doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2025010

不定半正 Sturm-Liouville 边值问题正解的存在性

卢　睿
(西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070)

摘要: 考虑一类奇异二阶常微分方程边值问题

$$\begin{cases} -u''=\lambda h(t)f(u), \quad t\in(0,1), \\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0, \\ \gamma u(1)+\delta u'(1)=0 \end{cases}$$

正解的存在性, 其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\geqslant 0$ 是常数, $\lambda>0$ 是一个参数, $h\in L^1((0,1),[0,+\infty))$, $f\in C((0,+\infty),\mathbb{R})$ 且在零点处奇异, 在无穷远处满足超线性增长的条件. 基于 Krasnoselskii 不动点定理证明存在一个常数 $\lambda_0>0$, 使得当 $\lambda\in(0,\lambda_0)$ 时, 该问题至少有一个正解.

关键词: 正解; 半正问题; 奇异边值问题; 锥
中图分类号: O175.8　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1671-5489(2025)06-1565-07

Existence of Positive Solutions for Uncertain Semipositive Sturm-Liouville Boundary Value Problems

LU Rui
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: The author considers the existence of positive solutions for the boundary value problems of a class of singular second-order ordinary differential equations

$$\begin{cases} -u''=\lambda h(t)f(u), \quad t\in(0,1), \\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0, \\ \gamma u(1)+\delta u'(1)=0, \end{cases}$$

where $\alpha,\beta,\gamma,\delta\geqslant 0$ are constants, $\lambda>0$ is a parameter, $h\in L^1((0,1),[0,+\infty))$, $f\in C((0,+\infty),\mathbb{R})$ and singular at zero, satisfying the condition of superlinear growth at infinity. Based on the Krasnoselskii fixed point theorem, the author proves that there exists a constant $\lambda_0>0$, such that the problem has at least one positive solution when $\lambda\in(0,\lambda_0)$.

Keywords: positive solution; semipositive problem; singular boundary value problem; cone

1 引言及主要结果

目前, 关于非线性二阶常微分方程边值问题的研究已有很多结果, 采用的方法有锥上的不动点

收稿日期: 2025-01-03.　**网络首发日期:** 2025-09-01.
作者简介: 卢　睿(2002—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事常微分方程边值问题的研究, E-mail: lr18793535196@163.com.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12061064).
网络首发地址: https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20250829.1756.001.

定理、上下解方法、时间映像估计和分歧理论等[1-13]. 特别地, Anuradha 等[4]研究了非线性二阶常微分方程边值问题

$$\begin{cases} (p(t)u')' + \lambda f_1(t,u) = 0, \quad r < t < R, \\ au(r) - bp(r)u'(r) = 0, \\ cu(R) + dp(R)u'(R) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性, 其中 $\lambda>0$ 是一个参数, $a,b,c,d>0$ 是常数且满足 $ac+ad+bc>0$. 文献[4]利用锥上不动点定理得到如下结果.

定理 1[4] 假设下列条件成立:

1) 对任意的 $t\in[r,R]$, $p\in C([r,R],[0,+\infty))$ 且 $p(t)>0$;

2) $f_1:[r,R]\times[0,\infty)\to R$ 连续;

3) 对每个 $t\in[r,R]$, $u\geqslant 0$, 存在 $M>0$ 使得 $f_1(t,u)>-M$;

4) $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{f_1(t,u)}{u}=\infty$ 在 (r,R) 的任意紧子区间上一致成立.

则存在一个常数 $\lambda^*>0$, 使得当 $\lambda\in(0,\lambda^*)$ 时, 问题(1)有一个正解.

Sun 等[2]利用不动点指数理论研究了非线性二阶常微分方程边值问题

$$\begin{cases} -u''(x) = h(x)f(u), \quad 0 < x < 1, \\ \alpha_1 u(0) - \beta_1 u'(0) = 0, \\ \alpha_2 u(1) + \beta_2 u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

正解的存在性, 其中: $f\in C([0,\infty),\mathbb{R})$, 且满足 $f(s)>-q$, $q>0$ 是一个常数; $h\in C((0,1),(0,\infty))$ 在 0 和 1 处奇异, 且满足

$$\int_0^1 h(s)G(s,s)\mathrm{d}s < +\infty, \tag{3}$$

这里 $G(t,s)$ 表示问题(2)相应的齐次线性问题的格林函数.

Sun 等[2]虽在权函数 h 奇异的情形下获得了半正问题(2)正解的存在性, 但所得结果要求 h 是连续的, f 是下方有界的. 一个自然的问题是: 当 h 是一个可积函数且 f 是一个下方无界的函数时, 是否还能得到类似结论. 事实上, 当权函数 h 是一个可积函数时, 相应问题的解属于哪个函数空间并不清楚. 此外, 对于下方无界的非线性项 f, 在证明过程中可能出现积分发散的情形.

基于此, 本文用锥上不动点理论考察下列奇异 Sturm-Liouville 问题

$$\begin{cases} -u'' = \lambda h(t)f(u), \quad 0 < t < 1, \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \\ \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

正解的存在性, 其中 $\lambda>0$ 是一个参数, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\geqslant 0$ 是常数, 且满足 $\rho=\gamma\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta>0$. 本文总假设:

(H_1) $h \in X := \left\{\varphi \in L^1((0,1),[0,\infty)) \,\middle|\, \int_0^1 G(t,t)\varphi(t)\mathrm{d}t < +\infty\right\}$, 其中

$$G(t,s) = \frac{1}{\rho}\begin{cases} (\gamma+\delta-\gamma t)(\beta+\alpha s), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \\ (\gamma+\delta-\gamma s)(\beta+\alpha t), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1; \end{cases}$$

(H_2) $f\in C((0,+\infty),\mathbb{R})$, 且满足 $\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{f(s)}{s}=\infty$;

(H_3) 存在一个常数 $\xi\in(0,1)$, 使得 $\limsup\limits_{t\to 0} t^{\xi}|f(t)|<\infty$.

本文的主要结果如下:

定理 2 假设条件(H_1)~(H_3)成立, 则存在一个常数 $\lambda_0>0$, 使得当 $\lambda\in(0,\lambda_0)$ 时, 问题(4)至少存在一个正解. 进一步, 当 $\lambda\to 0^+$ 时, 有 $u_\lambda\to\infty$ 在 $t\in(0,1)$ 的任意紧子区间上一致成立.

注 1 相比于文献[2,4]获得的主要结果, 本文在更弱的条件下不仅获得了问题(4)正解的存在性, 而且获得了正解的渐近性质.

例 1　考虑奇异 Sturm-Liouville 问题

$$\begin{cases} -u''=\lambda t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}\left(-\dfrac{1}{u^{1/3}}+u^2\right), & 0<t<1, \\ u(0)-u'(0)=0, \\ u(1)+u'(1)=0 \end{cases} \tag{5}$$

正解的存在性. 比较问题(5)与问题(4)，易见：

$$\alpha=\beta=\gamma=\delta=1,\quad h(t)=t^{-1/2}(1-t)^{-1/2},\quad f(s)=-\frac{1}{s^{1/3}}+s^2.$$

下面验证 h 和 f 满足定理 2 的条件. 对于 h，有

$$\int_0^1(2-t)(1+t)t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}\,\mathrm{d}t=\frac{19\pi}{24}<\infty,$$

所以条件(H_1)成立. 对于 f，有 $\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{f(s)}{s}=\lim\limits_{s\to\infty}\left(-\dfrac{1}{s^{4/3}}+s\right)=\infty$，且 $\lim\limits_{s\to 0}s^{1/2}\left|-\dfrac{1}{s^{1/3}}+s^2\right|=0$. 从而条件($H_2$),($H_3$)也成立. 因此，根据定理 2，当 $\lambda>0$ 且充分小时，问题(5)至少有一个正解.

2　预备知识

引理 1　设 $m\in X$. 若 u 满足

$$\begin{cases} u''(t)=-m(t), & 0<t<1, \\ \alpha u(0)-\beta u'(0)\geqslant 0, \\ \gamma u(1)+\delta u'(1)\geqslant 0, \end{cases} \tag{6}$$

则 $u(t)\geqslant\|u\|_\infty q(t)$，其中 $q(t)=\min\left\{\dfrac{\alpha t}{\beta+\alpha},\dfrac{\delta+(1-t)\gamma}{\delta+\gamma}\right\}$.

证明：记 $\phi(t):=\gamma+\delta-\gamma t$，$\psi(t):=\beta+\alpha t$，$0\leqslant t<1$，则格林函数 $G(t,s)$为

$$G(t,s)=\frac{1}{\rho}\begin{cases} \phi(t)\psi(s), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \\ \phi(s)\psi(t), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1. \end{cases}$$

u 是问题(6)的解等价于 u 满足积分方程

$$u(t)=\frac{1}{\rho}\phi(t)\int_0^t\psi(s)m(s)\,\mathrm{d}s+\frac{1}{\rho}\psi(t)\int_t^1\phi(s)m(s)\,\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,1].$$

当 $t=t_0$ 时，

$$G(t_0,s)=\frac{1}{\rho}\begin{cases} (\gamma+\delta-\gamma t_0)(\beta+\alpha s), & 0\leqslant s\leqslant t_0\leqslant 1, \\ (\beta+\alpha t_0)(\gamma+\delta-\gamma s), & 0\leqslant t_0\leqslant s\leqslant 1; \end{cases}$$

当 $t,t_0\leqslant s$ 时，

$$\frac{G(t,s)}{G(t_0,s)}=\frac{(1/\rho)(\beta+\alpha t)(\gamma+\delta-\gamma s)}{(1/\rho)(\beta+\alpha t_0)(\gamma+\delta-\gamma s)}=\frac{\beta+\alpha t}{\beta+\alpha t_0}\geqslant\frac{\alpha t}{\beta+\alpha};$$

当 $t\leqslant s\leqslant t_0$ 时，

$$\frac{G(t,s)}{G(t_0,s)}=\frac{(1/\rho)(\beta+\alpha t)(\gamma+\delta-\gamma s)}{(1/\rho)(\beta+\alpha s)(\gamma+\delta-\gamma t_0)}=\frac{(\beta+\alpha t)(\gamma+\delta-\gamma s)}{(\gamma+\delta-\gamma t_0)(\beta+\alpha s)}\geqslant\frac{\alpha t}{\beta+\alpha};$$

当 $s<t,t_0$ 时，

$$\frac{G(t,s)}{G(t_0,s)}=\frac{(1/\rho)(\beta+\alpha s)(\gamma+\delta-\gamma t)}{(1/\rho)(\beta+\alpha s)(\gamma+\delta-\gamma t_0)}=\frac{\gamma+\delta-\gamma t}{\gamma+\delta-\gamma t_0}\geqslant\frac{\delta+(1-t)\gamma}{\delta+\gamma};$$

当 $t_0\leqslant s\leqslant t$ 时，

$$\frac{G(t,s)}{G(t_0,s)}=\frac{(1/\rho)(\beta+\alpha t)(\gamma+\delta-\gamma s)}{(1/\rho)(\beta+\alpha t_0)(\gamma+\delta-\gamma s)}\geqslant\frac{(\gamma+\delta-\gamma t)(\beta+\alpha s)}{(\beta+\alpha s)(\gamma+\delta-\gamma s)}\geqslant\frac{\delta+(1-t)\gamma}{\delta+\gamma}.$$

因此可得$\dfrac{G(t,s)}{G(t_0,s)}\geqslant q(t)$. 又因为 $s,t,t_0\in(0,1)$，故

$$u(t)=\frac{1}{\rho}\phi(t)\int_0^t\psi(s)m(s)\,\mathrm{d}s+\frac{1}{\rho}\psi(t)\int_t^1\phi(s)m(s)\,\mathrm{d}s\geqslant\|u\|_\infty q(t).$$

引理 2 若 $h\in X$，u 是边值问题(4)的一个解，即 u 满足积分方程

$$u(t)=\frac{\lambda}{\rho}\phi(t)\int_0^t\psi(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{\rho}\psi(t)\int_t^1\phi(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,1],$$

则 $u\in AC[0,1]\cap C^1(0,1)$，$u'\in AC(0,1)$. 此外，若 $h\in L^1(0,1)$，则 $u\in C^1[0,1]$，$u'\in AC[0,1]$.

证明：令 $h\in X$，u 满足积分方程

$$u(t)=\frac{\lambda}{\rho}\phi(t)\int_0^t\psi(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{\rho}\psi(t)\int_t^1\phi(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,1],$$

则可得

$$u(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s,\qquad t\in(0,1),$$

即 $u\in AC[0,1]$. 根据边值条件可知

$$u'(t)=\frac{\lambda}{\rho}\phi'(t)\int_0^t\psi(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{\rho}\psi'(t)\int_t^1\phi(s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s,\qquad t\in(0,1),$$

表明 $u\in C^1(0,1)$，$u'\in AC(0,1)$. 若 $h\in L^1(0,1)$，显然可知 $u\in C^1[0,1]$，$u'\in AC[0,1]$.

引理 3 令 $k\in X$，$u\in AC[0,1]$，满足

$$\begin{cases} u''\geqslant -k, & 0<x<1,\\ \alpha u(0)-\beta u'(0)\geqslant 0,\\ \gamma u(1)+\delta u'(1)\geqslant 0.\end{cases}\tag{7}$$

假设 $\|u\|_\infty>2\|k\|_X$，则 $u(x)\geqslant 0$，且

$$u(x)\geqslant(\|u\|_\infty-\|k\|_X)q(x),\qquad x\in(\tau,1),$$

其中 $q(x)=\min\left\{\dfrac{\alpha x}{\beta+\alpha},\dfrac{\delta+(1-x)\gamma}{\delta+\gamma}\right\}$.

证明：令 $w(x)$ 是问题

$$\begin{cases} -w''=k, & 0<x<1,\\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0,\\ \gamma u(1)+\delta u'(1)=0\end{cases}\tag{8}$$

的唯一解，则

$$w(x)=\frac{1}{\rho}\phi(x)\int_0^x\psi(s)k(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\rho}\psi(x)\int_x^1\phi(s)k(s)\mathrm{d}s.$$

相应地，有

$$\begin{aligned} w(x)=\frac{1}{\rho}\phi(x)\int_0^x\psi(s)k(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\rho}\psi(x)\int_x^1\phi(s)k(s)\mathrm{d}s\leqslant\\ \frac{1}{\rho}\phi(s)\int_0^x\psi(s)k(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\rho}\psi(s)\int_x^1\phi(s)k(s)\mathrm{d}s\leqslant\|k\|_X q(x),\end{aligned}$$

即

$$w(x)\leqslant\|k\|_X q(x).\tag{9}$$

设 $y(x):=u(x)+w(x)$，$y(\tau)=\|y\|_\infty$，则

$$\begin{cases} -y''(x)\geqslant 0, & 0<x<1,\\ \alpha u(0)-\beta u'(0)\geqslant 0,\\ \gamma u(1)+\delta u'(1)\geqslant 0,\end{cases}$$

由引理 1 可得

$$y(x)\geqslant\|y\|_\infty q(x),\qquad x\in(\tau,1).\tag{10}$$

从而根据式(9),(10)及 $y(x)=u(x)-w(x)$ 知，对任意 $x\in(\tau,1)$，有

$$u(x)=y(x)+w(x)\geqslant\|u\|_\infty q(x)-\|k\|_X q(x)\geqslant(\|u\|_\infty-\|k\|_X)q(x).$$

3 主要结果的证明

引理 4[14] 设 E 是一个 Banach 空间，T：$E\to E$ 是一个全连续算子. 假设存在 $h\in E$，$h\neq 0$，有正

常数 r,R 且 $r\neq R$，使得下列条件成立：

1）若 $y\in E$ 满足 $y=\theta Ty$，$\theta\in[0,1]$，则 $\|y\|\neq r$；

2）若 $y\in E$ 满足 $y=Ty+\xi h$，$\xi\geqslant 0$，则 $\|y\|\neq R$.

则 T 有一个不动点 $y\in E$，且 $\min\{r,R\}<\|y\|<\max\{r,R\}$.

下面证明定理 1. 令 $Y=C[0,1]$，范数为 $\|u\|_\infty=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$. 令 $\lambda>0$，对 $v\in Y$，定义 $T_\lambda(v)=u$，其中 u 是问题

$$\begin{cases}-u''=\lambda h(t)f(\tilde{v}),\quad 0<t<1,\\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0,\\ \gamma u(1)+\delta u'(1)=0\end{cases}\tag{11}$$

的解，这里 $\tilde{v}(t)=\max\{v(t),q(t)\}$，$q(t)=\min\left\{\dfrac{\alpha t}{\beta+\alpha},\dfrac{\delta+(1-t)\gamma}{\delta+\gamma}\right\}$. 则

$$u(t)=\frac{\lambda}{\rho}\phi(t)\int_0^t\psi(s)h(s)f(\tilde{v})\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{\rho}\psi(t)\int_t^1\phi(s)h(s)f(\tilde{v})\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,1].$$

注意到对所有的 t,s 均有 $G(t,s)\leqslant 1$，因此根据条件(H_3)知，存在一个依赖于 $\|v\|_\infty$ 的常数 M，使得

$$|f(\tilde{v})(s)|\leqslant\frac{M}{\tilde{v}^\beta(s)}\leqslant\frac{M}{\tilde{q}^\beta(s)}\in L^1(0,1).$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理可知，$u\in AC[0,1]$，i. e. T_λ：$Y\to Y$.

下证 T_λ 是全连续算子. 由于

$$u(t)=\frac{\lambda}{\rho}\phi(t)\int_0^t\psi(s)h(s)f(\tilde{v})\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{\rho}\psi(t)\int_t^1\phi(s)h(s)f(\tilde{v})\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,1],$$

因此连续性显然成立，下面只需证明 T_λ 是紧算子.

首先，证明算子 T_λ 的有界性. 算子 T_λ 在 $AC[0,1]$中显然有界.

其次，证明算子 T_λ 等度连续. 对每个 $t\in[0,1]$，$t_1<t_2$，有

$$\begin{aligned}|u(t_2)-u(t_1)|=&\left|\frac{\lambda}{\rho}\phi(t_2)\int_0^{t_2}\psi(s)h(s)f(\tilde{v})\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{\rho}\psi(t_2)\int_{t_2}^1\phi(s)h(s)f(\tilde{v})\mathrm{d}s-\right.\\&\left.\frac{\lambda}{\rho}\phi(t_1)\int_0^{t_1}\psi(s)h(s)f(\tilde{v})\mathrm{d}s-\frac{\lambda}{\rho}\psi(t_1)\int_{t_1}^1\phi(s)h(s)f(\tilde{v})\mathrm{d}s\right|\leqslant\\&\frac{\lambda}{\rho}|\phi(t_2)-\phi(t_1)|\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_0^r|\psi(s)h(s)f(\tilde{v})|\mathrm{d}s\mathrm{d}r\right.+\\&\frac{\lambda}{\rho}|\psi(t_2)-\psi(t_1)|\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_r^1|\phi(s)h(s)f(\tilde{v})|\mathrm{d}s\mathrm{d}r.\right.\end{aligned}$$

由于 $\int_0^r\psi(s)h(s)f(\tilde{v}(s))\mathrm{d}s<\infty$，$\int_r^1\phi(s)h(s)f(\tilde{v}(s))\mathrm{d}s<\infty$，根据 Arzéla-Ascoli 定理可知，$T_\lambda$ 是紧算子，故 T_λ 把 $C[0,1]$上的有界集映到 $C^1[0,1]$上的有界紧子集. 因此，T_λ 是 Y 上的全连续算子.

令 $a>1$，使得对 $z\geqslant a$，$f(z)>0$. 由于 $\lim\limits_{s\to 0_+}\sup s^\beta|f(s)|<\infty$，则存在一个常数 $b>0$，使得

$$|f(z)|\leqslant\frac{b}{z^\beta},\qquad z\in(0,a),$$

从而 $f(z)\geqslant-\dfrac{b}{z^\beta}$，且对所有的 $z>0$，有

$$|f(z)|\leqslant\frac{b}{z^\beta}+\hat{f}(\max\{z,a\}),\tag{12}$$

其中 $\hat{f}(t)=\sup\limits_{a\leqslant z\leqslant t}f(z)$，$t\geqslant a$，$\hat{f}$ 是非减的函数.

假设 $\lambda<\dfrac{a}{2(c_1+c_2f(a))}$，其中 $c_1=\int_0^1G(s,s)h(s)\dfrac{b}{q^\beta(s)}\mathrm{d}s$，$c_2=\int_0^1G(s,s)h(s)\mathrm{d}s$. 下面对 T_λ 验证引理 4 的假设条件.

1）存在 $r_\lambda>0$，使得若 $u\in Y$ 满足 $u=\theta T_\lambda u$，$\theta\in[0,1]$，则 $\|u\|_\infty\neq r_\lambda$.

事实上，令 $u\in Y$，满足 $u=\theta T_\lambda u$，$\theta\in(0,1]$，则 $\dfrac{u}{\theta}=T_\lambda$，因此 u 满足

$$u(t)=\lambda\theta\left(\frac{1}{\rho}\phi(t)\int_0^t\psi(s)h(s)f(\tilde{u})\mathrm{d}s+\frac{1}{\rho}\psi(t)\int_t^1\phi(s)h(s)f(\tilde{u})\mathrm{d}s\right),\qquad t\in[0,1].$$

从而对所有的 $s\in[0,1]$，$q(s)\leqslant 1$ 且 $a>1$，根据式(12)可得

$$|f(\tilde{u}(s))|\leqslant\frac{b}{\tilde{u}^\beta(s)}+\hat{f}(\max\{\tilde{u}(s),a\})\leqslant\frac{b}{q^\beta(s)}+\hat{f}(\max\{\tilde{u}(s),a\}),$$

于是

$$\begin{aligned}|u(t)|=&\left|\lambda\theta\left(\frac{1}{\rho}\phi(t)\int_0^t\psi(s)h(s)f(\tilde{u})\mathrm{d}s+\frac{1}{\rho}\psi(t)\int_t^1\phi(s)h(s)f(\tilde{u})\mathrm{d}s\right)\right|\leqslant\\&\lambda\int_0^1|G(s,s)h(s)f(\tilde{u}(s))|\mathrm{d}s\leqslant\\&\lambda\int_0^1G(s,s)h(s)\left[\frac{b}{q^\beta(s)}+\hat{f}(\max\{\|u\|_\infty,a\})\right]\mathrm{d}s\leqslant\\&\lambda\int_0^1G(s,s)h(s)\,\frac{b}{q^\beta(s)}\mathrm{d}s+\lambda\int_0^1G(s,s)h(s)\hat{f}(\max\{\|u\|_\infty,a\})\mathrm{d}s=\\&\lambda(c_1+c_2\hat{f}(\max\{\|u\|_\infty,a\})),\quad t\in[0,1],\end{aligned}$$

表明

$$\frac{\|u\|_\infty}{c_1+c_2\hat{f}(\max\{\|u\|_\infty,a\})}\leqslant\lambda.\tag{13}$$

由于 $\dfrac{a}{c_1+c_2\tilde{f}(a)}>2\lambda$ 且 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z}{c_1+c_2\tilde{f}(z)}=0$，因此根据条件($\mathrm{H}_1$)可知，存在 $r_\lambda>a$，使得

$$\frac{r_\lambda}{c_1+c_2\tilde{f}(r_\lambda)}=2\lambda.\tag{14}$$

结合式(13),(14)可推出 $\|u\|_\infty\neq r_\lambda$. 此时注意到当 $\lambda\to0$ 时，$r_\lambda\to\infty$.

2) 存在 $R_\lambda>r_\lambda$，使得若 $u=T_\lambda u+\zeta$，$\zeta\geqslant0$，则 $\|u\|_\infty\neq R_\lambda$.

令 $u\in Y$ 满足 $u=T_\lambda u+\xi$，$\xi\geqslant0$，则 $u-\xi=T_\lambda$，且

$$u(t)-\xi=\frac{\lambda}{\rho}\phi(t)\int_0^t\psi(s)h(s)f(\tilde{u})\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{\rho}\psi(t)\int_t^1\phi(s)h(s)f(\tilde{u})\mathrm{d}s.$$

令 $k(t)=\dfrac{b}{q^\beta(t)}$，$t\in(0,1)$，则由条件($\mathrm{H}_3$)可知，$k\in L^1(0,1)$. 因此，$u$ 满足

$$\begin{cases}-u''=\lambda h(t)f(\tilde{u}),\quad 0<t<1,\\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=\xi\geqslant0,\\ \gamma u(1)+\delta u'(1)=\xi\geqslant0,\end{cases}$$

且由 $f(z)\geqslant-\dfrac{b}{z^\beta}$ 可得 $f(\tilde{u}(t))\geqslant-\dfrac{b}{\tilde{u}^\beta(t)}\geqslant-\dfrac{b}{q^\beta(t)}=-k(t)$. 根据引理3可知，

$$u(t)\geqslant(\|u\|_\infty-\|k\|_X)q(x),\tag{15}$$

且 $\|u\|_\infty>2\|k\|_X$.

假设 $\|u\|>\max\{4\|k\|_X,8\}$，则结合式(15)，对 $t\in I=[1/4,3/4]$，有

$$u(t)\geqslant(\|u\|_\infty-\|k\|_X)q(x)\geqslant\left(\|u\|_\infty-\frac{1}{2}\|u\|_\infty\right)q(t)\geqslant\frac{1}{2}\|u\|_\infty q(t)\geqslant\frac{\|u\|_\infty}{8}.$$

又由于

$$G(t,s)\geqslant\min\left\{\frac{\psi(t)}{\psi(1)},\frac{\phi(t)}{\phi(1)}\right\}G(s,s)=\min\left\{\frac{\beta+(3/4)\alpha}{\beta+\alpha},1+\frac{(3/4)\gamma}{\delta}\right\}G(s,s)\geqslant\frac{\beta+(3/4)\alpha}{\beta+\alpha},\qquad s,t\in I,$$

因此

$$u(t)\geqslant\frac{\lambda}{\rho}\phi(t)\int_I\psi(s)h(s)f(\tilde{u})\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{\rho}\psi(t)\int_{I^c}\phi(s)h(s)f(\tilde{u})\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\frac{\beta+(3/4)\alpha}{\beta+\alpha}\lambda\hat{f}\left(\frac{\|u\|_\infty}{8}\right)\int_I h(s)\mathrm{d}s-\lambda\|k\|_X,\quad t\in I,$$

其中 $\hat{f}(t)=\inf\limits_{z\geqslant t}f(z)$．故

$$\frac{\frac{\beta+(3/4)\alpha}{\beta+\alpha}\hat{f}\left(\frac{\|u\|_\infty}{8}\right)\int_I h(s)\mathrm{d}s-\|k\|_X}{\|u\|_\infty}\leqslant\frac{1}{\lambda}.\tag{16}$$

当 $\|u\|_\infty\to\infty$ 时，式(16)左边积分也趋近于∞．说明当 $R_\lambda\gg 1$ 时，$\|u\|_\infty<R_\lambda$．

根据引理 4，T_λ 有一个不动点 u_λ，$\|u_\lambda\|_\infty>r_\lambda$．根据式(15)，当 λ 足够小时，u_λ 是问题(4)的一个正解；且对于 $t\in(0,1)$的紧子区间，当 $\lambda\to 0$ 时，$u_\lambda(t)\to\infty$．

参 考 文 献

[1] ERBE L H, WANG H Y. On the Existence of Positive Solutions of Ordinary Differential Equations [J]. Proceedings of the American Mathmatical Society, 1994, 120(3): 743-748.

[2] SUN J X, ZHANG G W. Nontrivial Solutions of Singular Sublinear Sturm-Liouville Problems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 326(1): 241-251.

[3] YAO Q L. An Existence Theorem of a Positive Solution to a Semipositone Sturm-Liouville Boundary Value Problem [J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23(12): 1401-1406.

[4] ANURADHA V, HAI D D, SHIVAJI R. Existence Results for Superlinear Semipositone BVP's [J]. Proceedings of the American Mathmatical Society, 1996, 124(3): 757-763.

[5] HAI D D, SHIVAJI R. Positive Radial Solutions for a Class of Singular Superlinear Problems on the Exterior of a Ball with Nonlinear Boundary Conditions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 456(2): 872-881.

[6] ASAKAWA H. Nonresonant Singular Two-Point Boundary Value Problems [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2001, 44(6): 791-809.

[7] DHANYA R, MORRIS Q, SHIVAJI R. Existence of Positive Radial Solutions for Superlinear, Semipositone Problems on the Exterior of a Ball [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 434(2): 1533-1548.

[8] PRASAD K R, WESEN L T, SREEDHAR N. Existence of Positive Solutions for Second-Order Undamped Sturm-Liouville Boundary Value Problems [J]. Asian-European Journal of Mathematics, 2016, 9(4): 1650089-1-1650089-9.

[9] MA R Y, THOMPSON B. Multiplicity Results for Second-Order Two-Point Boundary Value Problems with Superlinear or Sublinear Nonlinearities [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 303(2): 726-735.

[10] WEI M, LI Y X. Solvability for a Fully Elastic Beam Equation with Left-End Fixed and Right-End Simply Supported [J/OL]. Mathematical Problems in Engineering, (2021-06-08)[2024-12-26]. https://doi.org/10.1155/2021/5528270.

[11] LI Y X. Positive Solutions for Second Order Boundary Value Problems with Derivative Terms [J]. Mathematische Nachrichten, 2016, 289(16): 2058-2068.

[12] CONSTANTIN A. On a Two-Point Boundary Value Problem [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, 193(1): 318-328.

[13] DUNNINGER D R, WANG H Y. Existence and Multiplicity of Positive Solutions for Elliptic Systems [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1997, 29(9): 1051-1060.

[14] GUO D J, LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear Problems in Abstract Cones [M]. Boston: Academic Press, 1988: 39-137.

（责任编辑：赵立芹）