第 63 卷 第 6 期 吉 林 大 学 学 报 (理 学 版) Vol. 63 No. 6
2025 年 11 月 Journal of Jilin University (Science Edition) Nov 2025

doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2025014

Gorenstein u-S-平坦模

王珺杰，杨　刚
（兰州交通大学 数理学院，兰州 730070）

摘要： 设 R 是环，S 是 R 的乘法子集. 首先，基于 u-S-平坦模引入 Gorenstein u-S-平坦模的概念，利用长正合列定理和 u-S-平坦模的性质，研究 Gorenstein u-S-平坦模的同调性质，并给出 Gorenstein u-S-平坦模的等价刻画；其次，证明 Gorenstein u-S-平坦模类是投射可解类当且仅当它关于扩张封闭.

关键词： Gorenstein u-S-平坦模；u-S-平坦模；u-S-内射模
中图分类号： O154.2　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671-5489(2025)06-1579-07

Gorenstein u-S-Flat Modules

WANG Junjie, YANG Gang
(*School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: Let R be a ring, and S be a multiplicative subset of R. Firstly, based on the u-S-flat modules, we introduce the concept of Gorenstein u-S-flat modules, and use the long exact sequence theorem and the properties of u-S-flat modules to study the homological properties of Gorenstein u-S-flat modules, and give equivalent characterizations of Gorenstein u-S-flat modules. Secondly, we prove that the class of Gorenstein u-S-flat modules is projective solvable class if and only if it is closed with respect to extensions.

Keywords: Gorenstein u-S-flat module; u-S-flat module; u-S-injective module

目前，关于 Gorenstein 同调代数的研究已取得了许多成果. 例如：Enochs 等[1]引入并研究了任意结合环上的 Gorenstein 平坦模；Holm[2]对 Gorenstein 平坦模做了进一步研究；Mao 等[3]定义并研究了 Gorenstein FP-内射模；Bennis 等[4]引入并研究了强 Gorenstein 投射模、强 Gorenstein 内射模和强 Gorenstein 平坦模；Anderson 等[5]给出了 R-模的 S-有限和 S-Noetherian 环的概念，其中 R 是环，S 是 R 的乘法子集；Wang 等[6]给出了 S-挠模的概念：如果对任意的 $m\in M$，存在 $s\in S$，使得 $sm=0$，则称 R-模 M 是 S-挠模；Zhang[7]考虑了 S-挠模上的一致性，并将其称为 u-S-挠模，给出了 u-S-挠模的概念和一些基本性质，并将其作为基本条件，考虑了 S-平坦模的一致性，并命名为 u-S-平坦模，研究了 u-S-平坦模的等价刻画及其性质；文献[8-11]引入并研究了 u-S-内射模、u-S-投射模和 u-S-绝对纯模等，给出了 S-半单环、S-von Neumann 正则环、S-Noetherian 环、S-coherent 环的一致性研究，并讨论了结合环上的 S-弱整体维数. 受上述研究工作的启发，本文引入 Gorenstein u-S-平坦模的概念，并讨论其同调性质.

收稿日期： 2025-01-10.　**网络首发日期：** 2025-09-12.

第一作者简介： 王珺杰(1998—)，女，汉族，硕士研究生，从事环的同调理论的研究，E-mail：jinjiewang98@163.com. **通信作者简介：** 杨　刚(1980—)，男，汉族，博士，教授，从事环的同调理论的研究，E-mail：yanggang@mail.lzjtu.cn.

基金项目： 国家自然科学基金(批准号：12161049).
网络首发地址： https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20250911.1716.001.

1 预备知识

本文中的环均指有单位元的交换环，模均为酉 R-模. 设 R 是环，S 是 R 的乘法子集，即如果 $1\in S$，则对任意的 $s_1\in S$，$s_2\in S$，有 $s_1s_2\in S$. 设 M 为 R-模，M 的示性表示为 $M^+=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

定义 1[1] 设 M 是 R-模，如果存在 R-模的正合列

$$\mathbb{F}=\cdots\rightarrow F_1\rightarrow F_0\rightarrow F_{-1}\rightarrow\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Im}(F_0\rightarrow F_{-1})$，并且对任意的内射 R-模 I，有 $I\otimes_R\mathbb{F}$ 是正合列，则称 R-模 M 是 Gorenstein 平坦的，其中每个 F_i 都是平坦 R-模.

根据文献[2]，如果对任意的正合列 $0\rightarrow A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow 0$，其中 $A\in\mathscr{X}$，$C\in\mathscr{X}$，有 $B\in\mathscr{X}$，则称 R-模类 $\mathscr{X}$ 关于扩张封闭. 如果投射模类 $\mathscr{P}(R)\subseteq\mathscr{X}$，且对任意的短正合列 $0\rightarrow A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow 0$，其中 $C\in\mathscr{X}$，$A\in\mathscr{X}$ 当且仅当 $B\in\mathscr{X}$，则称 R-模类 $\mathscr{X}$ 是投射可解类.

根据文献[7]，设 T 为 R-模，如果存在 $s\in S$，使得 $sT=0$，则称 R-模 T 是 u-S-挠模. 设 f 为 R-同态，如果 $\mathrm{Ker}\ f$($\mathrm{Coker}\ f$)是 u-S-挠模，则称 R-同态 f 是 u-S-单同态(u-S-满同态). 如果 f 既是 u-S-单同态，又是 u-S-满同态，则称 R-同态 f 是 u-S-同构的. 设 R-模序列 $M\xrightarrow{\alpha}N\xrightarrow{\beta}L$，如果存在 $s\in S$，使得 $s\mathrm{Ker}(\beta)\subseteq\mathrm{Im}(\alpha)$，$s\mathrm{Im}(\alpha)\subseteq\mathrm{Ker}(\beta)$，则称 R-模序列 $M\xrightarrow{\alpha}N\xrightarrow{\beta}L$ 是 u-S-正合列.

定义 2[7] 设 M 是 R-模，如果对任意的 u-S-短正合列 $0\rightarrow A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow 0$，有序列

$$0\rightarrow A\otimes_R M\rightarrow B\otimes_R M\rightarrow C\otimes_R M\rightarrow 0$$

是 u-S-正合的，则称 R-模 M 是 u-S-平坦模.

引理 1[7] 设 R 是环，S 是 R 的乘法子集，F 是 R-模，则下列表述等价：

1) F 是 u-S-平坦模；

2) 对任意的短正合列 $0\rightarrow A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow 0$，有序列

$$0\rightarrow A\otimes_R F\rightarrow B\otimes_R F\rightarrow C\otimes_R F\rightarrow 0$$

是 u-S-正合的；

3) 对任意的 R-模 M，$\mathrm{Tor}_1^R(M,F)$是 u-S-挠模；

4) 对任意的 $n\geqslant 1$ 及任意的 R-模 M，$\mathrm{Tor}_n^R(M,F)$是 u-S-挠模.

引理 2 设 R 是环，S 是 R 的乘法子集. 如果 f：$A\rightarrow B$，g：$B\rightarrow C$ 是 R-同态，则以下表述成立：

1) 若 R-同态 f,g 均是 u-S-单同态，则 gf 是 u-S-单同态；

2) 若 R-同态 f,g 均是 u-S-满同态，则 gf 是 u-S-满同态.

证明：1) 因为 f：$A\rightarrow B$ 是 u-S-单同态，所以 $\exists s_1\in S$，使得 $s_1\mathrm{Ker}(f)=0$. 又因为 g：$B\rightarrow C$ 是 u-S-单同态，所以 $\exists s_2\in S$，使得 $s_2\mathrm{Ker}(g)=0$. 于是，对 $\forall a\in\mathrm{Ker}(gf)$，$gf(a)=0$，有 $f(a)\in\mathrm{Ker}(g)$，从而 $s_2f(a)=f(s_2a)=0$，进而 $s_2a\in\mathrm{Ker}(f)$. 因此，$s_1(s_2a)=(s_1s_2)a=0$. 令 $s=s_1s_2$，则 $sa=0$. 由 a 的任意性知，$s\mathrm{Ker}(gf)=0$，故 gf 是 u-S-单同态.

2) 因为 f：$A\rightarrow B$ 是 u-S-满同态，所以 $\exists s_1\in S$，使得 $s_1\mathrm{Coker}(f)=0$. 因为 g：$B\rightarrow C$ 是 u-S-满同态，所以 $\exists s_2\in S$，使得 $s_2\mathrm{Coker}(g)=0$，即 $\forall c\in C$，$\exists b\in B$，使得 $s_2c=g(b)$. 又因为 $s_1B\subseteq\mathrm{Im}(f)$，所以 $\exists a\in A$，使得 $s_1b=f(a)$. 于是，

$$gf(a)=g(s_1b)=s_1g(b)=s_1(s_2c)=s_1s_2c.$$

令 $s=s_1s_2$，则 $sC\subseteq\mathrm{Im}(gf)$. 因此，$gf$ 是 u-S-满同态. 证毕.

引理 3 设 R 是环，S 是 R 的乘法子集，A_i,B_i,C_i 是 R-模，其中 $i=1,2,\cdots,n$. 若

$$0\rightarrow A_i\xrightarrow{f_i}B_i\xrightarrow{g_i}C_i\rightarrow 0$$

是 u-S-正合列，则

$$0\rightarrow\bigoplus_{i=1}^n A_i\xrightarrow{f_i}\bigoplus_{i=1}^n B_i\xrightarrow{g_i}\bigoplus_{i=1}^n C_i\rightarrow 0$$

也是 u-S-正合列.

证明：根据定义易证.

定义 3[3] 设 E 是 R-模，如果对任意的 u-S-短正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$，有序列

$$0\to \mathrm{Hom}_R(C,E)\to \mathrm{Hom}_R(B,E)\to \mathrm{Hom}_R(A,E)\to 0$$

是 u-S-正合的，则称 R-模 E 是 u-S-内射模.

引理 4[9] 设 R 是环，S 是 R 的乘法子集，E 是 R-模，则下列表述等价：

1）E 是 u-S-内射模；

2）对任意的短正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$，有序列

$$0\to \mathrm{Hom}_R(C,E)\to \mathrm{Hom}_R(B,E)\to \mathrm{Hom}_R(A,E)\to 0$$

是 u-S-正合的；

3）对任意的 R-模 M，$\mathrm{Ext}_R^1(M,E)$是 u-S-挠模；

4）对任意的 $n\geqslant 1$ 及任意的 R-模 M，$\mathrm{Ext}_R^n(M,E)$是 u-S-挠模.

命题 1 设 R 是环，S 是 R 的乘法子集，M 是 R-模，则 M 是 u-S-平坦模当且仅当 M^+ 是 u-S-内射模.

证明：必要性. 因为 M 是 u-S-平坦模，所以对任意的 u-S-短正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$，有序列 $0\to A\otimes_R M\to B\otimes_R M\to C\otimes_R M\to 0$ 是 u-S-正合的. 用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$作用于

$$0\to A\otimes_R M\to B\otimes_R M\to C\otimes_R M\to 0,$$

由文献[9]中推论 4.4 和引理 4 知，有 u-S-正合列

$$0\to (C\otimes_R M)^+\to (B\otimes_R M)^+\to (A\otimes_R M)^+\to 0.$$

考虑下图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C\otimes_R M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B\otimes_R M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A\otimes_R M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C,M^+) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(B,M^+) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(A,M^+) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

由于对任意的 R-模 E,F，有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(E\otimes_R F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\cong \mathrm{Hom}_R(E,F^+),$$

即上图中竖向态射均是同构. 因此

$$0\to \mathrm{Hom}_R(C,M^+)\to \mathrm{Hom}_R(B,M^+)\to \mathrm{Hom}_R(A,M^+)\to 0$$

是 u-S-正合的. 由文献[9]中定义 4.1 知，M^+ 是 u-S-内射模.

充分性. 因为 M^+ 是 u-S-内射模，所以由引理 4 知，对任意的 R-模 N，有 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M^+)$是 u-S-挠模. 因为

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Tor}_1^R(N,M),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\cong \mathrm{Ext}_R^1(N,M^+),$$

所以由文献[7]中命题 2.5 知，$\mathrm{Tor}_1^R(N,M)$ 是 u-S-挠模，从而由引理 1 知，M 是 u-S-平坦模. 证毕.

2 主要结果

下面引入 Gorenstein u-S-平坦模，并讨论这类模的同调性质.

定义 4 完全 u-S-平坦分解是指 R-模的正合列

$$\mathbb{F}=\cdots\to F_1\to F_0\to F^0\to F^1\to\cdots,$$

其中每个 F_i 和 F^i 都是 u-S-平坦模，并且对任意的 u-S-内射模 I，有 $I\otimes_R\mathbb{F}$ 是 u-S-正合列.

定义 5 对 R-模 M，如果存在完全 u-S-平坦分解 $\mathbb{F}$，使得 $M\cong\mathrm{Im}(F_0\to F^0)$，则称 R-模 M 是 Gorenstein u-S-平坦模.

将 Gorenstein u-S-平坦模类记为 u-S-$G\mathscr{F}(R)$.

注 1 1）每个平坦模都是 u-S-平坦模，每个 u-S-平坦模都是 Gorenstein u-S-平坦模. 当 S 是由 R 中的单位构成的乘法集时，一个模是 Gorenstein u-S-平坦模当且仅当它是 Gorenstein 平坦模；

2）若 u-S-平坦模的正合列

$$\mathbb{F}=\cdots\to F_1\to F_0\to F^0\to F^1\to\cdots$$

是完全 u-S-平坦分解，则该正合列中所有箭头的核、像、余核都是 Gorenstein u-S-平坦模.

命题2 设 R 是环，S 是 R 的乘法子集，则 Gorenstein u-S-平坦模类关于有限直和封闭.

证明：设 R-模 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 是 Gorenstein u-S-平坦模，则存在 M_i 的完全 u-S-平坦分解

$$\mathbb{F}_i = \cdots \to F_{i1} \to F_{i0} \to F^{i0} \to F^{i1} \to \cdots,$$

使得 $M_i \cong \mathrm{Im}(F_{i0} \to F^{i0})$，其中 F_{ij}, F^{ij} 都是 u-S-平坦模. 显然序列

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{F}_i = \cdots \to \bigoplus_{i=1}^{n} F_{i1} \to \bigoplus_{i=1}^{n} F_{i0} \to \bigoplus_{i=1}^{n} F^{i0} \to \bigoplus_{i=1}^{n} F^{i1} \to \cdots \tag{1}$$

是正合的，且 $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \cong \mathrm{Im}(\bigoplus_{i=1}^{n} F_{i0} \to \bigoplus_{i=1}^{n} F^{i0})$. 由文献[7]中命题3.4知，$\bigoplus_{i=1}^{n} F_{ij}$，$\bigoplus_{i=1}^{n} F^{ij}$ 都是 u-S-平坦模. 对任意的 u-S-内射模 I，将函子 $I \otimes_R$-作用于序列(1)，有

$$\cdots \to I \otimes_R (\bigoplus_{i=1}^{n} F_{i1}) \to I \otimes_R (\bigoplus_{i=1}^{n} F_{i0}) \to I \otimes_R (\bigoplus_{i=1}^{n} F^{i0}) \to I \otimes_R (\bigoplus_{i=1}^{n} F^{i0}) \to \cdots.$$

将 $I \otimes_R$-作用于序列 $\mathbb{F}_i$，有 u-S-正合列

$$\cdots \to I \otimes_R F_{i1} \to I \otimes_R F_{i0} \to I \otimes_R F^{i0} \to I \otimes_R F^{i1} \to \cdots.$$

由引理3知，有 u-S-正合列

$$\cdots \to \bigoplus_{i=1}^{n} (I \otimes_R F_{i1}) \to \bigoplus_{i=1}^{n} (I \otimes_R F_{i0}) \to \bigoplus_{i=1}^{n} (I \otimes_R F^{i0}) \to \bigoplus_{i=1}^{n} (I \otimes_R F^{i1}) \to \cdots.$$

因为 $I \otimes_R (\bigoplus_{i=1}^{n} F_{ij}) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (I \otimes_R F_{ij})$，所以

$$\cdots \to I \otimes_R (\bigoplus_{i=1}^{n} F_{i1}) \to I \otimes_R (\bigoplus_{i=1}^{n} F_{i0}) \to I \otimes_R (\bigoplus_{i=1}^{n} F^{i0}) \to I \otimes_R (\bigoplus_{i=1}^{n} F^{i0}) \to \cdots$$

是 u-S-正合列. 因此 $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ 是 Gorenstein u-S-平坦模. 证毕.

命题3 设 R 是环，S 是 R 的乘法子集，M 是 R-模，则 M 是 Gorenstein u-S-平坦模当且仅当以下条件成立：

1) 存在 u-S-平坦模的正合列 $\mathbb{F} = \cdots \to F^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} F^0 \xrightarrow{d^0} F^1 \to \cdots$，使得 $M \cong \mathrm{Im}(F^0 \to F^1)$；

2) 对任意的 u-S-内射模 I，$\mathrm{Tor}_1^R(I, L^i)$ 是 u-S-挠模，其中 $L^i = \mathrm{Im}(d^i)$，$\forall i \in \mathbb{Z}$.

证明：必要性. 设 M 是 Gorenstein u-S-平坦模，则条件1)显然成立，因此只需证明条件2)成立. 考虑正合列 $0 \to L^{i-1} \to F^i \to L^i \to 0$，其中 F^i 是 u-S-平坦模，$L^i = \mathrm{Im}(d^i)$. 由条件知，对任意的 u-S-内射模 I，$I \otimes_R \mathbb{F}$ 是 u-S-正合列. 考虑正合列

$$0 \to \mathrm{Im}(1 \otimes_R d^{i-1}) \to I \otimes_R F^i \to I \otimes_R F^i / \mathrm{Im}(1 \otimes_R d^{i-1}) \to 0.$$

因为 $I \otimes_R \mathbb{F}$ 是 u-S-正合列，所以 $I \otimes_R F^i / \mathrm{Im}(1 \otimes_R d^{i-1})$ 与 $I \otimes_R F^i / \mathrm{Ker}(1 \otimes_R d^i)$ 是 u-S-同构，而 $I \otimes_R F^i / \mathrm{Ker}(1 \otimes_R d^i) \cong \mathrm{Im}(1 \otimes_R d^i)$，故 $I \otimes_R F^i / \mathrm{Im}(1 \otimes_R d^{i-1})$ 与 $\mathrm{Im}(1 \otimes_R d^i)$ 是 u-S-同构. 由 u-S-同构不改变序列的 u-S-正合性知，

$$0 \to \mathrm{Im}(1 \otimes_R d^{i-1}) \to I \otimes_R F^i \to \mathrm{Im}(1 \otimes_R d^i) \to 0$$

是 u-S-正合列，从而有 u-S-正合列

$$0 \to I \otimes_R L^{i-1} \to I \otimes_R F^i \to I \otimes_R L^i \to 0.$$

根据长正合列定理[12]，有长正合列

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^R(I, F^i) \to \mathrm{Tor}_1^R(I, L^i) \to I \otimes_R L^{i-1} \to I \otimes_R F^i \to I \otimes_R L^i \to 0.$$

因为 F^i 是 u-S-平坦模，所以由文献[7]中定理3.2知，$\mathrm{Tor}_1^R(I, F^i)$ 是 u-S-挠模，从而 $\mathrm{Tor}_1^R(I, F^i)$ 与0是 u-S-同构. 由文献[10]中定理1.2知，$\mathrm{Tor}_1^R(I, L^i)$ 与0是 u-S-同构，因此 $\mathrm{Tor}_1^R(I, L^i)$ 是 u-S-挠模.

充分性. 若对任意的 u-S-内射模 I，$\mathrm{Tor}_1^R(I, L^i)$($\forall i \in \mathbb{Z}$)是 u-S-挠模. 用函子 $I \otimes_R$-作用于正合列 $0 \to L^{i-1} \to F^i \to L^i \to 0$($\forall i \in \mathbb{Z}$)，根据长正合列定理，有正合列

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^R(I, L^i) \to I \otimes_R L^{i-1} \to I \otimes_R F^i \to I \otimes_R L^i \to 0,$$

故 $0 \to I \otimes_R L^{i-1} \xrightarrow{\alpha^{i-1}} I \otimes_R F^i \xrightarrow{\beta^i} I \otimes_R L^i \to 0$($\forall i \in \mathbb{Z}$)是 u-S-正合列.

下证 $0\to I\otimes_R L^{i-2}\to I\otimes_R F^{i-1}\to I\otimes_R F^{i}\to I\otimes_R L^{i}\to 0(\forall i\in\mathbb{Z})$ 是 u-S-正合列. 考虑下图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I\otimes_R L^{i-2} \arrow[r, "\alpha^{i-2}"] & I\otimes_R F^{i-1} \arrow[rr, "\gamma^{i-1}"] \arrow[dr, "\beta^{i-1}"'] & & I\otimes_R F^{i} \arrow[r, "\beta^{i}"] & I\otimes_R L^{i} \arrow[r] & 0. \\
& & & I\otimes_R L^{i-1} \arrow[ur, "\alpha^{i-1}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

先证明在 $I\otimes_R F^{i-1}$ 处是 u-S-正合的. 因为 $\exists s_1\in S$，使得 $s_1\mathrm{Im}(\alpha^{i-2})\subseteq\mathrm{Ker}(\beta^{i-1})$，$s_1\mathrm{Ker}(\beta^{i-1})\subseteq\mathrm{Im}(\alpha^{i-2})$，所以 $\beta^{i-1}(s_1\alpha^{i-2})=0$，且 $\alpha^{i-1}\beta^{i-1}=\gamma^{i-1}$，从而

$$\gamma^{i-1}(s_1\alpha^{i-2})=\alpha^{i-1}\beta^{i-1}(s_1\alpha^{i-2})=0,$$

故 $s_1\mathrm{Im}(\alpha^{i-2})\subseteq\mathrm{Ker}(\gamma^{i-1})$. 因为 α^{i-1} 是 u-S-单同态，所以 $\exists s_2\in S$，使得 $s_2\mathrm{Ker}(\alpha^{i-1})=0$. 对 $\forall a\in\mathrm{Ker}(\gamma^{i-1})$，有

$$\gamma^{i-1}(a)=\alpha^{i-1}\beta^{i-1}(a)=0,\quad \beta^{i-1}(a)\in\mathrm{Ker}(\alpha^{i-1}),\quad s_2\beta^{i-1}(a)=0,$$

从而 $\beta^{i-1}(s_2a)=0$，$(s_2a)\in\mathrm{Ker}(\beta^{i-1})$. 因为 $s_1\mathrm{Ker}(\beta^{i-1})\subseteq\mathrm{Im}(\alpha^{i-2})$，所以 $(s_1s_2a)\in\mathrm{Im}(\alpha^{i-2})$，而由 a 的任意性，有 $s_1s_2\mathrm{Ker}(\gamma^{i-1})\subseteq\mathrm{Im}(\alpha^{i-2})$. 令 $s=s_1s_2$，即有

$$s\mathrm{Ker}(\gamma^{i-1})\subseteq\mathrm{Im}(\alpha^{i-2}),\qquad s\mathrm{Im}(\alpha^{i-2})\subseteq\mathrm{Ker}(\gamma^{i-1}).$$

再证明在 $I\otimes_R F^{i}$ 处是 u-S-正合的. 因为 $\exists s_1'\in S$，使得

$$s_1'\mathrm{Im}(\alpha^{i-1})\subseteq\mathrm{Ker}(\beta^{i}),\qquad s_1'\mathrm{Ker}(\beta^{i})\subseteq\mathrm{Im}(\alpha^{i-1}),$$

所以 $\beta^{i}(s_1'\alpha^{i-1})=0$，且 $\alpha^{i-1}\beta^{i-1}=\gamma^{i-1}$，从而

$$\beta^{i}(s_1'\gamma^{i-1})=\beta^{i}(s_1'\alpha^{i-1})\beta^{i-1}=0,$$

故 $s_1'\mathrm{Im}(\gamma^{i-1})\subseteq\mathrm{Ker}(\beta^{i})$. 因为 β^{i-1} 是 u-S-满同态，所以 $\exists s_2'\in S$，使得 $s_2'(I\otimes_R L^{i-1})\subseteq\mathrm{Im}(\beta^{i-1})$，又因为 $s_1'\mathrm{Ker}(\beta^{i})\subseteq\mathrm{Im}(\alpha^{i-1})$，所以对 $\forall b\in\mathrm{Ker}(\beta^{i})$，有 $s_1'b\in\mathrm{Im}(\alpha^{i-1})$，$\exists b'\in I\otimes_R L^{i-1}$，使得 $s_1'b=\alpha^{i-1}(b')$，进而 $\exists c\in I\otimes_R F^{i-1}$，使得 $s_2'b'=\beta^{i-1}(c)$，有 $\alpha^{i-1}\beta^{i-1}(c)=s_2's_1'b$，即 $\gamma^{i-1}(c)=s_2's_1'b$，从而 $s_2's_1'b\in\mathrm{Im}(\gamma^{i-1})$，由 b 的任意性，有 $s_1's_2'\mathrm{Ker}(\beta^{i})\subseteq\mathrm{Im}(\gamma^{i-1})$. 令 $s'=s_1's_2'$，则有 $s'\mathrm{Ker}(\beta^{i})\subseteq\mathrm{Im}(\gamma^{i-1})$，$s'\mathrm{Im}(\gamma^{i-1})\subseteq\mathrm{Ker}(\beta^{i})$. 故 $I\otimes_R\mathbb{F}$ 是 u-S-正合列. 因此，M 是 Gorenstein u-S-平坦模. 证毕.

定理 1　设 R 是环，S 是 R 的乘法子集，M 是 R-模，则下列表述等价：

1) M 是 Gorenstein u-S-平坦模；

2) 对任意的 u-S-内射模 I 及任意的 $n\geqslant1$，$\mathrm{Tor}_n^R(I,M)$ 是 u-S-挠模，且存在正合列 $0\to M\to F^0\to F^1\to\cdots$，使得函子 $I\otimes_R$- 作用后得到 u-S-正合列，这里每个 F^i 是 u-S-平坦模；

3) 存在 R-模的正合列 $0\to M\to F\to G\to 0$，使得 G 是 Gorenstein u-S-平坦模，其中 F 是 u-S-平坦模.

证明：1)$\Rightarrow$2). 因为 M 是 Gorenstein u-S-平坦模，所以存在 M 的完全 u-S-平坦分解

$$\mathbb{F}=\cdots\to F_1\xrightarrow{d_1}F_0\xrightarrow{d_0}F^0\xrightarrow{d^1}F^1\to\cdots,$$

其中 F_i,F^i 都是 u-S-平坦模. 令 $L_1=\mathrm{Im}(d_1)$，对短正合列 $0\to L_1\to F_0\to M\to 0$，其中 F_0 是 u-S-平坦模，L_1 是 Gorenstein u-S-平坦模. 对 n 进行数学归纳法，当 $n=1$ 时，由命题 3 知，$\mathrm{Tor}_1^R(I,M)$ 是 u-S-挠模. 假设结论对 $n-1$ 成立，考虑结论对 n 时，对任意的 u-S-内射模 I，用函子 $I\otimes_R$- 作用于短正合列 $0\to L_1\to F_0\to M\to 0$，根据长正合列定理[12]，有长正合列

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_n^R(I,F_0)\to\mathrm{Tor}_n^R(I,M)\to\mathrm{Tor}_{n-1}^R(I,L_1)\to\mathrm{Tor}_{n-1}^R(I,F_0)\to\cdots.$$

由文献[7]中定理 3.2 知，$\mathrm{Tor}_n^R(I,F_0)$ 和 $\mathrm{Tor}_{n-1}^R(I,F_0)$ 是 u-S-挠模. 由文献[10]中推论 1.5 知，$\mathrm{Tor}_n^R(I,M)$ 和 $\mathrm{Tor}_{n-1}^R(I,L_1)$ 是 u-S-同构. 由归纳假设可知 $\mathrm{Tor}_{n-1}^R(I,L_1)$ 是 u-S-挠模，由文献[10]中推论 1.5 知，$\mathrm{Tor}_n^R(I,M)$ 是 u-S-挠模.

2)$\Rightarrow$1). 取 M 的 u-S-平坦分解 $\overline{\mathbb{F}}=\cdots\to F_2\to F_1\to F_0\to M\to 0$，其中 F_i 是 u-S-平坦模，$L_i=\mathrm{Im}(F_i\to F_{i-1})$. 对任意的 u-S-内射模 I，用函子 $I\otimes_R$- 作用于短正合列 $0\to L_1\to F_0\to M\to 0$，根据长正合列定理[12]，有长正合列

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_2^R(I,M)\to\mathrm{Tor}_1^R(I,L_1)\to\mathrm{Tor}_1^R(I,F_0)\to\mathrm{Tor}_1^R(I,M)\to\cdots,$$

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_1^R(I,M)\to I\otimes_R L_1\to I\otimes_R F_0\to I\otimes_R M\to 0.$$

由2)的条件知，$\mathrm{Tor}_2^R(I,M)$和$\mathrm{Tor}_1^R(I,M)$是u-S-挠模. 由文献[10]中推论1.5知，$\mathrm{Tor}_1^R(I,L_1)$和$\mathrm{Tor}_1^R(I,F_0)$是u-S-同构. 由文献[7]中定理3.2知，若F_0是u-S-平坦模，则$\mathrm{Tor}_1^R(I,F_0)$是u-S-挠模. 故$\mathrm{Tor}_1^R(I,L_1)$是u-S-挠模，且$0\to I\otimes_R L_1\to I\otimes_R F_0\to I\otimes_R M\to 0$是$u$-$S$-正合列. 用函子$I\otimes_R$-作用于短正合列$0\to L_2\to F_1\to L_1\to 0$，有长正合列

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_2^R(I,L_1)\to\mathrm{Tor}_1^R(I,L_2)\to\mathrm{Tor}_1^R(I,F_1)\to\mathrm{Tor}_1^R(I,L_1)\to\cdots,$$
$$\cdots\to\mathrm{Tor}_1^R(I,L_1)\to I\otimes_R L_2\to I\otimes_R F_1\to I\otimes_R L_1\to 0.$$

同理可得$\mathrm{Tor}_1^R(I,L_2)$是u-S-挠模，且$0\to I\otimes_R L_2\to I\otimes_R F_1\to I\otimes_R L_1\to 0$是$u$-$S$-正合的. 重复上述步骤，得到$I\otimes_R\overline{\mathbb{F}}$是$u$-$S$-正合的.

下面证明$I\otimes_R M$的左右两半部分连接后仍然是u-S-正合的. 考虑下图：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & I\otimes_R F_1 \arrow[r, "\alpha"] & I\otimes_R F_0 \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & & I\otimes_R F^0 \arrow[r, "\beta"] & I\otimes_R F^1 \arrow[r] & \cdots \\
& & & I\otimes_R M \arrow[ur, "\beta'"'] & & &
\end{tikzcd}$$

先证$\exists s\in S$，使得$s\mathrm{Ker}(\gamma)\subseteq\mathrm{Im}(\alpha)$，$s\mathrm{Im}(\alpha)\subseteq\mathrm{Ker}(\gamma)$. 因为$\exists s_1\in S$，使得$s_1\mathrm{Im}(\alpha)\subseteq\mathrm{Ker}(\alpha')$，$s_1\mathrm{Ker}(\alpha')\subseteq\mathrm{Im}(\alpha)$，所以$\alpha'(s_1\alpha)=0$，且$\beta'\alpha'=\gamma$，从而

$$\gamma(s_1\alpha)=\beta'\alpha'(s_1\alpha)=0,$$

故$s_1\mathrm{Im}(\alpha)\subseteq\mathrm{Ker}(\gamma)$. 因为$\beta'$是$u$-$S$-单同态，所以$\exists s_2\in S$，使得$s_2\mathrm{Ker}(\beta')=0$. 对$\forall a\in\mathrm{Ker}(\gamma)$，有

$$\gamma(a)=\beta'\alpha'(a)=0,\quad \alpha'(a)\in\mathrm{Ker}(\beta'),\quad s_2\alpha'(a)=0,$$

从而$\alpha'(s_2a)=0$，$(s_2a)\in\mathrm{Ker}(\alpha')$. 因为$s_1\mathrm{Ker}(\alpha')\subseteq\mathrm{Im}(\alpha)$，所以$(s_1s_2a)\in\mathrm{Im}(\alpha)$，而由$a$的任意性，有$s_1s_2\mathrm{Ker}(\gamma)\subseteq\mathrm{Im}(\alpha)$. 令$s=s_1s_2$，则有

$$s\mathrm{Ker}(\gamma)\subseteq\mathrm{Im}(\alpha),\qquad s\mathrm{Im}(\alpha)\subseteq\mathrm{Ker}(\gamma).$$

再证$\exists s'\in S$，使得$s'\mathrm{Ker}(\beta)\subseteq\mathrm{Im}(\gamma)$，$s'\mathrm{Im}(\gamma)\subseteq\mathrm{Ker}(\beta)$. 因为$\exists s_1'\in S$，使得$s_1'\mathrm{Im}(\beta')\subseteq\mathrm{Ker}(\beta)$，$s_1'\mathrm{Ker}(\beta)\subseteq\mathrm{Im}(\beta')$，所以$\beta(s_1'\beta')=0$，且$\beta'\alpha'=\gamma$，从而$\beta(s_1'\gamma)=\beta(s_1'\beta')\alpha'=0$，故$s_1'\mathrm{Im}(\gamma)\subseteq\mathrm{Ker}(\beta)$. 因为$\alpha'$是$u$-$S$-满同态，所以$\exists s_2'\in S$，使得$s_2'(I\otimes_R M)\subseteq\mathrm{Im}(\alpha')$，又因为$s_1'\mathrm{Ker}(\beta)\subseteq\mathrm{Im}(\beta')$，所以对$\forall b\in\mathrm{Ker}(\beta)$，有$s_1'b\in\mathrm{Im}(\beta')$，$\exists b'\in I\otimes_R M$，使得$s_1'b=\beta'(b')$，进而$\exists c\in I\otimes_R F_0$，使得$s_2'b'=\alpha'(c)$，有$\beta'\alpha'(c)=s_2's_1'b$，即$\gamma(c)=s_2's_1'b$，从而$s_2's_1'b\in\mathrm{Im}(\gamma)$，而由$b$的任意性，有$s_1's_2'\mathrm{Ker}(\beta)\subseteq\mathrm{Im}(\gamma)$. 令$s'=s_1's_2'$，则有$s'\mathrm{Ker}(\beta)\subseteq\mathrm{Im}(\gamma)$，$s'\mathrm{Im}(\gamma)\subseteq\mathrm{Ker}(\beta)$. 综上，可得$M$是Gorenstein u-S-平坦模.

1)$\Rightarrow$3)显然.

3)$\Rightarrow$2). 因为F是u-S-平坦模，G是Gorenstein u-S-平坦模，所以根据1)$\Leftrightarrow$2)和注1知，对任意的u-S-内射模I，$\forall n\geqslant 1$，$\mathrm{Tor}_n^R(I,G)$和$\mathrm{Tor}_n^R(I,F)$是u-S-挠模. 由长正合列定理知

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_{n+1}^R(I,G)\to\mathrm{Tor}_n^R(I,M)\to\mathrm{Tor}_n^R(I,F)\to\cdots$$

是正合列. 由文献[7]中命题2.8知，$\mathrm{Tor}_n^R(I,M)$是u-S-挠模，$\forall n\geqslant 1$. 因为G是Gorenstein u-S-平坦模，所以存在正合列$\mathbb{G}=0\to G\to F^0\to F^1\to\cdots$，使得$I\otimes_R\mathbb{G}$是$u$-$S$-正合，其中每个$F^i$是$u$-$S$-平坦模. 因此，有正合列$0\to M\to F\to F^0\to F^1\to\cdots$，且函子$I\otimes_R$-作用该序列后得到$u$-$S$-正合列，其中$F,F^i$是$u$-$S$-平坦模. 证毕.

命题4 设R是环，S是R的乘法子集，则下列表述等价：

1) Gorenstein u-S-平坦模类关于扩张封闭；

2) Gorenstein u-S-平坦模类是投射可解类.

证明：2)$\Rightarrow$1)显然.

1)$\Rightarrow$2). 显然投射模是u-S-投射的，由文献[8]中命题2.13和注1知，任意的u-S-投射模是u-S-平坦模，任意的u-S-平坦模是Gorenstein u-S-平坦模，故投射模类是Gorenstein u-S-平坦模类.

设有短正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$，其中 B,C 是 Gorenstein u-S-平坦模，下证 A 是 Gorenstein u-S-平坦模．因为B 是 Gorenstein u-S-平坦模，所以由定理 1 知，存在短正合列 $0 \to B \to F \to L \to 0$，其中 F 是 u-S-平坦模，L 是 Gorenstein u-S-平坦模．考虑 $B \to C$ 和 $B \to F$ 的推出图：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & L' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & L \arrow[r, equal] \arrow[d] & L \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

第四列 $0 \to C \to L' \to L \to 0$ 中，C 和 L 是 Gorenstein u-S-平坦模，由 1)知 L'是 Gorenstein u-S-平坦模，而中间行 $0 \to A \to F \to L' \to 0$ 中，F 是 u-S-平坦模，L'是 Gorenstein u-S-平坦模，由定理 1 知 A 是 Gorenstein u-S-平坦模．因此，Gorenstein u-S-平坦模类是投射可解类．证毕．

参　考　文　献

［1］ ENOCHS E E，JENDA O M G，TORRECILLAS B. Gorenstein Flat Modules［J］. Journal of Nanjing University (Mathematical Biquarterly)，1993，10(1)：1-9.

［2］ HOLM H. Gorenstein Homological Dimensions［J］. Journal of Pure and Applied Algebra，2004，189(1/2/3)：167-193.

［3］ MAO L X，DING N Q. Gorenstein FP-Injective and Gorenstein Flat Modules［J］. Journal of Algebra and Its Applications，2008，7(4)：491-506.

［4］ BENNIS D，MAHDOU N. Strongly Gorenstein Projective，Injective，and Flat Modules［J］. Journal of Pure and Applied Algebra，2007，210(2)：437-445.

［5］ ANDERSON D D，DUMITRESCU T. S-Noetherian Rings［J］. Communications in Algebra，2002，30(9)：4407-4416.

［6］ WANG F G，KIM H. Foundations of Commutative Rings and Their Modules［M］. Singapore：Springer，2016：1-653.

［7］ ZHANG X L. Characterizing S-Flat Modules and S-von Neumann Regular Rings by Uniformity［J］. Bulletin of the Korean Mathematical Society，2022，59(3)：643-657.

［8］ ZHANG X L，QI W. Characterizing S-Projective Modules and S-Semisimple Rings by Uniformity［J］. Journal of Commutative Algebra，2023，15(1)：139-149.

［9］ CHEN M Z，KIM H，QI W，et al. Uniformly S-Noetherian Rings［J］. Quaestiones Mathematicae，2024，47(5)：1019-1038.

［10］ ZHANG X L. The u-S-Weak Global Dimensions of Commutative Rings［J］. Communications of the Korean Mathematical Society，2023，38(1)：97-112.

［11］ ZHANG X L. On Uniformly S-Coherent Rings［EB/OL］. (2023-04-19)［2024-12-23］. https://arxiv.org/abs/2205.07137.

［12］ 章璞，吴泉水．基础代数学讲义［M］．北京：高等教育出版社，2018：113-114.（ZHANG P，WU Q S. Lectures on Basic Algebra［M］. Beijing：Higher Education Press，2018：113-114.）

（责任编辑：赵立芹）