

一类抽象非自治脉冲发展方程的 Lipschitz 伪轨跟踪性

肖 阳

(西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070)

摘要: 在 Banach 空间研究一类抽象非自治脉冲发展方程, 用压缩映射原理在较弱条件下证明该问题的 Lipschitz 伪轨跟踪性. 所得结果不仅适用于特殊情形, 而且对一般方程也具有普适性.

关键词: 脉冲发展方程; Lipschitz 伪轨跟踪性; 指数二分性

中图分类号: O175.15; O177.91 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)06-1543-06

Lipschitz Pseudo-orbit Shadowing Property for a Class of Abstract Non-autonomous Impulsive Evolution Equations

XIAO Yang

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The author investigated a class of abstract non-autonomous impulsive evolution equations in Banach spaces and proved the Lipschitz pseudo-orbit shadowing property for the problem under relatively weak conditions by using the contraction mapping principle. The obtained results are not only applicable to specific cases, but also have universality for general equations.

Keywords: impulsive evolution equation; Lipschitz pseudo-orbit shadowing property; exponential dichotomy

0 引 言

在现实生活中, 短时间内系统状态发生快速变化的现象称为脉冲现象. 脉冲发展方程是描述该类现象的有效数学工具, 与普通微分方程相比, 脉冲发展方程能充分考虑瞬时突变现象对系统发展的影响. 稳定性问题是脉冲发展方程研究的核心内容之一, 跟踪性作为动力系统的一个重要属性, 与系统的稳定性紧密相关. 在许多情况下, 找到给定微分方程的精确解非常复杂, 甚至是不可能的, 因此研究这类系统的一种可行方法是寻找它们的近似解. 随着计算能力的提升, 近年来人们能在较长的时间段内构建这些方程的近似解. 但这些近似解只有在它们与原始方程的精确解一致时才有意义, 即只有当系统存在一个真正的轨道, 即使其初始条件略有不同, 只要保持在该轨道附近时, 近似解才有效, 系统表现出的这种属性称为伪轨跟踪性.

Bowen^[1]首先提出了伪轨跟踪性的概念. Palmer^[2]证明了在 \mathbb{R}^d 上的自治差分方程具有伪轨跟踪

收稿日期: 2025-01-03. 网络首发日期: 2025-06-26.

作者简介: 肖 阳(1999—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事非线性泛函分析的研究, E-mail: 2891620801@qq.com.

基金项目: 甘肃省自然科学基金(批准号: 24JRRA780).

网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20250625.1500.002>.

性. Meyer 等^[3]研究表明, \mathbb{R}^d 上的自治微分方程也有类似结果. Chow 等^[4]研究了 Banach 空间中半线性抛物方程在不变双曲集中具有伪轨跟踪性. Palmer^[5]研究表明, 当自治微分方程的线性化方程在 \mathbb{R}^d 上满足某种三分性时, 原方程具有伪轨跟踪性. Backes 等^[6]将文献[5]的结果推广到非自治发展方程. Backes 等^[7]将非自治发展方程与具体脉冲相结合, 进一步优化了伪轨跟踪性的相关结果. Backes 等^[8]提出了 Lipschitz 伪轨跟踪性的概念.

基于上述工作, 本文考虑下列 Banach 空间 X 中含脉冲的抽象非自治发展方程的 Lipschitz 伪轨跟踪性问题:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + f(t, u(t)), & t \neq t_k, \\ \Delta u|_{t=t_k} = I_k(u(t_k)), & k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $A(t): D(A(t)) \subset X \rightarrow X, t \in \mathbb{R}$, 非线性项 $f: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, 脉冲函数 $I_k: X \rightarrow X, u$ 在 $t = t_k$ 处的跃度为

$$\Delta u|_{t=t_k} = u(t_k^+) - u(t_k^-), \quad k \in \mathbb{Z},$$

这里 $u(t_k^+)$ 和 $u(t_k^-)$ 分别表示 u 在 $t = t_k$ 处的右极限和左极限. 设 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 \mathbb{R} 上严格递增的脉冲时刻序列, 即

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} t_k = -\infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty.$$

本文主要研究在一般脉冲条件下, 当非线性项 f 满足较弱的 Lipschitz 条件时, 抽象非自治发展方程(1)的 Lipschitz 伪轨跟踪性.

1 预备知识

设 $(X, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间, 考虑 X 上的线性脉冲发展方程:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t), & t \neq t_k, \\ \Delta u|_{t=t_k} = I_k(u(t_k)), & k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ 是 X 中一族未必有界的线性算子, 对任意的 $k \in \mathbb{Z}$, 令 \mathcal{N} 表示 $u: \mathbb{R} \rightarrow X$ 在 $(t_k, t_{k+1}]$ 上连续, $u(t_k^+)$ 存在, 且不连续的点只有第一类间断点. 易见 \mathcal{N} 为 Banach 空间, 其范数定义为

$$\|u\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\| < +\infty.$$

定义 1^[9-11] 设 $\{T(t, s)\}_{t, s \in \mathbb{R}}$ 是与方程(2)相关的发展族, 存在 X 上的投影族 $U(t) (t \in \mathbb{R})$ 和常数 $M, \lambda > 0$, 使得:

- 1) 对任意的 $t \geq s, T(t, s)U(s) = U(t)T(t, s)$;
- 2) 对任意的 $t \geq s, T_V(t, s) = V(s)X \rightarrow V(t)X$ 是可逆的, 其中 $V(t) = \text{Id} - U(t), T_V(t, s)$ 是 $T(t, s)$ 在 $V(s)$ 上的限制, 记 $T(s, t) = T_V(t, s)^{-1}, t \geq s$;
- 3) 对任意的 $t \geq s, \|T(t, s)U(s)\| \leq Me^{-\lambda(t-s)}$, 且当 $t < s$ 时, $\|T(t, s)V(s)\| \leq Me^{-\lambda(s-t)}$, 记

$$\mu(t, s) = \begin{cases} T(t, s)U(s), & t \geq s, \\ -T(t, s)V(s), & t < s. \end{cases} \tag{3}$$

特别地, 对任意的 $t, s \in \mathbb{R}$, 都有 $\|\mu(t, s)\| \leq Me^{-\lambda|t-s|}$, 则称发展族 $\{T(t, s)\}_{t, s \in \mathbb{R}}$ 具有 M, λ 系数的指数二分性.

定义 2^[12] 对任意的 $\delta > 0$, 存在映射 $y: \mathbb{R} \rightarrow X$ 在 (t_k, t_{k+1}) 上可微, 且满足

$$\|y'(t) - A(t)y(t) - f(t, y(t))\|_\infty \leq \delta, \quad t \neq t_k, \tag{4}$$

$$\|I_k(y(t_k)) - y(t_k^+) + y(t_k^-)\|_\infty \leq \delta, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

则称 y 是方程(1)的伪轨.

定义 3^[13] 对任意给定的 $L > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 若 $0 < \delta \leq \delta_0$, 且 y 是方程(1)的伪轨, $t \in \mathbb{R}$, 存在方程(1)的解 $x: \mathbb{R} \rightarrow X$, 使得

$$\|x - y\|_\infty \leq L\delta,$$

则称方程(1)具有 Lipschitz 伪轨跟踪性.

方程(1)中非线性项 f 和脉冲函数 I_k 需满足如下条件:

(i) 函数 f 满足 Lipschitz 条件

$$\| f(t, \gamma) - f(t, v) \| \leq C(t) \| \gamma - v \|, \quad \gamma, v \in X, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

其中 $C(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 且 p 次局部可积, 令

$$BS^p(\mathbb{R}, X) = \left\{ C \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, X), \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |C(s)|^p ds < \infty, \| C \|_{BS^p} = \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |C(s)|^p ds \right)^{1/p} \right\}.$$

(ii) 脉冲函数 Lipschitz 连续

$$\| I_k(\varphi) - I_k(\psi) \| \leq h_k \| \varphi - \psi \|, \quad \varphi, \psi \in X, \quad h_k \in \mathbb{R}^+, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

2 主要结果

定理 1 对任意的 $p \geq 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q 为 p 的共轭数), 存在 $C \in BS^p(\mathbb{R}, X)$, 满足

$$\omega := 2M \left((\lambda q)^{-1/q} (1 - e^{-\lambda q})^{1/q} (1 - e^{-\lambda})^{-1} \| C \|_{BS^p} + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \right) < 1,$$

则方程(1)具有 Lipschitz 伪轨跟踪性.

证明: 任取方程(1)的伪轨 y , 存在 $z \in \mathcal{N}$. 定义 $\mathcal{F}z$ 为

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}z)(t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t, r) (A(r)y(r) + f(r, y(r) + z(r)) - y'(r)) dr + \\ & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(t, t_k) (I_k(y + z)(t_k) - y(t_k^+) + y(t_k^-)). \end{aligned} \tag{8}$$

对任意的 $t \in \mathbb{R}, t \neq t_k, k \in \mathbb{Z}$, 由式(3), (4), (6)可知

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t, r) (A(r)y(r) + f(r, y(r) + z(r)) - y'(r)) dr \right\| \leq \\ & \left\| \int_{-\infty}^t T(t, r) U(r) (A(r)y(r) + f(r, y(r) + z(r)) - y'(r)) dr \right\| + \\ & \left\| \int_t^{+\infty} T(t, r) V(r) (A(r)y(r) + f(r, y(r) + z(r)) - y'(r)) dr \right\| \leq \\ & \int_{-\infty}^t \| T(t, r) U(r) \| (\| A(r)y(r) + f(r, y(r)) - y'(r) \| + \\ & \| f(r, y(r) + z(r)) - f(r, y(r)) \|) dr + \\ & \int_t^{+\infty} \| T(t, r) V(r) \| (\| A(r)y(r) + f(r, y(r)) - y'(r) \| + \\ & \| f(r, y(r) + z(r)) - f(r, y(r)) \|) dr \leq \\ & \int_{-\infty}^t M e^{-\lambda(t-r)} (\delta + C(r) \| z(r) \|) dr + \int_t^{+\infty} M e^{-\lambda(r-t)} (\delta + C(r) \| z(r) \|) dr \leq \\ & \frac{2M\delta}{\lambda} + \int_{-\infty}^t M e^{-\lambda(t-r)} C(r) \| z \|_{\infty} dr + \int_t^{+\infty} M e^{-\lambda(r-t)} C(r) \| z \|_{\infty} dr \leq \\ & \frac{2M\delta}{\lambda} + M \| z \|_{\infty} \left(\int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-r)} C(r) dr + \int_t^{+\infty} e^{\lambda(r-t)} C(r) dr \right) = \\ & \frac{2M\delta}{\lambda} + M \| z \|_{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{t-n-1}^{t-n} e^{-\lambda(t-r)} C(r) dr + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t+n}^{t+n+1} e^{-\lambda(r-t)} C(r) dr \right), \end{aligned}$$

由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} & \frac{2M\delta}{\lambda} + M \| z \|_{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{t-n-1}^{t-n} e^{-\lambda(t-r)} C(r) dr + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t+n}^{t+n+1} e^{-\lambda(r-t)} C(r) dr \right) \leq \\ & \frac{2M\delta}{\lambda} + M \| z \|_{\infty} \| C \|_{BS^p} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{t-n-1}^{t-n} e^{-\lambda q(t-r)} dr \right)^{1/q} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{t+n}^{t+n+1} e^{-\lambda q(r-t)} dr \right)^{1/q} \right) = \\ & \frac{2M\delta}{\lambda} + M \| z \|_{\infty} \| C \|_{BS^p} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-\lambda q n} - e^{-\lambda q(n+1)}}{\lambda q} \right)^{1/q} + \left(\frac{e^{-\lambda q(n+1)} - e^{-\lambda q n}}{-\lambda q} \right)^{1/q} \right) = \end{aligned}$$

$$\frac{2M\delta}{\lambda} + 2M(\lambda q)^{-1/q} (1 - e^{-\lambda q})^{1/q} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n} \| C \|_{BS^p} \| z \|_{\infty} =$$

$$\frac{2M\delta}{\lambda} + 2M(\lambda q)^{-1/q} (1 - e^{-\lambda q})^{1/q} (1 - e^{-\lambda})^{-1} \| C \|_{BS^p} \| z \|_{\infty}.$$

对任意的 $k \in \mathbb{Z}$, 由定义 1 及式(5),(7)可知

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(t, t_k) (I_k(y+z)(t_k) - y(t_k^+) + y(t_k^-)) \right\| \leq$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \| \mu(t, t_k) \| \| I_k(y+z)(t_k) - y(t_k^+) + y(t_k^-) + I_k(y)(t_k) - I_k(y)(t_k) \| \leq$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \| \mu(t, t_k) \| (\| I_k(y)(t_k) - y(t_k^+) + y(t_k^-) \| + \| I_k(y+z)(t_k) - I_k(y)(t_k) \|) \leq$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} M e^{-\lambda |t-t_k|} (\delta + h_k \| z(t_k) \|) \leq M (\delta + \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \| z \|_{\infty}).$$

因此

$$\| \mathcal{F}z \| \leq l\delta + \omega \| z \|_{\infty}, \tag{9}$$

其中 $l = \frac{2M}{\lambda} + M$, 由上述估计可知 $\| \mathcal{F}\theta \| \leq l\delta$, 且对任意的 $z \in \mathcal{N}$, 均有 $\mathcal{F}z \in \mathcal{N}$.

任取 $z_1, z_2 \in \mathcal{N}$, 对任意的 $t \neq t_k, t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$, 由式(8)可知

$$\| \mathcal{F}z_1(t) - \mathcal{F}z_2(t) \| = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t, r) (f(r, y(r) + z_1(r)) - f(r, y(r) + z_2(r))) dr + \right.$$

$$\left. \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(t, t_k) (I_k(y+z_1)(t_k) - I_k(y+z_2)(t_k)) \right\| \leq$$

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t, r) (f(r, y(r) + z_1(r)) - f(r, y(r) + z_2(r))) dr \right\| +$$

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(t, t_k) (I_k(y+z_1)(t_k) - I_k(y+z_2)(t_k)) \right\|,$$

由式(3),(6)及 Hölder 不等式可得

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t, r) (f(r, y(r) + z_1(r)) - f(r, y(r) + z_2(r))) dr \right\| \leq$$

$$\left\| \int_{-\infty}^t T(t, r) U(r) (f(r, y(r) + z_1(r)) - f(r, y(r) + z_2(r))) dr \right\| +$$

$$\left\| \int_t^{+\infty} T(t, r) V(r) (f(r, y(r) + z_1(r)) - f(r, y(r) + z_2(r))) dr \right\| \leq$$

$$\int_{-\infty}^t \| T(t, r) U(r) \| \| f(r, y(r) + z_1(r)) - f(r, y(r) + z_2(r)) \| dr +$$

$$\int_t^{+\infty} \| T(t, r) V(r) \| \| f(r, y(r) + z_1(r)) - f(r, y(r) + z_2(r)) \| dr \leq$$

$$\int_{-\infty}^t M e^{-\lambda(t-r)} C(r) \| z_1(r) - z_2(r) \| dr + \int_t^{+\infty} M e^{-\lambda(r-t)} C(r) \| z_1(r) - z_2(r) \| dr \leq$$

$$M \| z_1 - z_2 \|_{\infty} \left(\int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-r)} C(r) dr + \int_t^{+\infty} e^{-\lambda(r-t)} C(r) dr \right) =$$

$$M \| z_1 - z_2 \|_{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{t-n-1}^{t-n} e^{-\lambda(t-r)} C(r) dr + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t+n}^{t+n+1} e^{-\lambda(r-t)} C(r) dr \right) \leq$$

$$M \| z_1 - z_2 \|_{\infty} \| C \|_{BS^p} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{t-n-1}^{t-n} e^{-\lambda q(t-r)} dr \right)^{1/q} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{t+n}^{t+n+1} e^{-\lambda q(r-t)} dr \right)^{1/q} \right) \leq$$

$$M \| z_1 - z_2 \|_{\infty} \| C \|_{BS^p} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{e^{-\lambda q n} - e^{-\lambda q(n+1)}}{\lambda q} \right)^{1/q} + \left(\frac{e^{-\lambda q(n+1)} - e^{-\lambda q n}}{-\lambda q} \right)^{1/q} \right) \leq$$

$$2M(\lambda q)^{-1/q} (1 - e^{-\lambda q})^{1/q} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n} \| C \|_{BS^p} \| z_1 - z_2 \|_{\infty} \leq$$

$$2M(\lambda q)^{-1/q}(1 - e^{-\lambda q})^{1/q}(1 - e^{-\lambda})^{-1} \|C\|_{\text{BS}^p} \|z_1 - z_2\|_\infty.$$

对任意的 $k \in \mathbb{Z}$, 由定义 1 及式(7)可得

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(t, t_k) (I_k(y + z_1)(t_k) - I_k(y + z_2)(t_k)) \right\| \leq \\ & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\mu(t, t_k)\| \|I_k(y + z_1)(t_k) - I_k(y + z_2)(t_k)\| \leq \\ & \sum_{k \in \mathbb{Z}} M e^{-\lambda |t - t_k|} \|I_k(y + z_1)(t_k) - I_k(y + z_2)(t_k)\| \leq \\ & M \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \|z_1(t_k) - z_2(t_k)\| \leq M \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \|z_1 - z_2\|_\infty. \end{aligned}$$

对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 由题设可知

$$\|(\mathcal{F}z_1)(t) - (\mathcal{F}z_2)(t)\| \leq \omega \|z_1 - z_2\|_\infty. \tag{10}$$

设 $L := \frac{l}{1 - \omega} > 0$, $\mathcal{D} := \{z \in \mathcal{N}, \|z\|_\infty \leq L\delta\}$, 任取 $z \in \mathcal{D}$, 下面说明 $\mathcal{F}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. 由于

$$\|\mathcal{F}z\|_\infty \leq \|\mathcal{F}\mathcal{H}\|_\infty + \|\mathcal{F}z - \mathcal{F}\mathcal{H}\|_\infty \leq l\delta + \omega \|z\|_\infty \leq l\delta + \omega L\delta = L\delta,$$

因此 $\mathcal{F}z \in \mathcal{D}$, $\mathcal{F}|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ 是一个压缩映射, 由 z 的任意性可知, \mathcal{F} 在 \mathcal{D} 中有唯一的不动点 z , 使得 $\mathcal{F}z = z$.

对任意的 $t, s \in \mathbb{R}$, 不妨假设 $t \geq s$, 由定义 1 及式(8)可知

$$\begin{aligned} z(t) - T(t, s)z(s) &= \int_{-\infty}^t T(t, r)U(r)(A(r)y(r) + f(r, y(r) + z(r)) - y'(r))dr + \\ & \sum_{t \geq t_k} T(t, t_k)U(t_k)(I_k(y + z)(t_k) - y(t_k^+) + y(t_k^-)) - \\ & \int_t^{+\infty} T(t, r)V(r)(A(r)y(r) + f(r, y(r) + z(r)) - y'(r))dr - \\ & \sum_{t < t_k} T(t, t_k)V(t_k)(I_k(y + z)(t_k) - y(t_k^+) + y(t_k^-)) - \\ & \int_{-\infty}^s T(t, r)U(r)(A(r)y(r) + f(r, y(r) + z(r)) - y'(r))dr - \\ & \sum_{s \geq t_k} T(t, t_k)U(t_k)(I_k(y + z)(t_k) - y(t_k^+) + y(t_k^-)) + \\ & \int_s^{+\infty} T(t, r)V(r)(A(r)y(r) + f(r, y(r) + z(r)) - y'(r))dr + \\ & \sum_{s < t_k} T(t, t_k)V(t_k)(I_k(y + z)(t_k) - y(t_k^+) + y(t_k^-)) = \\ & \int_s^t T(t, r)(A(r)y(r) + f(r, y(r) + z(r)) - y'(r))dr + \\ & \sum_{s < t_k \leq t} T(t, t_k)(I_k(y + z)(t_k) - y(t_k^+) + y(t_k^-)), \end{aligned} \tag{11}$$

当 $t \neq t_k, k \in \mathbb{Z}$ 时, 对式(11)两边关于 t 求导可得

$$\begin{aligned} z'(t) - A(t)T(t, s)z(s) &= A(t)y(t) + f(t, y(t) + z(t)) - y'(t) + \\ & A(t) \int_s^t T(t, r)(A(r)y(r) + f(r, y(r) + z(r)) - y'(r))dr + \\ & A(t) \sum_{s < t_k \leq t} T(t, t_k)(I_k(y + z)(t_k) - y(t_k^+) + y(t_k^-)) = \\ & A(t)y(t) + f(t, y(t) + z(t)) - y'(t) + A(t)(z(t) - T(t, s)z(s)), \end{aligned}$$

整理得

$$y'(t) + z'(t) = A(t)(y(t) + z(t)) + f(t, y(t) + z(t)). \tag{12}$$

同理, 对于式(11), 令 $t = t_k, s \rightarrow t_k^-, k \in \mathbb{Z}$, 可得

$$z(t_k) - z(t_k^-) = (y + z)(t_k^+) - (y + z)(t_k^-) - y(t_k^+) + y(t_k^-).$$

进一步, 令 $z(t_k) \rightarrow z(t_k^+)$, $k \in \mathbb{Z}$, 有

$$z(t_k^+) - z(t_k^-) = (y + z)(t_k^+) - (y + z)(t_k^-) - y(t_k^+) + y(t_k^-),$$

整理得

$$I_k(y + z)(t_k) = (y + z)(t_k^+) - (y + z)(t_k^-). \quad (13)$$

类似地, 当 $t <_s$ 时上述等式仍成立.

结合式(12), (13), 可得 $x := y + z$ 是方程(1)的解. 由于 $z \in \mathcal{D}$ 且满足定义 3 中的伪轨跟踪性, 因此方程(1)具有 Lipschitz 伪轨跟踪性. 命题得证.

参 考 文 献

- [1] BOWEN R. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms [J]. Lecture Notes in Mathematics, 1975, 470: 11-25.
- [2] PALMER K J. Exponential Dichotomies, the Shadowing Lemma and Transversal Homoclinic Points [J]. Dynamics Reported, 1988, 1: 265-306.
- [3] MEYER K R, SELL G R. An Analytic Proof of the Shadowing Lemma [J]. Funkcialaj Ekvacioj, 1987, 30(1): 127-133.
- [4] CHOW S N, LIN X B, PALMER K J. A Shadowing Lemma with Applications to Semilinear Parabolic Equations [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1989, 20(3): 547-557.
- [5] PALMER K J. Shadowing and Silnikov Chaos [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1996, 27(9): 1075-1093.
- [6] BACKES L, DRAGIĆEVIĆ D. A General Approach to Nonautonomous Shadowing for Nonlinear Dynamics [J]. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2021, 170: 102996-1-102996-30.
- [7] BACKES L, DRAGIĆEVIĆ D, SINGH L. Shadowing for Nonautonomous and Nonlinear Dynamics with Impulses [J]. Monatshefte für Mathematik, 2022, 198(3): 485-502.
- [8] BACKES L, DRAGIĆEVIĆ D, ONITSUKA M, et al. Conditional Lipschitz Shadowing for Ordinary Differential Equations [J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2024, 36(4): 3535-3552.
- [9] DRAGIĆEVIĆ D. Generalized Dichotomies and Hyers-Ulam Stability [J]. Results in Mathematics, 2024, 79(1): 37-1-37-14.
- [10] BACKES L, DRAGIĆEVIĆ D, PITUK M. Shadowing, Hyers-Ulam Stability and Hyperbolicity for Nonautonomous Linear Delay Differential Equations [J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2025, 27(2): 2450012-1-2450012-22.
- [11] BACKES L, DRAGIĆEVIĆ D. Shadowing for Nonautonomous Dynamics [J]. Advanced Nonlinear Studies, 2019, 19(2): 425-436.
- [12] PIYUGIN S Y, TIKHOMIROV S. Lipschitz Shadowing Implies Structural Stability [J]. Nonlinearity, 2010, 23(10): 2509-2515.
- [13] BACKES L, DRAGIĆEVIĆ D. Lipschitz Shadowing for Contracting/Expanding Dynamics on Average [J]. Analysis and Mathematical Physics, 2025, 15(2): 28-1-28-21.

(责任编辑: 赵立芹)