doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2025005

四元数环上的(m,n)-Jordan 中心化子和(m,n)-Lie 中心化子

连佳欣，张建华，孔　亮
(陕西师范大学 数学与统计学院，西安 710119)

摘要：设 S 是环，$H(S)$是 S 上的四元数环. 考虑四元数环上的(m,n)-Jordan 中心化子和(m,n)-Lie 中心化子，利用生成元分析法证明(m,n)-Jordan 中心化子是标准的中心化子，(m,n)-Lie 中心化子是标准的 Lie 中心化子.

关键词：四元数环；(m,n)-Jordan 中心化子；(m,n)-Lie 中心化子
中图分类号：O177.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2025)06-1615-07

(m,n)-Jordan and (m,n)-Lie Centralizers on Quaternion Rings

LIAN Jiaxin, ZHANG Jianhua, KONG Liang
(*School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an* 710119, *China*)

Abstract: Let S be a ring, and $H(S)$ be the quaternion ring on S. We consider the (m,n)-Jordan centralizers and (m,n)-Lie centralizers on the quaternion ring. By using the generator analysis method, we prove that the (m,n)-Jordan centralizers are standard centralizers, and the (m,n)-Lie centralizers are standard Lie centralizers.

Keywords: quaternion ring; (m,n)-Jordan centralizer; (m,n)-Lie centralizer

1　引言与预备知识

设 R 是一个环，$Z(R)$是 R 的中心. 对任意的 $x,y\in R$，$x\circ y=xy+yx$ 和$[x,y]=xy-yx$ 分别称为 x 和 y 的 Jordan 积和 Lie 积(交换子). 设 φ: $R\to R$ 是一个可加映射，若对任意的 $x,y\in R$，有 $\varphi(xy)=\varphi(x)y=x\varphi(y)$，则称 φ 是 R 上的中心化子. 若存在 $\lambda\in Z(R)$，使得对任意的 $x\in R$，有 $\varphi(x)=\lambda x$，则称中心化子 φ 是标准的. 若对任意的 $x,y\in R$，有 $\varphi(x\circ y)=\varphi(x)\circ y=x\circ\varphi(y)$，则称 φ 是 R 上的 Jordan 中心化子. 若对任意的 $x,y\in R$，有 $\varphi([x,y])=[\varphi(x),y]=[x,\varphi(y)]$，则称 φ 是 R 上的 Lie 中心化子. 若存在 $\lambda\in Z(R)$和作用在交换子上为零的中心值映射 h，使得对任意的 $x\in R$，有 $\varphi(x)=\lambda x+h(x)$，则称 Lie 中心化子 φ 是标准的. 若环 R 上的可加映射 φ 满足对任意的 $x\in R$，有 $(m+n)\varphi(x^2)=m\varphi(x)x+nx\varphi(x)$(其中 m 和 n 是固定的整数且 $m+n\neq 0$)，则称 φ 是 R 上的(m,n)-Jordan中心化子. 若对任意的 $x,y\in R$，满足条件

$$(m+n)\varphi([x,y])=m[\varphi(x),y]+n[x,\varphi(y)],$$

其中 $m+n\neq 0$，则称 φ 是 R 上的(m,n)-Lie 中心化子. 可以验证，当 $m=1$，$n=0$(或 $m=0$，$n=1$)时，

收稿日期：2025-01-03.
第一作者简介：连佳欣(2000—)，女，汉族，硕士研究生，从事算子代数的研究，E-mail：shilaogen6@163.com. **通信作者简介**：张建华(1965—)，男，汉族，博士，教授，博士生导师，从事算子代数的研究，E-mail：jhzhang@snnu.edu.cn.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：12271323).

(m,n)-Lie 中心化子即为 Lie 中心化子. 若环 R 上的可加映射 φ 满足对任意的 $x\in R$, 有$[\varphi(x),x]=0$, 则称 φ 是 R 上的交换映射.

设 S 是一个幺环, 记

$$H(S)=\{s_0+s_1 i+s_2 j+s_3 k:\ s_l\in S,\ l=0,1,2,3\},$$

其中 $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$, $ij=-ji=k$, $jk=-kj=i$, $ki=-ik=j$, 且 i,j,k 与 S 中的元素可交换, 并称 $H(S)$是 S 上的四元数环.

中心化子是环和代数上的一类重要映射, 目前已获得了一系列研究成果[1-10]. Beidar 等[1]提出若半素环 R 上的映射 φ 既是左 Jordan 中心化子, 又是右 Jordan 中心化子, 则存在 $\lambda\in C$(R 的扩展中心), 使得 $\varphi(x)=\lambda x$ 对任意的 $x\in R$ 都成立; Zalar[2]证明了 2-无挠素环上的任意左(右)Jordan 中心化子都是左(右)中心化子; Vukman 等[3]证明了 2-无挠自由半素环 R 上的(1,1)-Jordan 中心化子是中心化子; Vukman[4]证明了当 $m\geqslant 1$, $n\geqslant 1$ 时, $6mn(m+n)$-无挠素环上的(m,n)-Jordan 中心化子是中心化子; Fošner 等[5]引进了 Lie 中心化子的定义, 并刻画了三角代数和套代数上的 Lie 中心化子; Jabeen[6]主要研究了广义矩阵代数上的 Jordan 中心化子和 Lie 中心化子, 给出广义矩阵代数上三类中心化子的一般形式以及 Lie 中心化子是标准型的充分必要条件, 并得到了在某些假设下广义矩阵代数上的 Jordan 中心化子是中心化子; 杨翠等[7]研究了套代数上的 Jordan 中心化子, 证明了若可加映射 φ 满足对任意的非负整数 m,n,r, 均有

$$(m+n)\varphi(x^{r+1})=m\varphi(x)x^r+nx^r\varphi(x),$$

则存在数域 F 中的常数λ, 使得对任意的 $x\in R$, 有 $\varphi(x)=\lambda x$; 曹美虹等[8]证明了四元数环上的 Jordan 中心化子是中心化子以及 Lie 中心化子是标准型的充分条件.

受上述研究工作的启发, 本文讨论四元数环上的中心化子、(m,n)-Jordan 中心化子和(m,n)-Lie 中心化子, 给出中心化子的几个等价条件以及(m,n)-Jordan 中心化子和(m,n)-Lie 中心化子的结构.

2 主要结果

定理1 设 m,n 为正整数, S 是特征不为 mn 的幺环, φ: $H(S)\to H(S)$是可加映射, 则下列叙述等价:

1) φ 是中心化子;

2) 存在正整数 m,n, 使得对任意的 $x,y\in H(S)$, 有$(m+n)\varphi(xy)=m\varphi(x)y+nx\varphi(y)$;

3) 对任意的 $x,y\in H(S)$, 有 $\varphi(x\circ y)=\varphi(x)y+\varphi(y)x=x\varphi(y)+y\varphi(x)$;

4) 存在 $\lambda\in Z(H(S))$, 使得对任意的 $x\in H(S)$, 有 $\varphi(x)=\lambda x$.

证明: 显然, 1)⇒2), 1)⇒3)和 4)⇒1)成立.

2)⇒1). 取 $x=1$, 则对任意的 $y\in H(S)$, 有

$$(m+n)\varphi(y)=m\varphi(1)y+n\varphi(y).$$

于是有 $m\varphi(y)=m\varphi(1)y$. 由于 S 的特征不为 mn, 所以 $\varphi(y)=\varphi(1)y$. 取 $y=1$, 则对任意的 $x\in H(S)$, 有

$$(m+n)\varphi(x)=m\varphi(x)+nx\varphi(1).$$

于是 $n\varphi(x)=nx\varphi(1)$, 进而 $\varphi(x)=x\varphi(1)$. 所以 $\varphi(xy)=x\varphi(y)=\varphi(x)y$, 即 φ 是中心化子.

3)⇒4). 取 $y=1$, 则对任意的 $x\in H(S)$, 有

$$2\varphi(x)=\varphi(x\circ 1)=\varphi(x)+\varphi(1)x=x\varphi(1)+\varphi(x).$$

于是 $\varphi(x)=\varphi(1)x=x\varphi(1)$, 进而 $\lambda=\varphi(1)\in Z(H(S))$, $\varphi(x)=\lambda x$. 证毕.

引理1[9] 设 S 是幺环, 则

$$Z(H(S))=Z(S)\oplus(Z(S)\cap B)i\oplus(Z(S)\cap B)j\oplus(Z(S)\cap B)k,$$

其中 $B=\{x\in S\,|\,2x=0\}$是 S 的理想. 此外, 还有如下结论:

1) 若 S 的特征为 2, 则 $Z(H(S))=H(Z(S))$, 从而 S 可交换蕴涵 $H(S)$ 可交换;

2) 若 S 的特征不为 2, 则 $Z(H(S))=Z(S)$.

引理 2　设 R 是幺环，φ: $R\to R$ 是(m,n)-Jordan 中心化子，则对任意 $x,y\in R$，有：

1) $(m+n)\varphi(x\circ y)=m\varphi(x)y+nx\varphi(y)+m\varphi(y)x+ny\varphi(x)$；

2) $(m+n)\varphi(x)=m\varphi(1)x+nx\varphi(1)$.

证明：1) 因为 φ: $R\to R$ 是(m,n)-Jordan 中心化子，所以满足对任意的 $x\in R$，有$(m+n)\varphi(x^2)=m\varphi(x)x+nx\varphi(x)$. 用 $x+y$ 代替 x，则有

$$\begin{aligned}(m+n)\varphi((x+y)^2)=\ & m\varphi(x+y)(x+y)+n(x+y)\varphi(x+y)=\\ & m\varphi(x)x+m\varphi(x)y+m\varphi(y)x+m\varphi(y)y+\\ & nx\varphi(x)+nx\varphi(y)+ny\varphi(x)+ny\varphi(y).\end{aligned}\tag{1}$$

又因为 φ 为可加映射，所以

$$\begin{aligned}(m+n)\varphi((x+y)^2)=\ & (m+n)\varphi(x^2+xy+yx+y^2)=\\ & m\varphi(x)x+nx\varphi(x)+(m+n)\varphi(xy+yx)+m\varphi(y)y+ny\varphi(y).\end{aligned}\tag{2}$$

比较式(1)和式(2)，可得

$$(m+n)\varphi(x\circ y)=m\varphi(x)y+nx\varphi(y)+m\varphi(y)x+ny\varphi(x).\tag{3}$$

2) 在式(3)中取 $y=1$ 即可得结论.

定理 2　设 m,n 为正整数，S 是特征不为 $mn(m+n)$ 且 2 可逆的环，φ: $H(S)\to H(S)$是(m,n)-Jordan 中心化子，则存在 $\lambda\in Z(S)$，使得对任意的 $x\in H(S)$，有 $\varphi(x)=\lambda x$，即 φ 是中心化子.

证明：设

$$\varphi(i)=a_1+b_1i+c_1j+d_1k,\qquad \varphi(j)=a_2+b_2i+c_2j+d_2k,$$

其中 $a_l,b_l,c_l,d_l\in S(l=1,2)$. 在式(3)中取 $x=y=i$，由于 2 可逆，故

$$\begin{aligned}-(m+n)\varphi(1)=\ & (m+n)\varphi(i^2)=m\varphi(i)i+ni\varphi(i)=\\ & m(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)i+ni(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)=\\ & -(m+n)b_1+(m+n)a_1i+(m-n)d_1j-(m-n)c_1k.\end{aligned}\tag{4}$$

在式(3)中取 $x=y=j$，则

$$\begin{aligned}-(m+n)\varphi(1)=\ & (m+n)\varphi(j^2)=m\varphi(j)j+nj\varphi(j)=\\ & m(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)j+nj(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)=\\ & -(m+n)c_2-(m-n)d_2i+(m+n)a_2j+(m-n)b_2k.\end{aligned}\tag{5}$$

利用引理 2 中 2)，取 $x=i$，有

$$(m+n)\varphi(i)=m\varphi(1)i+ni\varphi(1).\tag{6}$$

结合式(4)和式(6)，有

$$\begin{aligned}(m+n)^2(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)=\ & m[(m+n)b_1-(m+n)a_1i-(m-n)d_1j+(m-n)c_1k]i+\\ & ni[(m+n)b_1-(m+n)a_1i-(m-n)d_1j+(m-n)c_1k]=\\ & (m+n)^2a_1+(m+n)^2b_1i+(m-n)^2c_1j+(m-n)^2d_1k.\end{aligned}$$

从而

$$(m+n)^2c_1=(m-n)^2c_1,\qquad (m+n)^2d_1=(m-n)^2d_1.$$

于是 $4mnc_1=4mnd_1=0$. 由于 S 的特征不为 $mn(m+n)$ 且 2 可逆，所以 $c_1=d_1=0$. 进而式(4)变为 $\varphi(1)=b_1-a_1i$. 利用引理 2 中 2)，并取 $x=j$，可得

$$(m+n)\varphi(j)=m\varphi(1)j+nj\varphi(1).\tag{7}$$

结合式(5)和式(7)，有

$$\begin{aligned}(m+n)^2(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)=\ & m[(m+n)c_2+(m-n)d_2i-(m+n)a_2j-(m-n)b_2k]j+\\ & nj[(m+n)c_2+(m-n)d_2i-(m+n)a_2j-(m-n)b_2k]=\\ & (m+n)^2a_2+(m-n)^2b_2i+(m+n)^2c_2j+(m-n)^2d_2k,\end{aligned}$$

从而$(m+n)^2b_2=(m-n)^2b_2$，$(m+n)^2d_2=(m-n)^2d_2$. 类似地，可得 $b_2=d_2=0$. 进而式(5)变为

$$\varphi(1)=c_2-a_2j.\tag{8}$$

于是 $\varphi(1)=b_1-a_1i=c_2-a_2j$，因此 $a_1=a_2=0$，$b_1=c_2$. 由式(8)知，$\varphi(1)=c_2\in S$. 利用引理 2 中 2)，

对任意的 $x\in H(S)$，有
$$(m+n)\varphi(x)=m\varphi(1)x+nx\varphi(1).\tag{9}$$
从而对任意的 $x\in H(S)$，有
$$(m+n)^2\varphi(x^2)=m(m+n)\varphi(1)x^2+n(m+n)x^2\varphi(1).\tag{10}$$
另一方面，在式(3)中取 $x=y$，结合环 S 中 2 可逆，有
$$(m+n)\varphi(x^2)=m\varphi(x)x+nx\varphi(x),$$
所以
$$\begin{aligned}(m+n)^2\varphi(x^2)=&m(m+n)\varphi(x)x+n(m+n)x\varphi(x)=\\&[m^2\varphi(1)x+mnx\varphi(1)]x+x[mn\varphi(1)x+n^2x\varphi(1)]=\\&m^2\varphi(1)x^2+2mnx\varphi(1)x+n^2x^2\varphi(1).\end{aligned}\tag{11}$$
结合式(10)和(11)，有
$$mn\varphi(1)x^2+mnx^2\varphi(1)-2mnx\varphi(1)x=0.$$
由于 S 的特征不为 $mn(m+n)$，则
$$\varphi(1)x^2-2x\varphi(1)x+x^2\varphi(1)=0.$$
因此，对任意的 $x\in H(S)$，有
$$[[\varphi(1),x],x]=0.\tag{12}$$
令 $f(x)=[\varphi(1),x]$，则由式(12)得 $[f(x),x]=0$. 所以 f 是 $H(S)$ 上的交换映射. 由文献[10]中推论 2.6 知，$f(x)=\alpha x+\mu(x)$，其中 $\alpha\in Z(S)$，μ: $S\rightarrow Z(S)$ 是一个可加映射. 所以
$$f(x)=[\varphi(1),x]=\alpha x+\mu(x).\tag{13}$$
在式(13)中取 $x=i$，并结合 $\varphi(1)\in S$，有
$$0=f(i)=[\varphi(1),i]=\alpha i+\mu(i).$$
所以 $\alpha=0$. 进而
$$f(x)=[\varphi(1),x]=\mu(x)\in Z(S).$$
在式(13)中取 $x=ai$，其中 $a\in S$，则
$$f(ai)=[\varphi(1),ai]=\mu(ai)=[\varphi(1),a]i\in Z(S).$$
所以 $[\varphi(1),a]=0$，即 $\varphi(1)=\lambda\in Z(S)$. 由式(9)及 S 特征不为 $mn(m+n)$ 知，对任意的 $x\in H(S)$，有 $\varphi(x)=\lambda x$，所以 φ 是 $H(S)$ 上的中心化子.

设 R 为幺环，φ: $R\rightarrow R$ 是可加映射，如果对任意的 $x,y\in R$，都有
$$(m+n)\varphi(x\circ y)=m\varphi(x)\circ y+nx\circ\varphi(y),\tag{14}$$
则 φ 称为拟(m,n)-Jordan 中心化子.

当环 R 特征不为 2 时，若 φ: $R\rightarrow R$ 是满足式(3)的可加映射，则满足 $(m+n)\varphi(x^2)=m\varphi(x)x+nx\varphi(x)$，即 φ 为(m,n)-Jordan 中心化子. 此时易验证当 $m=n$ 时，式(3)与式(14)相同，即拟(m,n)-Jordan中心化子为(m,n)-Jordan 中心化子；当 $m\neq n$ 且环 R 的特征为 $|m-n|$ 时，式(3)与式(14)相同，即拟(m,n)-Jordan 中心化子为(m,n)-Jordan 中心化子；当 $m\neq n$，环 R 的特征不为 $|m-n|$，且 φ 为中心化子时，式(3)与式(14)相同，即拟(m,n)-Jordan 中心化子为(m,n)-Jordan 中心化子. 因此拟(m,n)-Jordan 中心化子与(m,n)-Jordan 中心化子一般不同.

下面讨论四元数环上的拟(m,n)-Jordan 中心化子.

定理 3 设 m,n 为正整数，S 是特征不为 $n(m+n)$ 且 2 可逆的环，φ: $H(S)\rightarrow H(S)$ 是拟(m,n)-Jordan 中心化子，则存在 $\lambda\in Z(S)$，使得对任意的 $x\in H(S)$，有 $\varphi(x)=\lambda x$，即 φ 是中心化子.

证明：设 $\varphi(i)=a_1+b_1i+c_1j+d_1k$，$\varphi(j)=a_2+b_2i+c_2j+d_2k$，其中 $a_l,b_l,c_l,d_l\in S(l=1,2)$. 在式(14)中取 $x=y=i$，则
$$\begin{aligned}-2(m+n)\varphi(1)=&m\varphi(i)\circ i+ni\circ\varphi(i)=\\&m(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)\circ i+ni\circ(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)=\\&-2(m+n)b_1+2(m+n)a_1i.\end{aligned}$$

由于 S 的特征不为 $n(m+n)$ 且 2 可逆，所以

$$\varphi(1)=b_1-a_1 i.$$

在式(14)中取 $x=y=j$，则

$$\begin{aligned}-2(m+n)\varphi(1)=&m\varphi(j)\circ j+nj\circ\varphi(j)=\\&m(a_2+b_2 i+c_2 j+d_2 k)\circ j+nj\circ(a_2+b_2 i+c_2 j+d_2 k)=\\&-2(m+n)c_2+2(m+n)a_2 j.\end{aligned}$$

所以 $\varphi(1)=c_2-a_2 j$. 于是 $b_1-a_1 i=c_2-a_2 j$，从而 $a_1=a_2=0$，$b_1=c_2$，因此 $\varphi(1)=c_2\in S$.

在式(14)中取 $y=1$，并结合 S 的特征不为 $n(m+n)$，有

$$2\varphi(x)=\varphi(1)x+x\varphi(1).$$

从而对任意的 $x\in H(S)$，有

$$2\varphi(x^2)=\varphi(1)x^2+x^2\varphi(1).$$

另一方面，在式(14)中取 $x=y$，则

$$\begin{aligned}4(m+n)\varphi(x^2)=&2(m+n)\varphi(x\circ x)=2m\varphi(x)\circ x+2nx\circ\varphi(x)=\\&m(\varphi(1)x+x\varphi(1))\circ x+nx\circ(\varphi(1)x+x\varphi(1))=\\&2(m+n)x\varphi(1)x+(m+n)x^2\varphi(1)+(m+n)\varphi(1)x^2.\end{aligned}$$

由 S 的特征不为 $n(m+n)$，并结合 $2\varphi(x^2)=\varphi(1)x^2+x^2\varphi(1)$，则有

$$\varphi(1)x^2-2x\varphi(1)x+x^2\varphi(1)=0.$$

因此对任意的 $x\in H(S)$，$[[\varphi(1),x],x]=0$. 令 $f(x)=[\varphi(1),x]$，则$[f(x),x]=0$. 所以 f 是 $H(S)$上的交换映射. 类似定理 2 相应部分的证明，可得 $\varphi(1)=\lambda\in Z(S)$. 由 $2\varphi(x)=x\varphi(1)+\varphi(1)x$ 及 S 为 2 可逆的环知，对任意的 $x\in H(S)$，有 $\varphi(x)=\lambda x$. 所以 φ 是 $H(S)$上的中心化子. 证毕.

设 m,n 是正整数，则幺环 R 上的(m,n)-Lie 中心化子 φ 一定满足对任意的 $x,y\in R$，有

$$(m+n)\varphi([x,y])=m[\varphi(x),y]+n[x,\varphi(y)].\tag{15}$$

但反之不一定成立. 下面证明在某些假设下其在四元数环 $H(S)$上成立.

定理 4　设 m,n 为正整数，S 是特征不为 $2mn(m+n)(2m+n)(m^2+n^2+mn)$的环，$\varphi$：$H(S)\to H(S)$是$(m,n)$-Lie 中心化子，则 φ 为 Lie 中心化子.

证明：设 $\varphi(i)=a_1+b_1 i+c_1 j+d_1 k$，$\varphi(j)=a_2+b_2 i+c_2 j+d_2 k$，$\varphi(k)=a_3+b_3 i+c_3 j+d_3 k$，其中 $a_l,b_l,c_l,d_l\in S(l=1,2,3)$. 由式(15)，将 φ 作用在$[i,j]$上得

$$2(m+n)\varphi(k)=(m+n)\varphi([i,j])=m[\varphi(i),j]+n[i,\varphi(j)],$$

即

$$2(m+n)(a_3+b_3 i+c_3 j+d_3 k)=-2md_1 i-2nd_2 j+(2mb_1+2nc_2)k.\tag{16}$$

由 S 的特征不为 $2mn(m+n)(2m+n)(m^2+n^2+mn)$，并对比式(16)两端可得

$$a_3=0,\quad (m+n)b_3=-md_1,\quad (m+n)c_3=-nd_2,\quad (m+n)d_3=mb_1+nc_2.\tag{17}$$

将 φ 分别作用在$[j,k]$和$[k,i]$上，同理得

$$a_1=0,\quad (m+n)b_1=mc_2+nd_3,\quad (m+n)c_1=-mb_2,\quad (m+n)d_1=-nb_3,\tag{18}$$

$$a_2=0,\quad (m+n)b_2=-nc_1,\quad (m+n)c_2=md_3+nb_1,\quad (m+n)d_2=-mc_3.\tag{19}$$

由式(17)和式(18)，有

$$(m+n)^2 b_3=-m(m+n)d_1=mnb_3.$$

由于 S 的特征不为 $2mn(m+n)(2m+n)(m^2+n^2+mn)$，因此 $b_3=d_1=0$. 类似地，由式(17)和式(19)得 $c_3=d_2=0$，由式(18)和式(19)得 $c_1=b_2=0$. 由式(17)～(19)，有

$$\begin{aligned}(m+n)^2 d_3=&m(m+n)b_1+n(m+n)c_2=m(mc_2+nd_3)+(mn+n^2)c_2=\\&(m^2+n^2+mn)c_2+mnd_3,\end{aligned}$$

所以 $d_3=c_2$. 将 $d_3=c_2$ 代入式(19)，得 $nc_2=nb_1$，进而 $c_2=b_1$. 综上有

$$b_1=c_2=d_3,\qquad c_1=d_1=b_2=d_2=c_3=b_3=0.$$

因此

$$\varphi(i)=b_1 i,\quad \varphi(j)=b_1 j,\quad \varphi(k)=b_1 k. \tag{20}$$

对任意的 $s\in S$，设 $\varphi(si)=x+yi+zj+wk$，其中 $x,y,z,w\in S$. 结合式(15)和式(20)，有

$$(m+n)\varphi(0)=(m+n)\varphi([si,i])=m[\varphi(si),i]+n[si,\varphi(i)]=-nsb_1+nb_1 s+2mwj-2mzk,$$

所以 $w=z=0$，$b_1\in Z(S)$. 从而 $\varphi(si)=x+yi$. 再次利用式(15)和式(20)，并注意到 $b_1\in Z(S)$，得

$$2(m+n)\varphi(sk)=(m+n)\varphi([si,j])=m[\varphi(si),j]+n[si,\varphi(j)]=(2my+2nsb_1)k.$$

由于 S 特征不为 $2mn(m+n)(2m+n)(m^2+n^2+mn)$，因此

$$(m+n)\varphi(sk)=(my+nsb_1)k. \tag{21}$$

由式(15),(20),(21)，并结合 $b_1\in Z(S)$，有

$$\begin{aligned}-2(m+n)^2(x+yi)=-2(m+n)^2\varphi(si)=(m+n)^2\varphi([sk,j])=\\ m(m+n)[\varphi(sk),j]+n(m+n)[sk,\varphi(j)]=\\ -2m^2yi-2n^2sb_1 i-4mnsb_1 i.\end{aligned}$$

由于 S 的特征不为 $2mn(m+n)(2m+n)(m^2+n^2+mn)$，因此 $x=0$，$y=sb_1$，所以 $\varphi(si)=yi$. 将 $y=sb_1$ 代入式(21)，得

$$\varphi(sk)=yk. \tag{22}$$

由式(15),(20),(22)，并结合 $b_1\in Z(S)$，$y=sb_1$，可得

$$2(m+n)\varphi(sj)=(m+n)\varphi([sk,i])=m[\varphi(sk),i]+n[sk,\varphi(i)]=2(m+n)yj,$$

所以 $\varphi(sj)=yj$. 定义映射 β: $S\to S$ 为 $\beta(s)=y(s\in S)$，则 β 是可加的，且

$$\varphi(si)=\beta(s)i,\quad \varphi(sj)=\beta(s)j,\quad \varphi(sk)=\beta(s)k. \tag{23}$$

对任意的 $s\in S$，设 $\varphi(s)=x'+y'i+z'j+w'k$，其中 $x',y',z',w'\in S$. 由式(15)并结合 $b_1\in Z(S)$，有

$$(m+n)\varphi(0)=(m+n)\varphi([s,i])=m[\varphi(s),i]+n[s,\varphi(i)]=2mw'j-2mz'k,$$

所以 $w'=z'=0$，$\varphi(s)=x'+y'i$. 将 φ 作用在 $[s,j]$ 上，有

$$(m+n)\varphi(0)=(m+n)\varphi([s,j])=m[\varphi(s),j]+n[s,\varphi(j)]=2my'k,$$

于是 $y'=0$，进而 $\varphi(s)=x'$. 定义映射 α: $S\to S$ 为 $\alpha(s)=x'(s\in S)$，则 α 是可加的，且

$$\alpha(s)=\varphi(s). \tag{24}$$

由式(15)，对任意的 $s\in S$，有

$$0=(m+n)\varphi([si,i])=m[\varphi(si),i]+n[si,\varphi(i)]=m[\beta(s)i,i]+n[si,\beta(1)i]=n[\beta(1),s],$$

所以 $[\beta(1),s]=0$，即 $\beta(1)=\lambda\in Z(S)$. 因为 α,β 是 $S\to S$ 的可加映射，所以对任意的 $s,t\in S$，有

$$\begin{aligned}(m+n)\beta(s\circ t)k=(m+n)\varphi([si,tj])=m[\varphi(si),tj]+n[si,\varphi(tj)]=\\ m[\beta(s)i,tj]+n[si,\beta(t)j]=m(\beta(s)\circ t)k+n(s\circ\beta(t))k.\end{aligned}$$

从而 $(m+n)\beta(s\circ t)=m(\beta(s)\circ t)+n(s\circ\beta(t))$. 令 $s=1$，并结合 $\lambda\in Z(S)$，有

$$2(m+n)\beta(t)=2m\lambda t+2n\beta(t),\qquad 2m\beta(t)=2m\lambda t.$$

由于 S 的特征不为 $2mn(m+n)(2m+n)(m^2+n^2+mn)$，因此 $\beta(t)=\lambda t$，即 β 是中心化子. 由式(15)和式(24)知，对任意的 $s,t\in S$，有

$$\begin{aligned}(m+n)\lambda[s,t]i=(m+n)\beta([s,t])i=(m+n)\varphi([s,ti])=\\ m[\varphi(s),ti]+n[s,\varphi(ti)]=m[\alpha(s),ti]+n[s,\beta(t)i]=\\ m[\alpha(s),ti]+n\lambda[s,t]i.\end{aligned}$$

由于 S 的特征不为 $2mn(m+n)(2m+n)(m^2+n^2+mn)$，故

$$[\alpha(s)-\lambda s,t]=0,$$

表明 $\alpha(s)-\lambda s\in Z(S)$. 令 $\alpha(s)-\lambda s=h(s)\in Z(S)$，则 $\alpha(s)=\lambda s+h(s)$. 对任意的 $s,t\in S$，根据式(15)并结合 α 的定义和 $h(s)\in Z(S)$，有

$$\begin{aligned}\lambda(m+n)[s,t]+(m+n)h([s,t])=(m+n)\alpha([s,t])=(m+n)\varphi([s,t])=\\ m[\varphi(s),t]+n[s,\varphi(t)]=\\ m[\alpha(s),t]+n[s,\alpha(t)]=\lambda(m+n)[s,t].\end{aligned}$$

由于 S 的特征不为 $2mn(m+n)(2m+n)(m^2+n^2+mn)$，因此 $h([s,t])=0$，表明 α 是 S 上的 Lie 中心

化子.

对任意的 $r=a+bi+cj+dk\in H(S)$(其中 $a,b,c,d\in S$)，由式(23)和式(24)，得

$$\varphi(r)=\varphi(a+bi+cj+dk)=\alpha(a)+\beta(b)i+\beta(c)j+\beta(d)k=$$
$$\lambda a+h(a)+\lambda bi+\lambda cj+\lambda dk=\lambda r+f(r),$$

其中 $\lambda\in Z(S)$，$f(r)=h(a)$. 由式(15)易知，对任意的 $u,r\in H(S)$，有 $f([u,r])=0$. 因此，φ 是 $H(S)$上的 Lie 中心化子.

参　考　文　献

[1] BEIDAR K I, MARTINDAL Ⅲ W S, MIKHALEV A V. Rings with Generalized Identities [M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1996: 51-86.

[2] ZALAR B. On Centralizers of Semiprime Rings [J]. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 1991, 32(4): 609-614.

[3] VUKMAN J, KOSI-ULBL I. On Centralizers of Semiprime Rings [J]. Aequationes Mathematicae, 2003, 66(3): 277-283.

[4] VUKMAN J. On (m,n)-Jordan Centralizers in Rings and Algebras [J]. Glasnik Matematički: Serija Ⅲ, 2010, 45(1): 43-53.

[5] FOŠNER A, JING W. Lie Centralizers on Triangular Algebras and Nest Algebras [J]. Advances in Operator Theory, 2019, 4(2): 342-350.

[6] JABEEN A. Lie (Jordan) Centralizers on Generalized Matrix Algebras [J]. Communications in Algebra, 2020, 49(1): 278-291.

[7] 杨翠，张建华. 套代数上的广义 Jordan 中心化子 [J]. 数学学报(中文版)，2010，53(5)：975-980.（YANG C, ZHANG J H. Generalized Jordan Centralizers on Nest Algebras [J]. Acta Mathematica Sinica (Chinese Series), 2010, 53(5): 975-980.）

[8] 曹美虹，张建华. 四元数环上的 Jordan 和 Lie 中心化子 [J]. 山东大学学报(理学版)，2021，56(12)：67-71.（CAO M H, ZHANG J H. Jordan and Lie Centralizers on Quaternion Rings [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2021, 56(12): 67-71.）

[9] GHAHRAMANI H, GHOSSEIRI M N, HEIDARI ZADEH L. On the Lie Derivations and Generalized Lie Derivations of Quaternion Rings [J]. Communications in Algebra, 2019, 47(3): 1215-1221.

[10] GHAHRAMANI H, GHOSSEIRI M N, SAFARI S. On Derivations, Biderivations and Superbiderivations of Quaternion Rings [J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2, 2021, 70(2): 665-674.

（责任编辑：李　琦）