mathscr{K});$$

(H_4) 存在正常数 $\delta>1$,使得

$$\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s)+\delta\kappa(t)\mu_t(s)\leqslant 0,\quad \forall t\in\mathbb{R}^+,\quad \text{a.e. } s\in\mathbb{R}^+.$$

目前,对带时间依赖记忆核的非局部非经典扩散方程解的长时间动力学行为研究尚未见文献报道.当方程的记忆核依赖于时间 t 时,非局部扩散项、时间依赖记忆核和时滞会给耗散性估计和紧性验证带来极大困难.首先,由于记忆核函数依赖于时间,定义变量 η^t 的时间导数与以往不同;其次,用于带衰退记忆项方程的经典方法和微分不等式无法进行方程(1)的耗散性估计和解过程的紧性验证;且$-\Delta\partial_t u$ 的存在表明若初值仅属于弱拓扑空间,则方程(1)的解只可在弱拓扑空间上求得,不具有更高的正则性.因此,不能利用 Sobolev 空间的紧嵌入定理进行渐近紧性验证;最后,对带有非局部算子 $a(l(u))$的反应扩散模型,在证明对解的初值连续依赖性及解过程的紧性验证时会带来困难.为克服上述困难,本文借助文献[21-24]的思想,在新的理论框架下,利用积分估计法及分解技巧成功克服了估计和证明过程中的实质性难题,得到了解的适定性和正则性,进而证明了时间依赖全局吸引子的存在性和正则性.

1 预备知识

借助文献[25-26]的思想,定义新的历史变量

$$\eta^t(s)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^s u(t-r)\mathrm{d}r, & 0\leqslant s\leqslant t-\tau,\\[2ex] \displaystyle\eta_\tau(s-t+\tau)+\int_0^{t-\tau}u(t-r)\mathrm{d}r, & s>t-\tau.\end{cases}\tag{4}$$

利用 $\mu_t(s)=-\partial_s h_t(s)$和 $h_t(\infty)=0$,可将方程(1)转化为

$$\partial_t u-\Delta\partial_t u-a(l(u))\Delta u-\int_0^\infty\mu_t(s)\Delta\eta^t(s)\mathrm{d}s+f(u)=g,\tag{5}$$

其相应的初-边值条件为

$$\begin{cases}u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\quad t>\tau,\\ \eta^t(x,s)=0, & (x,s)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}^+,\quad t>\tau,\\ \eta^\tau(x,s)=\eta_\tau(x,s),\quad u(x,t)=u_\tau(x), & (x,s)\in\Omega\times\mathbb{R}^+,\quad x\in\Omega,\quad t\leqslant\tau,\end{cases}\tag{6}$$

其中 $u(\cdot)$满足:存在两个正常数 R 和 $\rho\leqslant\delta$,使得 $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho s}\|\nabla u(-s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant R$.

假设外力项 $g\in L^2(\Omega)$,非线性项 $f\in C^1(\mathbb{R})$满足 $f(0)=0$,且满足

$$|f'(u)|\leqslant C(1+|u|^{p-1}),\qquad 1\leqslant p\leqslant 2,\tag{7}$$

$$f'(u)\geqslant -C_1,\qquad \forall u\in\mathbb{R},\tag{8}$$

其中 C 和 C_1 为正常数.设 f 满足耗散条件

$$\liminf_{|u|\to\infty}f'(u)>-\lambda_1,\tag{9}$$

这里 $\lambda_1>0$ 为$-\Delta$ 在 Dirichlet 边界条件下的第一特征值.显然,根据式(9)知,存在 $\theta(0<\theta<1)$,使得

$$\langle f(u),u\rangle\geqslant\langle F(u),1\rangle-\frac{1}{4}(1-\theta)\|u\|_1^2-c_f,\tag{10}$$

$$\langle F(u),1\rangle\geqslant-\frac{1}{4}(1-\theta)\|u\|_1^2-c_f,\qquad \forall u\in H_0^1(\Omega),\tag{11}$$

其中 $F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$，$c_f\geqslant 0$.

根据文献[27]，$A=-\Delta$，$D(A)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. 对于 Hilbert 空间族 $D(A^{k/2})$，$k\in\mathbb{R}$，赋予其内积和范数分别为

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{D(A^{k/2})}=\langle A^{k/2}\cdot,A^{k/2}\cdot\rangle,\qquad \|\cdot\|_{D(A^{k/2})}=\|A^{k/2}\cdot\|,$$

其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$和$\|\cdot\|$是 $L^2(\Omega)$中的内积和范数.

对任意的 $k>s$，有紧嵌入 $D(A^{k/2})\hookrightarrow\hookrightarrow D(A^{s/2})$；对所有的 $k\in[0,n/2)$，有连续嵌入 $D(A^{k/2})\hookrightarrow L^{2n/(n-2k)}(\Omega)$.

当 $0\leqslant k<3$ 时，记 $\mathscr{H}_k=D(A^{k/2})$，$\|\cdot\|_k=\|\cdot\|_{\mathscr{H}_k}\|\cdot\|_{D(A^{k/2})}$，用 $\mathscr{H}$ 表示 $L^2(\Omega)$，$\mathscr{H}_1$ 表示 $H_0^1(\Omega)$，$\mathscr{H}_2$ 表示 $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. 根据 $h_t(s)$所满足的条件，当 $0\leqslant\sigma<3$ 时，定义记忆空间

$$\mathscr{M}_t^\sigma=L_{\mu_t}^2(\mathbb{R}^+;\mathscr{H}_\sigma)=\left\{\xi^t:\mathbb{R}^+\to\mathscr{H}_\sigma\,\middle|\,\int_0^\infty\mu_t(s)\|\xi^t(s)\|_\sigma^2\mathrm{d}s<+\infty\right\},$$

并赋予其内积和范数分别为

$$\langle\eta^t,\xi^t\rangle_{\mathscr{M}_t^\sigma}=\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\eta^t(s),\xi^t(s)\rangle_\sigma\mathrm{d}s,\qquad \|\xi^t\|_{\mathscr{M}_t^\sigma}^2=\int_0^\infty\mu_t(s)\|\xi^t(s)\|_\sigma^2\mathrm{d}s.$$

特别地，定义时间依赖空间及其范数为

$$\mathscr{E}_t^\sigma=\mathscr{H}_\sigma\times\mathscr{M}_t^\sigma,\qquad \|z\|_{\mathscr{E}_t^\sigma}^2=\|(u,\eta^t)\|_{\mathscr{E}_t^\sigma}^2=\|u\|_\sigma^2+\|\eta^t\|_{\mathscr{M}_t^\sigma}^2.$$

根据条件(H_2)，对任意的 $\eta^t\in\mathscr{M}_\tau^\sigma$，有

$$\|\eta^t\|_{\mathscr{M}_t^\sigma}^2\leqslant K_\tau(t)\|\eta^t\|_{\mathscr{M}_\tau^\sigma}^2,\qquad\forall\, t\geqslant\tau,\tag{12}$$

且有连续嵌入 $\mathscr{M}_\tau^\sigma\hookrightarrow\mathscr{M}_t^\sigma$，$\forall\, t\geqslant\tau$.

参考文献[23]，$\mathbb{T}_t$ 是空间 $\mathscr{M}_t^\sigma$ 上右平移收缩半群的无穷小算子，因此是一个耗散算子，且如下估计式成立：

$$\langle\mathbb{T}_t\eta^t,\eta^t\rangle_{\mathscr{M}_t^\sigma}=\frac{1}{2}\int_0^\infty\partial_s\mu_t(s)\|\eta^t(s)\|_\sigma^2\mathrm{d}s,\qquad\forall\,\eta^t\in D(\mathbb{T}_t).\tag{13}$$

根据条件(H_1)可知，对任意固定的 t，函数 $s\mapsto\mu_t(s)$是可微的，且$\partial_s\mu_t(s)\leqslant 0$，则 $\forall\,\eta^t\in D(\mathbb{T}_t)$，$\langle\mathbb{T}_t\eta^t,\eta^t\rangle_{\mathscr{M}_t^\sigma}\leqslant 0$. 由式(12)可知

$$\mathbb{T}_\tau\subset\mathbb{T}_t,\qquad\forall\, t\geqslant\tau.\tag{14}$$

引理 1[25,28-29]　设 $\mu\in C^1(\mathbb{R}^+)\cap L^1(\mathbb{R})$是非负函数，且满足：如果存在 $s_0\in\mathbb{R}^+$，使得 $\mu(s_0)=0$，则 $\mu(s)=0$ 对所有的 $s\geqslant s_0$ 均成立. 此外，设 B_0,B_1,B_2 是 Banach 空间，其中 B_0,B_1 自反，满足 $B_0\hookrightarrow B_1\hookrightarrow B_2$，且嵌入 $B_0\hookrightarrow B_1$ 紧. 设 $\mathscr{C}\subset L_\mu^2(\mathbb{R}^+;B_1)$满足下列条件：

1) $\mathscr{C}$ 在 $L_\mu^2(\mathbb{R}^+;B_0)\cap H_\mu^1(\mathbb{R}^+;B_2)$中；

2) $\sup\limits_{\eta\in\mathscr{C}}\|\eta(s)\|_{B_1}^2\leqslant h(s)$，$\forall\, s\in\mathbb{R}^+$，$h(s)\in L_\mu^1(\mathbb{R}^+)$.

则 $\mathscr{C}$ 在 $L_\mu^2(\mathbb{R}^+;B_1)$中紧.

引理 2[30-31]　设 X,Y,Z 为 3 个 Banach 空间. 对于 $T>0$，若 $X\hookrightarrow\hookrightarrow Y\hookrightarrow Z$，且

$$V=\{u\in L^p([0,T];X)\,|\,\partial_t u\in L^r([0,T];Z)\},\quad V_1=\{u\in L^\infty([0,T];X)\,|\,\partial_t u\in L^r([0,T];Z)\},$$

则

$$V\hookrightarrow\hookrightarrow L^p([0,T];Y),\qquad V_1\hookrightarrow\hookrightarrow C([0,T];Y),$$

其中 $r>1$，$1\leqslant p<\infty$.

引理 3[32]　设$(\mathscr{M},d)$是度量空间，$U(t,\tau)$是空间 $\mathscr{M}$ 上的 Lipschitz 连续过程，即存在独立于 m_i,τ,t 的常数 C 和 K，使得 $d(U(t,\tau)m_1,U(t,\tau)m_2)\leqslant C\mathrm{e}^{K(t-\tau)}d(m_1,m_2)$. 如果存在子集 $M_1,M_2,M_3\subset\mathscr{M}$，使得

$$\mathrm{dist}_{\mathscr{M}}(U(t,\tau)M_1,U(t,\tau)M_2)\leqslant L_1\mathrm{e}^{-v_1(t-\tau)},\qquad v_1,L_1>0,$$
$$\mathrm{dist}_{\mathscr{M}}(U(t,\tau)M_2,U(t,\tau)M_3)\leqslant L_2\mathrm{e}^{-v_2(t-\tau)},\qquad v_2,L_2>0,$$

则

$$\mathrm{dist}_{\mathscr{M}}(U(t,\tau)M_1,U(t,\tau)M_3)\leqslant L\mathrm{e}^{-v(t-\tau)},$$

其中 $v=\dfrac{v_1v_2}{K+v_1+v_2}$，且 $L=CL_1+L_2$.

定义 1[26] 设$\{\mathscr{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$为一族赋范线性空间，对于双参数算子族$U(t,\tau)$：$\mathscr{H}_\tau\to\mathscr{H}_t$，$t\geqslant\tau\in\mathbb{R}$，若其满足如下性质：

1) 对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$，$U(\tau,\tau)=\mathrm{Id}$ 是 $\mathscr{H}_\tau$ 上的恒等映射；

2) 对任意的 $t\geqslant s\geqslant\tau$，$\tau\in\mathbb{R}$，有 $U(t,s)U(s,\tau)=U(t,\tau)$.

则称 $U(t,\tau)$是一个过程.

定义 2[26] 如果对每个 $t\in\mathbb{R}$，都存在一个常数 $R>0$，使得 $C_t\subset\{z\in X_t：\|z\|_{X_t}\leqslant R\}=\mathbb{B}_t(R)$，$\forall t\in\mathbb{R}$，则称有界集 $C_t\subset X_t$ 的集合族 $\mathscr{C}=\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$是一致有界的.

定义 3[26,33] 如果一个集族 $\mathscr{B}=\{\mathbb{B}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$为一致有界的，即$\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|\mathbb{B}_t\|_{X_t}=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\sup\limits_{\xi\in B_t}\|\xi\|_{X_t}<+\infty$，且对每个 $R>0$，存在常数 $\tau_e=\tau_e(R)\geqslant0$，使得 $U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R)\subset\mathbb{B}_t(\forall t-\tau\geqslant\tau_e)$，则 $\mathscr{B}=\{\mathbb{B}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 称为时间依赖吸收集.

定义 4[26,33] 若一个集族 $\mathscr{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$满足如下性质：

1) 对任意的 $t\in\mathbb{R}$，每个 A_t 在 X_t 中都是紧的；

2) $\mathscr{A}$是拉回吸引的，即 $\mathscr{A}$是一致有界的，并且对每个一致有界集族 $\mathscr{C}=\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，均有

$$\lim_{\tau\to-\infty}\mathrm{dist}_{X_t}(U(t,\tau)C_\tau,A_t)=0;$$

3)(最小性) 若存在一个集族 $\mathscr{D}=\{D_t\}_{t\in\mathbb{R}}$满足 1)和 2)，有 $A_t\subset D_t$.

则 $\mathscr{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 称为过程$U(t,\tau)$的时间依赖全局吸引子.

引理 4[26,33] 如果过程 $U(t,\tau)$是渐近紧的，即集合 $\mathscr{A}=\{\mathbb{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}：A_t\subset X_t$ 为紧集，$\mathbb{A}$ 是拉回吸引子$\}$非空紧，则时间依赖全局吸引子 $\mathscr{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$存在且唯一.

定义 5[26,34] 设函数 $t\to Z(t)\in X_t$，若下列条件成立：

1) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|Z(t)\|_{X_t}<\infty$；

2) $Z(t)=U(t,\tau)Z(\tau)$，$\forall\tau\leqslant t$，$\tau\in\mathbb{R}$.

则称 $Z(t)$是过程 $U(t,\tau)$的完全有界轨道(CBT).

定义 6[34] 设 $U(t,\tau)$是作用于时间依赖空间 X_τ 的一个过程，对任意的 $t\geqslant\tau$，$U(t,\tau)$：$X_\tau\to X_t$ 是连续的，且有时间依赖全局吸引子 $\mathscr{A}=\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. 如果对所有的 $t\geqslant\tau$，$U(t,\tau)A_\tau=A_t$，则 $\mathscr{A}$是不变的.

引理 5[24,35] 设 $Z(t)$是过程 $U(t,\tau)$的完全有界轨道，如果过程 $U(t,\tau)$的时间依赖全局吸引子 $\mathscr{A}=\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$是不变的，则 $\mathscr{A}=\{Z\,|\,t\to Z(t)\in X_t\}$.

2 主要结果

下面讨论解的适定性和正则性.

引理 6[36] 设

$$\Phi(u,\eta_\tau)=(2+t-\tau)[(t-\tau)\kappa(\tau)\|u\|^2_{L^\infty([\tau,T];\mathscr{H}_\sigma)}]+2\|\eta_\tau\|^2_{\mathscr{M}^\sigma_\tau},$$

则有 $\eta^t\in\mathscr{M}^\sigma_\tau\subset\mathscr{M}^\sigma_t$，其中$\forall t\in[\tau,T]$，$\|\eta^t\|^2_{\mathscr{M}^\sigma_\tau}\leqslant\Phi(u,\eta_\tau)$，并且

$$\|\eta^t\|^2_{\mathscr{M}^\sigma_t}\leqslant\Phi(u,\eta_\tau)K_\tau(t)\in L^1([\tau,T]).$$

引理 7[36] 如果 $\eta_\tau\in D(\mathbb{T}_\tau)$，则对任意的 $t\in[\tau,T]$，$\eta^t\in W^{1,\infty}([\tau,T];\mathscr{M}^\sigma_\tau)$，且$\partial_t\eta^t=\mathbb{T}_\tau\eta^t+u(t)$在空间 $\mathscr{M}^\sigma_\tau$ 上成立.

注 1 由于 $\mathscr{M}^\sigma_\tau\hookrightarrow\mathscr{M}^\sigma_t$，由式(14)知，对任意固定的 t，有$\partial_t\eta^t=\mathbb{T}_t\eta^t+u(t)$在空间 $\mathscr{M}^\sigma_t$ 上成立.

注 2 当 $\eta^t\in D(\mathbb{T}_\tau)$时，由式(12)和引理 7 可知

$$\|\partial_s\eta^t\|^2_{\mathscr{M}^\sigma_t}\leqslant\Psi(u,\eta_\tau)K_\tau(t),\qquad\forall t\in[\tau,T],$$

其中 $\Psi(u,\eta_\tau)=\kappa(\tau)\|u\|^2_{L^\infty([\tau,T];\mathscr{H}_\sigma)}+\|\partial_s\eta_\tau\|^2_{\mathscr{M}^\sigma_\tau}$.

引理 8[36] 记 $I=[\tau,T]$，假设 $u\in C(I;\mathscr{H}_\sigma)$且 $\eta_\tau\in C^1(\mathbb{R}^+,\mathscr{H}_\sigma)\cap D(\mathbb{T}_\tau)$，则对所有的 $\tau\leqslant a\leqslant b\leqslant T$，下列不等式成立：

$$\|\eta^b\|^2_{\mathcal{M}_b^\sigma}-\int_a^b\int_0^\infty[\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s)]\|\eta^t(s)\|^2_\sigma\mathrm{d}s\mathrm{d}t\leqslant\|\eta^a\|^2_{\mathcal{M}_a^\sigma}+2\int_a^b\langle u(t),\eta^t\rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma}\mathrm{d}t.$$

引理 9[36]　对所有的 $\tau\leqslant a\leqslant b\leqslant T$，下列估计成立：

$$\|\eta^b\|^2_{\mathcal{M}_b^\sigma}+\delta\int_a^b\kappa(t)\|\eta^t(s)\|^2_{\mathcal{M}_t^\sigma}\mathrm{d}t\leqslant\|\eta^b\|^2_{\mathcal{M}_b^\sigma}-\int_a^b\int_0^\infty(\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s))\|\eta^t(s)\|^2_\sigma\mathrm{d}s\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\|\eta^a\|^2_{\mathcal{M}_a^\sigma}+2\int_a^b\langle u(t),\eta^t\rangle_{\mathcal{M}_t^\sigma}\mathrm{d}t.$$

定义 7　记 $I=[\tau,T]$. 对任意的 $T>\tau\in\mathbb{R}$，设 $g\in L^2(\Omega)$，且 $z_\tau=(u_\tau,\eta_\tau)\in\mathcal{E}_\tau^1$. 如果：

1) $u(t)\in L^\infty([\tau,T];\mathcal{H}_1)$，$\eta^t\in L^\infty([\tau,T];\mathcal{M}_t^1)$；

2) η^t 满足式(4)；

3) 对任意的 $\phi\in\mathcal{H}_1$ 和 a. e. $t\in I$，有

$$\langle\partial_t u,\phi\rangle+\langle\partial_t u,\phi\rangle_1+\langle a(l(u))u,\phi\rangle_1+\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\eta^t(s),\phi\rangle_1\mathrm{d}s+\langle f(u),\phi\rangle=\langle g,\phi\rangle.$$

则 $z(t)=(u(t),\eta^t)$称为问题(5)-(6)在时间区间 I 上满足初值 $z(\tau)=z_\tau$ 的弱解.

定理 1(适定性和正则性)　记 $I=[\tau,T](\forall T>\tau)$. 假设式(7)～(9)以及条件($H_1$)～($H_4$)成立，$g\in L^2(\Omega)$，则对每个 $T>\tau\in\mathbb{R}$ 和任意给定的初值 $z_\tau\in\mathcal{E}_\tau^1$，$z_\tau$ 满足 $\|z_\tau\|_{\mathcal{E}_\tau^1}\leqslant R$，问题(5)-(6)存在唯一弱解 $z(t)=(u(t),\eta^t)=U(t,\tau)z_\tau$. 对任意固定的 t，有 $\eta^t\in\mathcal{M}_t^1$，则

$$\sup_{t\geqslant\tau}\|z(t)\|^2_{\mathcal{E}_t^1}+\int_\tau^t\kappa(y)\|\eta^y\|^2_{\mathcal{M}_y^1}\mathrm{d}y+\int_\tau^t\|u(y)\|_2^2\mathrm{d}y+\int_\tau^t\|\partial_t u(y)\|^2\mathrm{d}y\leqslant Q,$$

其中 $Q=\max\{Q_1,Q_3,Q_4\}$. 此外，有

$$\|\bar{z}(t)\|^2_{\mathcal{E}_t^1}\leqslant C\mathrm{e}^{C(R,\lambda_1)(t-\tau)}\|\bar{z}(\tau)\|^2_{\mathcal{E}_\tau^1},\qquad t\in[\tau,T],$$

其中 $\bar{z}(t)=z_1(t)-z_2(t)$，且 $z_1(t),z_2(t)$是问题(5)-(6)满足初值 $z_1=(u_{1_\tau},\eta_{1_\tau})$，$z_2=(u_{2_\tau},\eta_{2_\tau})$的弱解.

证明：将方程(5)与 u 做内积，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(t)+2a(l(u))\|u\|_1^2+2\langle u,\eta^t\rangle_{\mathcal{M}_t^1}+2\langle f(u),u\rangle-2\langle g,u\rangle=0,$$

其中 $L(t)=\|u\|^2+\|u\|_1^2$. 利用式(10),(11)，可知

$$-2\langle f(u),u\rangle\leqslant(1-\theta)\|u\|_1^2+4c_f,$$

其中 $0<\theta<1$. 此外，有 $2\langle g,u\rangle\leqslant m\|u\|_1^2+\frac{1}{m\lambda_1}\|g\|^2$. 因此，结合式(3)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(t)+(m-(1-\theta))\|u\|_1^2+2\langle u,\eta^t\rangle_{\mathcal{M}_t^1}\leqslant Q_0,\tag{15}$$

其中 $Q_0=\frac{1}{m\lambda_1}\|g\|^2+4c_f$.

对式(15)在$[\tau,t]$上积分，得

$$L(t)+(m-(1-\theta))\int_\tau^t\|u(y)\|_1^2\mathrm{d}y+2\int_\tau^t\langle u,\eta^y\rangle_{\mathcal{M}_y^1}\mathrm{d}y\leqslant L(\tau)+Q_0(t-\tau),\qquad\forall t\geqslant\tau.$$

根据引理 8，可知

$$L(t)+\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_t^1}+(m-(1-\theta))\int_\tau^t\|u(y)\|_1^2\mathrm{d}y-\int_\tau^t\int_0^\infty(\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s))\|\eta^y(s)\|_1^2\mathrm{d}s\mathrm{d}y\leqslant$$
$$L(\tau)+\|\eta_\tau\|^2_{\mathcal{M}_\tau^1}+Q_0(t-\tau),\quad\forall t\geqslant\tau.$$

显然，有

$$\|z(t)\|^2_{\mathcal{E}_t^1}\leqslant\mathcal{L}(t)=L(t)+\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_t^1}\leqslant\left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right)\|z(t)\|^2_{\mathcal{E}_t^1}.$$

因此，有

$$\mathcal{L}(t)+(m-(1-\theta))\int_\tau^t\|u(y)\|_1^2\mathrm{d}y-\int_\tau^t\int_0^\infty(\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s))\|\eta^y(s)\|_1^2\mathrm{d}s\mathrm{d}y\leqslant$$

$$\mathscr{L}(\tau)+Q_0(t-\tau),\tag{16}$$

即

$$\sup_{t\geqslant\tau}\|z(t)\|_{\mathscr{E}_t^1}^2+\int_\tau^t\|u(y)\|_1^2\mathrm{d}y+\int_\tau^t\kappa(y)\|\eta^y\|_{\mathscr{M}_y^1}^2\mathrm{d}y\leqslant Q_1,\tag{17}$$

其中 $Q_1=C(R,T,\delta,m-(1-\theta),m\lambda_1,\|g\|,c_f)$.

将方程(5)与$\partial_t u$ 做内积，得

$$\|\partial_t u\|^2+\|\partial_t u\|_1^2=a(l(u))\langle\Delta u,\partial_t u\rangle-\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\eta^t(s),\partial_t u\rangle_1\mathrm{d}s-\langle f(u),\partial_t u\rangle+\langle g,\partial_t u\rangle.$$

由式(3)，可得

$$|\langle a(l(u))\Delta u,\partial_t u\rangle|\leqslant M\|u\|_1\|\partial_t u\|_1,$$

由式(7)，可得

$$|\langle f(u),\partial_t u\rangle|\leqslant\|f(u)\|_{L^{(p+1)/p}}\|\partial_t u\|_{L^{p+1}}\leqslant C(1+\|u(t)\|_1^p)\|\partial_t u\|_1,$$

应用 Poincaré 不等式得$\langle g,\partial_t u\rangle\leqslant\dfrac{1}{\lambda_1^{1/2}}\|g\|\|\partial_t u\|_1$. 此外，由条件$(\mathrm{H}_2)$得

$$\begin{aligned}\left|-\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\eta^t(s),\partial_t u\rangle_1\mathrm{d}s\right|\leqslant{}&\|\partial_t u\|_1\int_0^\infty\mu_t(s)\|\eta^t(s)\|_1\mathrm{d}s\leqslant\\&\|\partial_t u\|_1\left(\int_0^\infty\mu_t(s)\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty\mu_t(s)\|\eta^t(s)\|_1^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\leqslant\\&\|\partial_t u\|_1\sqrt{\kappa(t)}\|\eta^t\|_{\mathscr{M}_t^1}.\end{aligned}$$

因此，结合式(3)得

$$\begin{aligned}\|\partial_t u\|_1^2\leqslant{}&C\left(M\|u(t)\|_1+1+\|u(t)\|_1^p+\sqrt{\kappa(t)}\|\eta^t\|_{\mathscr{M}_t^1}+\frac{1}{\lambda_1^{1/2}}\|g\|\right)\|\partial_t u\|_1\leqslant\\&\frac{1}{2}\|\partial_t u\|_1^2+C(R,T,M,c_f,\lambda_1^{1/2},\|g\|,\theta,\delta)(1+\kappa(t)\|\eta^t\|_{\mathscr{M}_t^1}^2+\|u\|_1^2+\|u(t)\|_1^p)=\\&\frac{1}{2}\|\partial_t u\|_1^2+Q_2(1+\kappa(t)\|\eta^t\|_{\mathscr{M}_t^1}^2+\|u\|_1^2+\|u(t)\|_1^p),\quad\forall t\in[\tau,T].\end{aligned}\tag{18}$$

从而

$$\int_\tau^t\|\partial_t u(y)\|^2\mathrm{d}y\leqslant 2Q_2\left((1+\|u\|_1^2+\|u(t)\|_1^p)(t-\tau)+\int_\tau^t\kappa(y)\|\eta^y\|_{\mathscr{M}_y^1}^2\mathrm{d}y\right)\leqslant Q_3.\tag{19}$$

将方程(5)与 Au 做内积，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_1(t)+2a(l(u))\|u\|_2^2+2\langle u,\eta^t\rangle_{\mathscr{M}_t^2}+2\langle f(u),Au\rangle-2\langle g,Au\rangle=0,\tag{20}$$

其中 $L_1(t)=\|u\|_1^2+\|u\|_2^2$. 由式(8)知

$$-2\langle f(u),Au\rangle=-2\int_\Omega f'(u)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant 2C_1\|u\|_1^2\leqslant C\|u\|_1^2,$$

且

$$2\langle g,Au\rangle\leqslant 2\|g\|\|u\|_2\leqslant\frac{1}{m}\|g\|^2+m\|u\|_2^2.$$

因此，结合式(3)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_1(t)+m\|u\|_2^2+2\langle u,\eta^t\rangle_{\mathscr{M}_t^2}\leqslant C\|u\|_1^2+\frac{1}{m}\|g\|^2.\tag{21}$$

对式(21)在$[\tau,t]$上积分，得

$$L_1(t)+m\int_\tau^t\|u(y)\|_2^2\mathrm{d}y+2\int_\tau^t\langle u,\eta^y\rangle_{\mathscr{M}_y^2}\mathrm{d}y\leqslant L_1(\tau)+C\int_\tau^t\|u(y)\|_1^2\mathrm{d}y+\frac{1}{m}\|g\|^2(t-\tau).$$

根据引理 9，可知

$$L_1(t)+m\int_\tau^t\|u(y)\|_2^2\mathrm{d}y+\|\eta^t\|_{\mathscr{M}_t^2}^2+\delta\int_\tau^t\kappa(y)\|\eta^y\|_{\mathscr{M}_y^2}^2\mathrm{d}y\leqslant$$

$$L_1(\tau)+\|\eta_\tau\|^2_{\mathcal{M}^2_\tau}+C\int_\tau^t\|u(y)\|_1^2\mathrm{d}y+\frac{1}{m}\|g\|^2(t-\tau),\quad \forall t\geqslant\tau.$$

显然，

$$\|z(t)\|^2_{\mathcal{E}^2_t}\leqslant\mathcal{L}_1(t)=L_1(t)+\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}^2_t}\leqslant\left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right)\|z(t)\|^2_{\mathcal{E}^2_t}.$$

故

$$\mathcal{L}_1(t)+m\int_\tau^t\|u\|_2^2\mathrm{d}y+\delta\int_\tau^t\kappa(y)\|\eta^y\|^2_{\mathcal{M}^2_y}\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\mathcal{L}_1(\tau)+C\int_\tau^t\|u(y)\|_1^2\mathrm{d}y+\frac{1}{m}\|g\|^2(t-\tau),\quad\forall t\geqslant\tau.$$

应用 Gronwall 不等式，得

$$\sup_{t\geqslant\tau}\|z(t)\|^2_{\mathcal{E}^2_t}+\int_\tau^t\|u\|_2^2\mathrm{d}y+\int_\tau^t\kappa(y)\|\eta^y\|^2_{\mathcal{M}^2_y}\mathrm{d}y\leqslant$$
$$C(\|z(\tau)\|_{\mathcal{E}^2_\tau},T,\theta,m,\delta,\|g\|,\lambda_1,c_f):=Q_4.\tag{22}$$

假设 $\mathcal{H}_1$ 的正交基$\{w_j\}_{j=1}^\infty$，且 $Aw_j=\lambda_jw_j(j=1,2,\cdots)$．设$\{\zeta_j\}_{j=1}^\infty$是 $L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1)$上的正交基，且 $A\zeta_j=\lambda_j\zeta_j(j=1,2,\cdots)$．对每个 $n\in\mathbb{N}$，存在有限维子空间：

$$H_n=\operatorname{span}\{w_1,\cdots,w_n\}\subset\mathcal{H}_1,\qquad M_n=\operatorname{span}\{\zeta_1,\cdots,\zeta_n\}\subset L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1).$$

定义 $P_n:\mathcal{H}_1\to H_n$ 为 H_n 上的正交投影，$Q_n:L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1)\to M_n$ 为 M_n 上的正交投影．

设 $z_\tau=(u_\tau,\eta_\tau)$是满足序列$\{z_{\tau_n}=(u_{\tau_n},\eta_{\tau_n})\}\subset\mathcal{E}^2_t$ 的初值，其中 $u_{\tau_n}=P_nu_\tau\to u_\tau$ 于 $\mathcal{H}_1$，$\eta_{\tau_n}=Q_n\eta_\tau\to\eta_\tau$ 于 $\mathcal{M}^1_t$．对每个 $n\in\mathbb{N}$，设 $z_n(t)=(u_n,\eta^t_n)$为问题(5)-(6)的近似解，其中 $u_n=\sum_{j=1}^nT^n_j(t)w_j$，$T^n_j\in C^1([\tau,T])$，并且 $\eta^t_n=\sum_{j=1}^n\Lambda^n_j(t)\zeta_j$，$\Lambda^n_j\in C^1([\tau,T])$．则对任意的 $\phi\in H_n$ 和每个 $t\in[\tau,T]$，$z_n(t)=(u_n,\eta^t_n)$满足：

$$\langle\partial_tu_n,\phi\rangle+\langle\partial_tu_n,\phi\rangle_1+\langle a(l(u_n))u_n,\phi\rangle_1+\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\eta^t_n(s),\phi\rangle_1\mathrm{d}s+\langle f(u_n),\phi\rangle=\langle g,\phi\rangle,\tag{23}$$

并且

$$\eta^t_n(s)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^su_n(t-y)\mathrm{d}y, & 0\leqslant s\leqslant t-\tau,\\ \displaystyle\eta_{\tau_n}(s-t+\tau)+\int_0^{t-\tau}u_n(t-y)\mathrm{d}y, & s>t-\tau.\end{cases}\tag{24}$$

假设 $\phi\in H_m$ 是固定的，则对于每个 $n\geqslant m$，式(23)成立．将式(23)乘以 $\psi\in C_0^\infty([\tau,T])$并在$[\tau,T]$上积分，得

$$\int_\tau^T\psi\Big(\langle\partial_tu_n,\phi\rangle+\langle\partial_tu_n,\phi\rangle_1+\langle al(u_n)u_n,\phi\rangle_1+$$
$$\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\eta^t_n(s),\phi\rangle_1\mathrm{d}s+\langle f(u_n),\phi\rangle-\langle g,\phi\rangle\Big)\mathrm{d}y=0.\tag{25}$$

对于序列$\{z_n\}$，式(17)，(19)，(22)成立，则有如下结果：∂_tu_n 在 $L^2([\tau,T];\mathcal{H}_1)$上有界，$u_n$ 在 $L^\infty([\tau,T];\mathcal{H}_2)$上有界，$u_n$ 在 $L^2([\tau,T];\mathcal{H}_2)$上有界，$\eta^t_n$ 在 $L^\infty([\tau,T];\mathcal{M}^2_t)$上有界，$a(l(u_n))\Delta u_n$ 在 $L^2([\tau,T];\mathcal{H}_2)$上有界．由于$\|f(u_n)\|L^{1+1/p}\leqslant C(1+\|u_n\|_1^p)\leqslant C$，可知 $f(u_n)$在 $L^{1+1/p}(\Omega)$上有界．

利用 Galerkin 逼近方法可知，存在 $z=(u,\eta^t)\in L^\infty([\tau,T];\mathcal{E}^2_t)$，使得$\partial_tu_n\to\partial_tu$ 在 $L^2([\tau,T];\mathcal{H}_1)$上弱收敛，$u_n\to u$ 在 $L^\infty([\tau,T];\mathcal{H}_2)$上弱 * 收敛，$u_n\to u$ 在 $L^2([\tau,T];\mathcal{H}_2)$上弱收敛，$\eta^t_n\to q^t$ 在 $L^\infty([\tau,T];\mathcal{M}^2_t)$上弱 * 收敛，$a(l(u_n))\Delta u_n\to a(l(u))u$ 在 $L^2([\tau,T];\mathcal{H})$上弱收敛，$f(u_n)\to f(u)$在 $L^{1+1/p}(\Omega)$上弱收敛．

由引理 2 知

$$u_n\to u\text{ 在 }C([\tau,T];\mathcal{H}_1)\text{ 上强收敛，}\tag{26}$$

并且 $u_n\to u$ 在$[\tau,T]\times\Omega$ 上 a. e. 成立．由 f 的连续性知 $f(u_n)\to f(u)$在$[\tau,T]\times\Omega$ 上 a. e. 成立．由

$\phi\in H_n\subset\mathscr{H}_1$ 可得 $\phi\in P_nL^{p+1}(\Omega)$. 因此由式(26), 有 $\langle f(u_n)-f(u),\phi\rangle\to 0$. 因为 $f(u_n)$ 和 $f(u)$ 在 $L^{1+1/p}(\Omega)$ 上有界, 故应用控制收敛定理, 有 $\int_\tau^T\psi\langle f(u_n)-f(u),\phi\rangle\mathrm{d}y\to 0$. 又因为

$$\begin{aligned}\|a(l(u_n))\Delta u_n-a(l(u))\Delta u\|\leqslant&\|a(l(u_n))\Delta u_n-a(l(u))\Delta u_n\|+\|a(l(u))\Delta u_n-a(l(u))\Delta u\|\leqslant\\&L_a(R)|l(u_n)-l(u)|+a(l(u))\|\Delta u_n-\Delta u\|=\\&L_a(R)\left(\int_\Omega|l(x)|\,\|u_n-u\|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}+\\&a(l(u))\left(\int_\Omega\|\Delta u_n-\Delta u\|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2},\quad \text{a. e. } t\in[\tau,T],\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\langle a(l(u_n))\Delta u_n-a(l(u))\Delta u,\phi\rangle\leqslant&\langle a(l(u_n))\Delta u_n-a(l(u))\Delta u_n,\phi\rangle+\langle a(l(u))\Delta u_n-a(l(u))\Delta u,\phi\rangle\leqslant\\&L_a(R)\int_\Omega|l(u_n)-l(u)|\phi\mathrm{d}s+a(l(u))\int_\Omega(\nabla u_n-\nabla u)\nabla\phi\mathrm{d}x=\\&L_a(R)\int_\Omega|l(x)|\,|u_n-u|\phi\mathrm{d}s+a(l(u))\int_\Omega(\nabla u_n-\nabla u)\nabla\phi\mathrm{d}x\leqslant\\&L_a(R)\left(\int_\Omega|l(x)|^2\phi^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int|u_n-n|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}+\\&M\left(\int_\Omega|\nabla u_n-\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_\Omega|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\to 0,\quad \text{a. e. } t\in[\tau,T].\end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\tau^T\psi\langle a(l(u_n))\Delta u_n,\phi\rangle\mathrm{d}y=0,\qquad \text{a. e. } t\in[\tau,T].$$

设 $\bar\eta_n^t=\eta_n^t-\eta^t$, $\bar u_n=u_n-u$, $\bar\eta_{\tau_n}=\eta_{\tau_n}-\eta_\tau$, $\bar u_{\tau_n}=u_{\tau_n}-u_\tau$. 结合条件($\mathrm{H}_2$)并利用

$$\bar\eta_n^t(s)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^s\bar u_n(t-\zeta)\mathrm{d}\zeta, & 0<s\leqslant t-\tau,\\ \displaystyle\bar\eta_{\tau_n}(s-t+\tau)+\int_0^{t-\tau}\bar u_n(t-\zeta)\mathrm{d}\zeta, & s>t-\tau\end{cases}$$

可得

$$\begin{aligned}\|\bar\eta_n^t\|_{\mathscr{M}_t^1}^2\leqslant K_\tau(t)\|\bar\eta_n^t\|_{\mathscr{M}_\tau^1}^2=&C(T)\left(\int_0^{t-\tau}\mu_\tau(s)\left\|\int_0^s\bar u_n(t-\zeta)\mathrm{d}\zeta\right\|_1^2\mathrm{d}s+\right.\\&\left.\int_{t-\tau}^\infty\mu_\tau(s)\left\|\bar\eta_{\tau_n}(s-t+\tau)+\int_0^{t-\tau}\bar u_n(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right\|_1^2\mathrm{d}s\right)\leqslant\\&C(T)\left(2(T-\tau)\|\bar u_n\|_{C([\tau,T];\mathscr{H}_1)}^2\int_0^\infty\mu_\tau(s)\mathrm{d}s+2\int_0^\infty\mu_\tau(s+t-\tau)\|\bar\eta_{\tau_n}(s)\|_1^2\mathrm{d}s+\right.\\&\left.(T-\tau)^2\|\bar u_n\|_{C([\tau,T];\mathscr{H}_1)}^2\int_0^\infty\mu_\tau(s)\mathrm{d}s\right)\leqslant\\&C(T)((2+T-\tau)(T-\tau)\|\bar u_n\|_{C([\tau,T];\mathscr{H}_1)}^2\kappa(\tau)+2\|\bar\eta_{\tau_n}\|_{\mathscr{M}_\tau^1}^2)\to 0,\quad\forall t\in[\tau,T].\end{aligned}$$

根据极限的唯一性知 $q^t=\eta^t$.

利用条件(H_2)显然可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\bar\eta_n^t(s),\phi\rangle_1\mathrm{d}s=&\int_0^{t-\tau}\mu_t(s)\left\langle\int_0^s\bar u_n(t-\zeta)\mathrm{d}\zeta,\phi\right\rangle_1\mathrm{d}s+\\&\int_{t-\tau}^\infty\mu_t(s)\langle\bar\eta_{\tau_n}(s-t+\tau),\phi\rangle_1\mathrm{d}s+\int_{t-\tau}^\infty\mu_t(s)\left\langle\int_0^{t-\tau}\bar u_n(\zeta)\mathrm{d}\zeta,\phi\right\rangle_1\mathrm{d}s=\\&\int_0^{t-\tau}\mu_t(s)\int_0^s\langle\bar u_n(t-\zeta),\phi\rangle_1\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s+\\&\int_0^\infty\mu_t(s+t-\tau)\langle\bar\eta_{\tau_n}(s),\phi\rangle_1\mathrm{d}s+\int_{t-\tau}^\infty\mu_t(s)\int_\tau^t\langle\bar u_n(\zeta),\phi\rangle_1\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s\leqslant\\&\|\bar u_n\|_{C([\tau,T];\mathscr{H}_1)}\|\phi\|_1(T-\tau)K_\tau(t)\kappa(\tau)+\|\phi\|_1K_\tau(t)\sqrt{\kappa(\tau)}\,\|\bar\eta_{\tau_n}\|_{\mathscr{M}_\tau^1}+\end{aligned}$$

$$\|\bar{u}_n\|_{C([\tau,T];\mathscr{H}_1)}\|\phi\|_1(T-\tau)K_\tau(t)\kappa(\tau)\to 0,\quad \text{a.e. } t\in[\tau,T].$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \mu_t(s)\langle\bar{\eta}_n^t(s),\phi\rangle_1\mathrm{d}s=0,\qquad \text{a.e. } t\in(\tau,T].$$

又因为

$$\left|\int_0^\infty \mu_t(s)\langle\bar{\eta}_n^t(s),\phi\rangle_1\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_0^\infty \mu_t(s)\|\bar{\eta}_n^t(s)\|_1\|\phi\|_1\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\|\phi\|_1\sqrt{K_\tau(t)\kappa(\tau)}\|\bar{\eta}_n^t\|_{\mathscr{M}_t^1}\in L^1([\tau,T]),$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\tau^T\psi\int_0^\infty\mu_y(s)\langle\bar{\eta}_n^y(s),\phi\rangle_1\mathrm{d}s\mathrm{d}y=0.$$

因此，$z=(u,\eta^t)$为问题(5)-(6)的弱解.

下面证明弱解关于初值的连续依赖性. 设 $z_1=(u_1(t),\eta_1^t)$，$z_2=(u_2(t),\eta_2^t)$为问题(5)-(6)的两个弱解，则 $\bar{z}(t)=(\bar{u}(t),\bar{\eta}^t)=z_1(t)-z_2(t)$满足

$$\partial_t\bar{u}+A\partial_t\bar{u}+a(l(u_1))A\bar{u}+(a(l(u_1))-a(l(u_2)))Au_2+$$
$$\int_0^\infty\mu_t(s)A\bar{\eta}^t(s)\mathrm{d}s=-f(u_1)+f(u_2),\tag{27}$$

其中

$$\bar{\eta}^t(s)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^s\bar{u}(t-r)\mathrm{d}r, & 0<s\leqslant t-\tau,\\ \displaystyle\bar{\eta}_\tau(s-t+\tau)+\int_0^{t-\tau}\bar{u}(t-r)\mathrm{d}r, & s>t-\tau.\end{cases}\tag{28}$$

将方程(27)与 $\bar{u}$ 做内积，得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)+2\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\bar{\eta}^t(s),\bar{u}(t)\rangle_1\mathrm{d}s\leqslant-2m\|\bar{u}\|_1^2+2L_a(R)\|l\|\,\|\bar{u}\|\,\|u_2\|_1\|\bar{u}\|_1+\\&\quad 2\langle f(u_1)-f(u_2),\bar{u}(t)\rangle\leqslant\\&\quad -2m\lambda_1\|\bar{u}\|^2+\frac{2}{\sqrt{\lambda_1}}L_a(R)\|l\|\,\|\bar{u}\|_1^2\|u_2\|_1+\\&\quad C(1+\|u_1\|_{L^{p+1}}^{p-1}+\|u_2\|_{L^{p+1}}^{p-1})\|\bar{u}\|_{L^{p+1}}^2\leqslant\\&\quad -2m\lambda_1\|\bar{u}\|^2+\frac{2}{\sqrt{\lambda_1}}L_a(R)\|l\|\,\|\bar{u}\|_1^2\|u_2\|_1+C(1+\|u_1\|_1^{p-1}+\|u_2\|_1^{p-1})\|\bar{u}\|_1^2\leqslant\\&\quad C(R,\lambda_1,\sqrt{\lambda_1},m)F(t),\quad t\in[\tau,T],\end{aligned}\tag{29}$$

其中 $F(t)=\|\bar{u}\|^2+\|\bar{u}\|_1^2$. 对式(29)在$[\tau,t]$上积分，得

$$F(t)+2\int_\tau^t\langle\bar{u}(y),\bar{\eta}^y\rangle_{\mathscr{M}_y^1}\mathrm{d}y\leqslant F(\tau)+C(R,\lambda_1,m)\int_\tau^tF(y)\mathrm{d}y,\qquad t\in[\tau,T].\tag{30}$$

由引理 9 可知

$$\|\bar{\eta}^t\|_{\mathscr{M}_t^1}^2+\delta\int_\tau^t\kappa(y)\|\bar{\eta}^y(s)\|_{\mathscr{M}_y^1}^2\mathrm{d}y\leqslant\|\bar{\eta}_\tau\|_{\mathscr{M}_\tau^1}^2+2\int_\tau^t\langle\bar{u},\bar{\eta}^y\rangle_{\mathscr{M}_y^1}\mathrm{d}y.\tag{31}$$

设 $\mathscr{F}(t)=F(t)+\|\bar{\eta}^t\|_{\mathscr{M}_t^1}^2$，则有 $\|\bar{z}(t)\|_{\mathscr{E}_t^1}^2\leqslant\mathscr{F}(t)\leqslant C\|\bar{z}(t)\|_{\mathscr{E}_t^1}^2$. 结合式(30)，(31)，得 $\mathscr{F}(t)\leqslant\mathscr{F}(\tau)+C(R,\lambda_1,m,\delta)\int_\tau^t\mathscr{F}(y)\mathrm{d}y$. 应用 Gronwall 不等式，得

$$\|\bar{z}(t)\|_{\mathscr{E}_t^1}^2\leqslant C\mathrm{e}^{C(R,\lambda_1,m,\delta)(t-\tau)}\|\bar{z}(\tau)\|_{\mathscr{E}_\tau^1}^2,\qquad t\in[\tau,T].$$

综上，问题(5)-(6)弱解 $z=(u,\eta^t)$的唯一性得证. 证毕.

根据定理 1，可定义问题(5)-(6)在 $\mathscr{E}_t^1$ 上的解过程，即

$$U(t,\tau):\mathscr{E}_\tau^1\to\mathscr{E}_t^1,\quad U(t,\tau)z_\tau=z(t),\quad\forall z_\tau\in\mathscr{E}_\tau^1,\quad t\geqslant\tau,\tag{32}$$

且$\{U(t,\tau)\}$为作用于 $\mathscr{E}_t^1$ 上的过程族.

3 时间依赖吸引子

3.1 时间依赖吸收集的存在性

定理2(**耗散性**) 假设条件(7)～(9)和(H_1)～(H_4)成立，$g\in L^2(\Omega)$. $U(t,\tau)(t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbb{R})$是式(32)定义的解过程，则对任意的初值$z(\tau)\in\mathbb{B}_\tau(R)\subset\mathcal{E}_\tau^1$，存在$\epsilon>0$，$R_0>0$，使得过程$U(t,\tau)$存在时间依赖吸收集，即族$\mathscr{B}_t=\{\mathbb{B}_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

证明：应用Poincaré不等式和条件(H_4)，并根据式(15)可得

$$\mathscr{L}(t)+\frac{m-(1-\theta)}{2}\int_\tau^t\|u(y)\|_1^2\mathrm{d}y+\frac{m-(1-\theta)\lambda_1}{2}\int_\tau^t\|u(y)\|^2\mathrm{d}y+\delta\int_\tau^t\kappa(y)\|\eta^y\|_{\mathcal{M}_y^1}^2\mathrm{d}y\leqslant\mathscr{L}(\tau)+Q_0(t-\tau),$$

即

$$\mathscr{L}(t)+2\epsilon\int_\tau^t\mathscr{L}(y)\mathrm{d}y\leqslant\mathscr{L}(\tau)+\epsilon\int_\tau^t\mathscr{L}(y)\mathrm{d}y+Q_0(t-\tau),$$

其中$\epsilon=\min\left\{\frac{m-(1-\theta)}{2},\frac{m-(1-\theta)\lambda_1}{2},\delta\inf\limits_{y\in[\tau,t]}\kappa(y)\right\}$. 应用积分型Gronwall不等式得

$$\mathscr{L}(t)\leqslant\mathscr{L}(\tau)\mathrm{e}^{-\epsilon(t-\tau)}+\frac{Q_0\mathrm{e}^{\epsilon}}{1-\mathrm{e}^{-\epsilon}}.$$

此外，有

$$\|z(t)\|_{\mathcal{E}_t^1}^2\leqslant\mathscr{L}(t)\leqslant\left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right)\|z(\tau)\|_{\mathcal{E}_\tau^1}^2\mathrm{e}^{-\epsilon(t-\tau)}+\frac{R_0}{2},$$

这里$R_0=\dfrac{2Q_0\mathrm{e}^{\epsilon}}{1-\mathrm{e}^{-\epsilon}}$. 对于每个$R>0$，存在$t_0=t_0(R)=\dfrac{1}{\epsilon}\ln\dfrac{2(1+1/\lambda_1)R}{R_0}\leqslant t$以及$R_0>0$，使得

$$\tau\leqslant t-t_0\Rightarrow U(t,\tau)\,\mathbb{B}_\tau(R)\subset\mathbb{B}_t(R_0).$$

证毕.

3.2 时间依赖吸引子的存在性

为得到解过程的渐近紧性，需对非线性项f利用分解技巧，使得

$$f(s)=f_1(s)+f_2(s),$$

这里$f_1,f_2\in C^1(\mathbb{R})$，并且满足以下条件：

$$|f_1'(u)|\leqslant C(1+|u|^{p-1}),\quad\forall u\in\mathbb{R},\quad 1\leqslant p\leqslant 2,\tag{33}$$

$$f_1(u)u\geqslant 0,\quad\forall u\in\mathbb{R},\tag{34}$$

$$|f_2'(u)|\leqslant C(1+|u|^{\gamma}),\quad\forall u\in\mathbb{R},\quad 1\leqslant\gamma\leqslant 2,\tag{35}$$

$$\liminf_{|u|\to\infty}f_2'(u)>-\lambda_1.\tag{36}$$

定理2表明过程$U(t,\tau)$有时间依赖吸收集$\mathscr{B}=\{\mathbb{B}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. 对任意的$z_\tau=(u_\tau,\eta_\tau)\in\mathbb{B}_\tau$，方程(5)-(6)的解$U(t,\tau)z_\tau$分解为

$$U(t,\tau)z_\tau=U_0(t,\tau)z_\tau+U_1(t,\tau)z_\tau,$$

其中$U_0(t,\tau)z_\tau=z_1(t)$，$U_1(t,\tau)z_\tau=z_2(t)$. 即$z(t)=(u(t),\eta^t)=z_1(t)+z_2(t)$，则

$$u(t)=v(t)+w(t),\quad\eta^t=\xi^t+\zeta^t,\quad z_1(t)=(v(t),\xi^t),\quad z_2(t)=(w(t),\zeta^t),$$

且$z_1(t)$满足：

$$\begin{cases}\partial_t v+A\partial_t v+a(l(u))Av+\int_0^\infty\mu_t(s)A\xi^t(s)\mathrm{d}s+f_1(v)=0,\\ \partial_t\xi^t+\partial_s\xi^t=v(t),\\ v(x,t)|_{\partial\Omega}=0,\quad v(x,\tau)=u_\tau(x,t),\\ \xi^t(x,s)|_{\partial\Omega}=0,\quad \xi^\tau(x,s)=\eta_\tau(x,s),\end{cases}\tag{37}$$

$$\xi^t(s)=\begin{cases}\int_0^s v(t-r)\mathrm{d}r,& 0<s\leqslant t-\tau,\\ \xi_\tau(s-t+\tau)+\int_0^{t-\tau}v(t-r)\mathrm{d}r,& s>t-\tau;\end{cases}$$

$z_2(t)$满足：

$$\begin{cases}\partial_t w + A\partial_t w + a(l(u))Aw + \int_0^\infty \mu_t(s)A\zeta^t(s)\mathrm{d}s + f(u) - f_1(v) = g,\\ \partial_t\zeta^t + \partial_s\zeta^t = w(t),\\ w(x,t)|_{\partial\Omega}=0, \quad w(x,\tau)=0,\\ \zeta^t(x,s)|_{\partial\Omega}=0, \quad \zeta^\tau(x,s)=0,\end{cases} \tag{38}$$

$$\zeta^t(s)=\begin{cases}\int_0^s w(t-r)\mathrm{d}r, & 0<s\leqslant t-\tau,\\ \int_0^{t-\tau} w(t-r)\mathrm{d}r, & s>t-\tau.\end{cases}$$

引理 10　设式(33),(34)以及条件$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_4)$成立，$g\in L^2(\Omega)$. 则方程(37)满足

$$\|U_0(t,\tau)z_\tau\|^2_{\mathscr{E}_t^1}\leqslant C(R)\mathrm{e}^{-c_1(t-\tau)}, \qquad \forall t\geqslant\tau. \tag{39}$$

证明：将方程(37)与v做内积，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t)+2a(l(u))\|v\|_1^2+2\langle v,\xi^t\rangle_{\mathscr{M}_t^1}+2\langle f_1(v),v\rangle=0, \tag{40}$$

其中$N(t)=\|v\|^2+\|v\|_1^2$. 由式(34)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t)+2m\|v\|_1^2+2\langle v,\xi^t\rangle_{\mathscr{M}_t^1}\leqslant 0. \tag{41}$$

对式(41)在$[\tau,t]$上积分，有

$$N(t)+2m\int_\tau^t\|v(y)\|_1^2\mathrm{d}y+2\int_\tau^t\langle v,\xi^y\rangle_{\mathscr{M}_y^1}\mathrm{d}y\leqslant N(\tau), \qquad \forall t\geqslant\tau.$$

根据引理 9，得

$$N(t)+\|\xi^t\|^2_{\mathscr{M}_t^1}+2m\int_\tau^t\|v(y)\|_1^2\mathrm{d}y+\delta\int_\tau^t\kappa(y)\|\xi^y(s)\|^2_{\mathscr{M}_y^1}\mathrm{d}y\leqslant N(\tau)+\|\xi_\tau\|^2_{\mathscr{M}_\tau^1}, \qquad \forall t\geqslant\tau.$$

显然有

$$\|z_1(t)\|^2_{\mathscr{E}_t^1}\leqslant\mathscr{N}(t)=N(t)+\|\xi^t\|^2_{\mathscr{M}_t^1}\leqslant\left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right)\|z_1(t)\|^2_{\mathscr{E}_t^1}.$$

因此，

$$\mathscr{N}(t)+2m\int_\tau^t\|v(y)\|_1^2\mathrm{d}y+\delta\int_\tau^t\kappa(y)\|\xi^y(s)\|^2_{\mathscr{M}_y^1}\mathrm{d}y\leqslant\mathscr{N}(\tau),$$

即

$$\mathscr{N}(t)+2c_1\int_\tau^t\mathscr{N}(y)\mathrm{d}y\leqslant\mathscr{N}(\tau)+c_1\int_\tau^t\mathscr{N}(y)\mathrm{d}y,$$

其中$c_1=\min\{m,\lambda_1,\delta\inf\limits_{y\in[\tau,t]}\kappa(y)\}$.

利用积分型 Gronwall 不等式得$\mathscr{N}(t)\leqslant\mathscr{N}(\tau)\mathrm{e}^{-c_1(t-\tau)}$. 进一步，有

$$\|z_1(t)\|^2_{\mathscr{E}_t^1}\leqslant\mathscr{N}(t)\leqslant\left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right)\|z_1(\tau)\|^2_{\mathscr{E}_\tau^1}\mathrm{e}^{-c_1(t-\tau)}\leqslant C(R)\mathrm{e}^{-c_1(t-\tau)},$$

其中$\|z(\tau)\|^2_{\mathscr{E}_\tau^1}\leqslant R$. 证毕.

引理 11　设式(7)～(9),(33)～(36)以及条件$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_4)$成立，$g\in L^2(\Omega)$. 则对每个$T>0$和任意初值$z_\tau\in\mathscr{E}_\tau^1$，存在正常数$P=P(\|g\|,\|z_\tau\|_{\mathscr{E}_\tau^1},\lambda_1,T)$，使得方程(38)的解满足

$$\|U_1(T+\tau,\tau)z_\tau\|^2_{\mathscr{E}_{T+\tau}^{4/3}}=\|z_2(T+\tau)\|^2_{\mathscr{E}_{T+\tau}^{4/3}}\leqslant P. \tag{42}$$

证明：将方程(38)与$A^{1/3}w$做内积，得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J(t)+2a(l(u))\|w(t)\|^2_{4/3}+2\langle\zeta^t,w(t)\rangle_{\mathscr{M}_t^{4/3}}=\\&\quad 2\langle g,A^{1/3}w\rangle-2\langle f_2(v),A^{1/3}w\rangle-2\langle f(u)-f(v),A^{1/3}w\rangle,\end{aligned} \tag{43}$$

其中$J(t)=\|w(t)\|^2_{1/3}+\|w(t)\|^2_{4/3}$. 由式(7),(35)，得

$$
\begin{aligned}
-2\langle f_2(v),A^{1/3}w\rangle \leqslant\ & C\int_\Omega (1+|v|^2)|A^{1/3}w|\,\mathrm{d}x \leqslant \\
& C\left(\int_\Omega (1+|v|^{18\gamma/13})\,\mathrm{d}x\right)^{13/18}\left(\int_\Omega |A^{1/3}w|^{18/5}\,\mathrm{d}x\right)^{5/18} \leqslant \\
& C(1+\|v\|_{L^6}^{\gamma})\|A^{1/3}w\|_{L^{18/5}} \leqslant \\
& C(R)\|w\|_{4/3} \leqslant \frac{3m}{4}\|w\|_{4/3}^2 + C,
\end{aligned}
\tag{44}
$$

且

$$
\begin{aligned}
-2\langle f(u)-f(v),A^{1/3}w\rangle \leqslant\ & C\int_\Omega (1+|u|^{p-1}+|v|^{p-1})|w||A^{1/3}w|\,\mathrm{d}x \leqslant \\
& C(\|u\|_{L^{3(p-1)/2}}^{p-1}+\|v\|_{L^{3(p-1)/2}}^{p-1})\|w\|_{L^{18}}\|A^{1/3}w\|_{L^{18/5}} \leqslant \\
& C(\|u\|_1^2+\|v\|_1^2)\|w\|_{L^{18}}\|A^{1/3}w\|_{L^{18/5}} \leqslant C_0\|w\|_{4/3}^2,
\end{aligned}
\tag{45}
$$

其中 $C_0=C_0(Q_1)$，并使用了嵌入 $\mathscr{H}_{4/3}\hookrightarrow L^{18}$，$\mathscr{H}_{2/3}\hookrightarrow L^{18/5}$ 以及 $\mathscr{H}_1\hookrightarrow L^6\hookrightarrow L^3$.

此外，有

$$
2|\langle g,A^{1/3}w\rangle| \leqslant \frac{3m}{4}\|w\|_{4/3}^2 + \frac{4}{3m}\frac{\|g\|^2}{\lambda_1^{4/3}}. \tag{46}
$$

将式(44)～(46)代入式(43)，有

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J(t)+2\langle\zeta^t,w(t)\rangle_{\mathscr{M}_t^{4/3}} \leqslant \left(C_0+\frac{m}{2}\right)\|w(t)\|_{4/3}^2 + C. \tag{47}
$$

对式(47)在$[\tau,T+\tau]$上积分，得

$$
J(T+\tau)+2\int_\tau^{T+\tau}\langle\zeta^y,w(y)\rangle_{\mathscr{M}_y^{4/3}}\,\mathrm{d}y \leqslant J(\tau)+\left(C_0+\frac{m}{2}\right)\int_\tau^{T+\tau}\|w(y)\|_{4/3}^2\,\mathrm{d}y + CT.
$$

设 $\mathscr{J}(t)=\|w(t)\|_{1/3}^2+\|w(t)\|_{4/3}^2+\|\zeta^t\|_{\mathscr{M}_t^{4/3}}^2$，利用引理 9，可得

$$
\mathscr{J}(T+\tau)+\delta\int_\tau^{T+\tau}\kappa(y)\|\zeta^y(s)\|_{\mathscr{M}_y^{4/3}}^2\,\mathrm{d}y \leqslant \mathscr{J}(\tau)+\left(C_0+\frac{m}{2}\right)\int_\tau^{T+\tau}\|w(y)\|_{4/3}^2\,\mathrm{d}y + CT.
$$

故

$$
\mathscr{J}(T+\tau) \leqslant \mathscr{J}(\tau)+C_2\int_\tau^{T+\tau}\mathscr{J}(y)\,\mathrm{d}y + CT.
$$

根据 Gronwall 不等式，有

$$
\mathscr{J}(T+\tau) \leqslant \mathrm{e}^{C_2T}(\mathscr{J}(\tau)+CT) = CT\,\mathrm{e}^{C_2T}.
$$

从而得

$$
\|z_2(T+\tau)\|_{\mathscr{E}_{T+\tau}^{4/3}}^2 \leqslant \mathscr{J}(T+\tau) \leqslant CT\,\mathrm{e}^{C_2T} = P.
$$

因此式(42)成立. 证毕.

对任意的 $\zeta_\tau\in L_{\mu_\tau}^2(\mathbb{R}^+;\mathscr{H}_1)$，Cauchy 问题[8,16,19]

$$
\begin{cases}
\partial_t\zeta^t = -\partial_s\zeta^t + w, & t>\tau, \\
\zeta^\tau = \zeta_\tau
\end{cases}
\tag{48}
$$

有唯一解 $\zeta^t\in C([\tau,+\infty);L_{\mu_\tau}(\mathbb{R}^+;\mathscr{H}_1))$，并有表达式

$$
\zeta^t(s) = \begin{cases}
\displaystyle\int_0^s w(t-y)\,\mathrm{d}y, & 0<s\leqslant t-\tau, \\
\displaystyle\int_0^{t-\tau} w(t-y)\,\mathrm{d}y, & s>t-\tau.
\end{cases}
\tag{49}
$$

记 $\mathscr{B}_t$ 为定理 2 所得到的时间依赖吸收集. 设 $\mathscr{K}_T=\Pi U_1(T,\tau)\mathscr{B}_\tau$，其中 Π：$\mathscr{H}_1\times L_{\mu_t}(\mathbb{R}^+;\mathscr{H}_1)\to L_{\mu_t}(\mathbb{R}^+;\mathscr{H}_1)$是一个投影算子.

引理 12 设 $z_2(t)=(w(t),\zeta^t)$是问题(48)的解. 假设式(7)～(9),(33)～(36)以及条件(H_1)～(H_4)成立，$g\in L^2(\Omega)$. 则对任意给定的 $T>\tau$，存在正常数 $P_1=P_1(\|\mathscr{B}_\tau\|_{\mathscr{E}_\tau^1})$，使得：

1) $\mathscr{K}_T$ 在 $L_{\mu_\tau}^2(\mathbb{R}^+;\mathscr{H}_{4/3})\cap H_{\mu_\tau}^1(\mathbb{R}^+;\mathscr{H}_1)$上是有界的；

2) $\sup\limits_{\eta^T\in\mathcal{K}_T}\|\zeta^T(s)\|_1^2\leqslant P_1$.

证明：根据式(48)，有

$$\partial_s\zeta^t(s)=\begin{cases}w(t-s), & 0\leqslant s\leqslant t-\tau,\\ 0, & s>t-\tau.\end{cases}\tag{50}$$

从而结合引理 11 即知结论 1)成立.

其次，易知

$$\|\zeta^T(s)\|_1\leqslant\begin{cases}\int_0^s\|w(T-y)\|_1\mathrm{d}y\leqslant\int_0^{T-\tau}\|w(T-y)\|_1\mathrm{d}y, & 0\leqslant s\leqslant T-\tau,\\ \int_0^{T-\tau}\|w(T-y)\|_1\mathrm{d}y, & s>T-\tau.\end{cases}\tag{51}$$

从而由式(42)知结论 2)成立.

综上可得：

引理 13　假设引理 12 条件成立，则对于任意给定的 $T>\tau$，$U_1(T,\tau)\mathscr{B}_\tau$ 在 $\mathscr{E}_T^1$ 上是相对紧的.

定理 3　设 $U(t,\tau)$是问题(5)-(6)的解过程. 假设式(7)～(9)，(33)～(36)以及条件(H_1)～(H_4)成立，$g\in L^2(\Omega)$. 则过程 $U(t,\tau)$拥有时间依赖全局吸引子 $\mathscr{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. 此外，吸引子是不变的，即 $U(t,\tau)A_\tau=A_t$，$\forall\, t\geqslant\tau$.

证明：根据定理 2 可知 $U(t,\tau)$具有时间依赖吸收集 $\mathscr{B}_t=\{B_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$. 根据引理 10 和引理 11 知，对足够大的正常数 R_1，集族 $\mathbb{B}_t^{1/3}=\{B_t^{1/3}(R_1)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是拉回吸引的，其中 $B_t^{1/3}(R_1)=\{\zeta\,|\,\|\zeta\|_{\mathscr{E}_t^{4/3}}\leqslant R_1\}$. 结合式(39)，(42)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_{\mathscr{E}_t^1}(U(t,\tau)\mathscr{B}_\tau,\mathbb{B}_t^{1/3})&\leqslant\mathrm{dist}_{\mathscr{E}_t^1}(U_0(t,\tau)\mathscr{B}_\tau+U_1(t,\tau)\mathscr{B}_\tau,\mathbb{B}_t^{1/3})=\\&\quad\mathrm{dist}_{\mathscr{E}_t^1}(U_0(t,\tau)\mathscr{B}_\tau,\mathbb{B}_t^{1/3})\leqslant C(\|\mathscr{B}_\tau\|_{\mathscr{E}_\tau^1})\mathrm{e}^{-\epsilon_1(t-\tau)},\end{aligned}$$

其中 $\epsilon_1=\min\{m,\lambda_1,\delta\inf\limits_{y\in[\tau,t]}\kappa(y)\}$.

对于 $\mathscr{E}_\tau^1$ 上的任意有界集 $\mathscr{B}_\tau=\{\mathbb{B}_\tau(R)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$，由定理 2 知，存在 $t_0=t_0(R)$，使得

$$\tau\leqslant t-t_0\Rightarrow U(t,\tau)\,\mathbb{B}_\tau(R)\subset\mathbb{B}_t(R_0).$$

因此，

$$\mathrm{dist}_{\mathscr{E}_t^1}(U(t,\tau)\mathscr{B}_\tau,\mathscr{B}_t)\leqslant\overline{\omega}\mathrm{e}^{\epsilon_1 t_0}\,\mathrm{e}^{-\epsilon_1(t-\tau)},$$

其中 $\overline{\omega}=\sup\limits_{0\leqslant t-\tau\leqslant t_0}\|U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau\|_{\mathscr{E}_t^1}$.

由引理 3 可得

$$\mathrm{dist}_{\mathscr{E}_t^1}(U(t,\tau)\,\mathbb{B}_\tau,\mathbb{B}_t^{1/3})\leqslant C(\|\,\mathbb{B}_\tau\|_{\mathscr{E}_\tau^1})\mathrm{e}^{-\epsilon_1(t-\tau)}.$$

根据引理 13 可知，问题(5)-(6)的解过程 $U(t,\tau)$在 $\mathscr{E}_t^1$ 上是渐近紧的. 利用引理 4、引理 5 可知，在 $\mathscr{E}_t^1$ 上存在时间依赖吸引子 $\mathscr{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，且 $\mathscr{A}$ 是不变的，即 $U(t,\tau)A_\tau=A_t$，并且

$$\mathscr{A}=\{Z\,|\,t\to Z(t)\in\mathscr{E}_t^1\text{ 且 }Z(t)\text{ 是过程 }U(t,\tau)\text{ 的 CBT}\}.$$

证毕.

3.3　时间依赖吸引子的正则性

将方程(5)-(6)的解 $U(t,\tau)z_\tau$ 分解为

$$U(t,\tau)z_\tau=U_2(t,\tau)z_\tau+U_3(t,\tau)z_\tau,$$

其中 $U_2(t,\tau)z_\tau=z_1(t)$，$U_3(t,\tau)z_\tau=z_2(t)$. 因此 $z(t)=(u(t),\eta^t)=z_1(t)+z_2(t)$，进一步分解为

$$u(t)=v(t)+w(t),\quad \eta^t=\xi^t+\zeta^t,\quad z_1(t)=(v(t),\xi^t),\quad z_2(t)=(w(t),\zeta^t),$$

且 $z_1(t)$满足：

$$\begin{cases}\partial_t v+A\partial_t v+a(l(u))Av+\int_0^\infty\mu_t(s)A\xi^t(s)\mathrm{d}s=0,\\ \partial_t\xi^t+\partial_s\xi^t=v(t),\\ v(x,t)\big|_{\partial\Omega}=0,\quad v(x,\tau)=u_\tau(x,t),\\ \xi^t(x,s)\big|_{\partial\Omega}=0,\quad \xi^\tau(x,s)=\eta_\tau(x,s),\end{cases}\tag{52}$$

$$\xi^t(s)=\begin{cases}\int_0^s v(t-r)\mathrm{d}r, & 0<s\leqslant t-\tau,\\ \xi_\tau(s-t+\tau)+\int_0^{t-\tau}v(t-r)\mathrm{d}r, & s>t-\tau;\end{cases}$$

$z_2(t)$满足：

$$\begin{cases}\partial_t w+A\partial_t w+a(l(u))Aw+\int_0^\infty \mu_t(s)A\zeta^t(s)\mathrm{d}s+f(u)=g,\\ \partial_t\zeta^t+\partial_s\zeta^t=w(t),\\ w(x,t)|_{\partial\Omega}=0,\quad w(x,\tau)=0,\\ \zeta^t(x,s)|_{\partial\Omega}=0,\quad \zeta^\tau(x,s)=0,\end{cases}\tag{53}$$

$$\zeta^t(s)=\begin{cases}\int_0^s w(t-r)\mathrm{d}r, & 0<s\leqslant t-\tau,\\ \int_0^{t-\tau}w(t-r)\mathrm{d}r, & s>t-\tau.\end{cases}$$

类似引理10的证明过程，可得

$$\|U_2(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{E}_t^1}^2\leqslant C(R)\mathrm{e}^{-\epsilon_1(t-\tau)},\qquad \forall\, t\geqslant\tau.\tag{54}$$

定理4 设式(7)～(9)以及条件(H_1)～(H_4)成立，$g\in L^2(\Omega)$. 设 $z_2(t)$是方程(53)具有初值 $z_2(t)\in A_\tau$ 的解，则时间依赖全局吸引子 $\mathscr{A}=\{A_t\}_{\{t\in\mathbb{R}\}}$ 在 $\mathcal{E}_t^2$ 上有界，且独立于 t.

证明：将方程(53)与 Aw 做内积，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+2a(l(u))\|w\|_1^2+2\langle w,\xi^t\rangle_{\mathcal{M}_t^1}=-2\langle f,Aw\rangle+2\langle g,Aw\rangle,\tag{55}$$

其中 $E(t)=\|w\|^2+\|w\|_1^2$. 由式(7)和Sobolev嵌入得

$$\begin{aligned}2|\langle -f(u),Aw\rangle|&\leqslant C\int_\Omega(1+|u|^{p-1})|\nabla u||\nabla w|\mathrm{d}x\leqslant\\ &C(1+\|u\|_{L^{3(p-1)/2}}^{p-1})\|\nabla u\|_{L_6}\|\nabla w\|_{L_6}\leqslant\\ &C(1+\|u\|_1^{p-1})\|\nabla u\|_1\|\nabla w\|_1\leqslant\frac{m}{2}\|w\|_2^2+C,\end{aligned}\tag{56}$$

且

$$2\langle g,Aw\rangle\leqslant\frac{2}{m}\|g\|^2+\frac{m}{2}\|w\|_2^2.\tag{57}$$

因此结合式(3)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+m\|w\|_1^2+2\langle w,\xi^t\rangle_{\mathcal{M}_t^1}\leqslant C.\tag{58}$$

对式(58)在$[\tau,t]$上积分，有

$$E(t)+m\int_\tau^t\|w(y)\|_1^2\mathrm{d}y+2\int_\tau^t\langle w,\xi^y\rangle_{\mathcal{M}_y^1}\mathrm{d}y\leqslant E(\tau)+C(t-\tau),\qquad\forall\, t\geqslant\tau.$$

设 $\mathcal{E}(t)=\|w\|_2^1+\|w\|_2^2+\|\zeta\|_{\mathcal{M}_t^2}^2$，根据引理9，得

$$\mathcal{E}(t)+m\int_\tau^t\|w(y)\|_1^2\mathrm{d}y+\delta\int_\tau^t\kappa(y)\|\xi^y(s)\|_{\mathcal{M}_y^1}^2\mathrm{d}y\leqslant\mathcal{E}(\tau)+C(t-\tau),\qquad\forall\, t\geqslant\tau,$$

即

$$\mathcal{E}(t)+2\epsilon_2\int_\tau^t\mathcal{E}(y)\mathrm{d}y\leqslant\mathcal{E}(\tau)+\epsilon_2\int_\tau^t\mathcal{E}(y)\mathrm{d}y+C(t-\tau),$$

其中 $\epsilon_1=\min\{m,\lambda_1,\delta\inf\limits_{y\in[\tau,t]}\kappa(y)\}$.

应用积分型Gronwall不等式得

$$\mathcal{E}(t)\leqslant\mathcal{E}(\tau)\mathrm{e}^{-\epsilon_2(t-\tau)}+\frac{C\mathrm{e}^{\epsilon_2}}{1-\mathrm{e}^{-\epsilon_2}}.$$

进一步，有

$$\| z_1(t) \|_{\mathcal{E}_t^2}^2 \leqslant \mathcal{E}(t) \leqslant \left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right) \| z_1(t) \|_{\mathcal{E}_t^2}^2,$$

$$\| z_1(t) \|_{\mathcal{E}_t^2}^2 \leqslant \left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right) \| z_1(\tau) \|_{\mathcal{E}_t^2}^2 \mathrm{e}^{-\epsilon_2(t-\tau)} + \frac{C\mathrm{e}^{\epsilon_2}}{1-\mathrm{e}^{-\epsilon_2}} \leqslant P_1, \tag{59}$$

所以 $\| U_3(t,\tau)z_\tau \|_{\mathcal{E}_t^2}$ 关于 t 是一致有界的.

令 $K_t^2 = \{z \mid \| z(t) \|_{\mathcal{E}_t^2} \leqslant P_1\}$，由式(54)，(59)，得

$$\lim_{\tau\to-\infty} \mathrm{dist}_{\mathcal{E}_t^1}(U(t,\tau)A_\tau, K_t^2) = 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

根据时间依赖吸引子的不变性，可得

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{E}_t^1}(A_t, K_t^2) = 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

因此 $A_t \subset \overline{K_t^2} = K_t^2$. 证毕.

参　考　文　献

[1] AIFANTIS E C. On the Problem of Diffusion in Solids [J]. Acta Mechanica，1980，37(3)：265-296.

[2] QIN Y M，CHEN J L，JIANG H T. A New Existence Theorem for Global Attractors and Its Application to a Non-classical Diffusion Equation [J]. Chinese Quart J Math，2023，38(3)：276-289.

[3] MA Q Z，ZHONG C K. Global Attractors of Strong Solutions to Nonclassical Diffusion Equations [J]. J Lanzhou Univ (Natur Sci Ed)，2004，40(5)：7-9.

[4] WANG L Z，WANG Y H，QIN Y M. Upper Semicontinuity of Attractors for Nonclassical Diffusion Equations in $H^1(\mathbb{R}^3)$ [J]. Appl Math Comput，2014，240：51-61.

[5] CARABALLO T，GARRIDO-ATIENZA M J，SCHMALFU B β，et al. Global Attractor for a Non-autonomous Integro-Differential Equation in Materials with Memory [J]. Nonlinear Anal：Theory，Methods Appl，2010，73(1)：183-201.

[6] CARABALLO T，REAL J. Attractors for 2D-Navier-Stokes Models with Delays [J]. J Differential Equations，2004，205(2)：271-297.

[7] ANH C T，BAO T Q. Pullback Attractors for a Class of Non-autonomous Nonclassical Diffusion Equations [J]. Nonlinear Anal：Theory，Methods Appl，2010，73(2)：399-412.

[8] CUNG A T，TOAN N D. Pullback Attractors for Nonclassical Diffusion Equations in Noncylindrical Domains [J]. Int J Math Math Sci，2012，2012：875913-1-875913-30.

[9] HARRAGA H，YEBDRI M. Pullback Attractors for a Class of Semilinear Nonclassical Diffusion Equations with Delay [J]. Electron J Differential Equations，2016，2016：7-1-7-33.

[10] CHIPOT M，RODRIGUES J F. On a Class of Nonlocal Nonlinear Elliptic Problems [J]. RAIRO Modél Math Anal Numér，1992，26(3)：447-467.

[11] CHIPOT M，VALENTE V，VERGARA GAFFARELLI G. Remarks on a Nonlocal Problem Involving the Dirichlet Energy [J]. Rend Semin Mat Univ Padova，2003，110：199-220.

[12] XU J H，ZHANG Z C，CARABALLO T. Non-autonomous Nonlocal Partial Differential Equations with Delay and Memory [J]. J Differential Equations，2021，270：505-546.

[13] XU J H，CARABALLO T，VALERO J. Asymptotic Behavior of a Semilinear Problem in Heat Conduction with Long Time Memory and Non-local Diffusion [J]. J Differential Equations，2022，327：418-447.

[14] CARABALLO T，HERRERA-COBOS M，MARÍN-RUBIO P. Long-Time Behaviour of a Non-autonomous Parabolic Equation with Nonlocal Diffusion and Sublinear Terms [J]. Nonlinear Anal：Theory，Methods Appl，2015，121：3-18.

[15] SIMSEN J，FERREIRA J. A Global Attractor for a Nonlocal Parabolic Problem [J]. Nonlinear Stud，2014，21(3)：405-416.

[16] WANG X，YANG L，ZHONG C K. Attractors for the Nonclassical Diffusion Equations with Fading Memory [J]. J Math Anal Appl，2009，362(2)：327-337.

[17] 汪璇，居文超，钟承奎. 具有衰退记忆的非自治经典扩散方程的强吸引子 [J]. 数学年刊，2013，36A(6)：671-688. (WANG X，JU W C，ZHONG C K. Strong Attractors for the Non-autonomous Nonclassical Diffusion

Equations with Fading Memory [J]. Chinese Annals Mathematics, 2013, 36A(6): 671-688.)
[18] QIN Y M, CHEN X L. Time-Dependent Global Attractors for the Nonclassical Diffusion Equations with Fading Memory [J]. Acta Math Appl Sin: Engl Ser, 2025, 41(2): 498-512.
[19] CARABALLO T, ŁUKASZEWICZ G, REAL J. Pullback Attractors for Asymptotically Compact Non-autonomous Dynamical Systems [J]. Nonlinear Anal: Theory, Methods Appl, 2006, 64(3): 484-498.
[20] YUAN J B, ZHANG S X, XIE Y Q, et al. Attractors for a Class of Perturbed Nonclassical Diffussion Equations with Memory [J]. Discrete Contin Dyn Syst: Ser B, 2022, 27(9): 4995-5007.
[21] SUN Y, YANG Z J. Longtime Dynamics for a Nonlinear Viscoelastic Equation with Time-Dependent Memory Kernel [J]. Nonlinear Anal: Real World Appl, 2022, 64: 103432-1-103432-26.
[22] LI Y N, YANG Z J. Exponential Attractor for the Viscoelastic Wave Model with Time-Dependent Memory Kernels [J]. J Dynam Differential Equations, 2023, 35(1): 679-707.
[23] CONTI M, DANESE V, GIORGI C, et al. A Model of Viscoelasticity with Time-Dependent Memory Kernels [J]. Amer J Math, 2018, 140(2): 349-389.
[24] CONTI M, PATA V, TEMAM R. Attractors for Processes on Time-Dependent Spaces. Applications to Wave Equations [J]. J Differential Equations, 2013, 255(6): 1254-1277.
[25] DAFERMOS C M. Asymptotic Stability in Viscoelasticity [J]. Arch Rational Mech Anal, 1970, 37: 297-308.
[26] BORINI S, PATA V. Uniform Attractors for a Strongly Damped Wave Equation with Linear Memory [J]. Asymptot Anal, 1999, 20(3/4): 263-277.
[27] PATA V, SQUASSINA M. On the Strongly Damped Wave Equation [J]. Comm Math Phys, 2005, 253(3): 511-533.
[28] PATA V, ZUCCHI A. Attractors for a Damped Hyperbolic Equation with Linear Memory [J]. Adv Math Sci Appl, 2001, 11(2): 505-529.
[29] VISHIK I M, CHEPYZHOV V V. Kolmogorov ε-Entropy in the Problems on Global Attractors for Evolution Equations of Mathematical Physics [J]. Probl Inf Transm, 2003, 39(1): 2-20.
[30] SIMON J. Compact Sets in the Space $L^p(0,T;B)$ [J]. Ann Mat Pura Appl, 1987, 146(4): 65-96.
[31] MENG F J, WU J, ZHAO C X. Time-Dependent Global Attractor for Extensible Berger Equation [J]. J Math Anal Appl, 2019, 469(2): 1045-1069.
[32] ZELIK S. Asymptotic Regularity of Solutions of a Nonautonomous Damped Wave Equation with a Critical Growth Exponent [J]. Commun Pure Appl Anal, 2004, 3(4): 921-934.
[33] LIU Y F. Time-Dependent Global Attractor for the Nonclassical Diffusion Equation [J]. Appl Anal, 2015, 94(7): 1439-1449.
[34] GATTI S, MIRANVILLE A, PATA V, et al. Attractors for Semi-linear Equations of Viscoelasticity with Very Low Dissipation [J]. Rocky Mountain J Math, 2008, 38(4): 1117-1138.
[35] CONTI M, PATA V. Asymptotic Structure of the Attractor for Processes on Time-Dependent Spaces [J]. Nonlinear Anal: Real World Appl, 2014, 19: 1-10.
[36] 汪璇, 袁海燕. 具有时间依赖记忆核的非经典扩散方程的吸引子 [J]. 数学物理学报, 2024, 44A(2): 429-452. (WANG X, YUAN H Y. Attractors for the Nonclassical Diffusion Equations with Time-Dependent Memory Kernels [J]. Acta Mathematica Scientia, 2024, 44A(2): 429-452.)

(责任编辑: 赵立芹)