doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2025044

一类形式三角矩阵环上的 Ding 模

熊郑瑶，赵仁育
(西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070)

摘要：设 $T=\begin{pmatrix} R & 0 \\ C & S \end{pmatrix}$ 是形式三角矩阵环，其中 R 和 S 是有单位元的结合环，C 是忠实半对偶 (S,R)-双模. 证明：1) M 是 Ding C-投射左 S-模当且仅当 $\begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_S(C,M) \\ M \end{pmatrix}$ 是 Ding 投射左 T-模；2) N 是 Ding C-内射左 R-模当且仅当 $\begin{pmatrix} N \\ C\otimes_R N \end{pmatrix}$ 是 Ding 内射左 T-模. 所得结论通过 T 建立了 Ding C-模与 Ding 模的联系.

关键词：形式三角矩阵环；半对偶模；Ding 投射(内射)模；Ding C-投射(C-内射)模
中图分类号：O153.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2025)06-1586-07

Ding Modules over a Class of Formal Triangular Matrix Rings

XIONG Zhengyao, ZHAO Renyu
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: Let $T=\begin{pmatrix} R & 0 \\ C & S \end{pmatrix}$ be a formal triangular matrix ring, where R and S are associative rings with identity element, C is a faithfully semidualizing (S,R)-bimodule. It is showed that: 1) M is a Ding C-projective left S-module if and only if $\begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_S(C,M) \\ M \end{pmatrix}$ is a Ding projective left T-module; 2) N is Ding C-injective left R-module if and only if $\begin{pmatrix} N \\ C\otimes_R N \end{pmatrix}$ is a Ding injective left T-module. The obtained conclusions establish links between Ding C-modules and Ding modules through T.

Keywords: formal triangular matrix ring; semidualizing module; Ding projective (injective) module; Ding C-projective (C-injective) module

Gorenstein 同调代数是以经典同调代数为基础发展而来的一类重要的相对同调代数，它分别用 Gorenstein 投射、Gorenstein 内射、Gorenstein 平坦模代替经典的投射、内射、平坦模. 文献[1-2]研究了两类特殊的 Gorenstein 模——强 Gorenstein 平坦模和 Gorenstein FP-内射模. 文献[1-4]的研究结果表明，在凝聚环上，这两类模分别与 Noether 环上的 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模有许多相似性质. 文献[4]将上述两类模分别命名为 Ding 投射模和 Ding 内射模. 近年来，关于 Ding 投射模和

收稿日期：2025-02-17. **网络首发日期**：2025-09-12.
第一作者简介：熊郑瑶(2001—)，女，汉族，硕士研究生，从事环的同调理论的研究，E-mail: xiongzhengyao111@163.com. **通信作者简介**：赵仁育(1977—)，男，汉族，博士，教授，从事环的同调理论的研究，E-mail: zhaory@nwnu.edu.cn.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：11861055；12061061)和甘肃省第一批陇原青年英才项目(批准号：23JRRA684).
网络首发地址：https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20250911.1717.002.

Ding 内射模的研究受到广泛关注[5-10].

Gorenstein 同调代数的一个重要扩展方向是相对于半对偶模 C 的 Gorenstein 同调理论，目前也取得了很多研究成果. 例如：文献[11]研究了 G_C-投射模和 G_C-内射模；文献[12]将 G_C-投射模和 G_C-内射模的一些结果扩展到交换非 Noether 环上；文献[13]研究了交换环上的 D_C-投射模和 D_C-内射模；文献[14]引入了半对偶双模的概念，建立了一般环上关于半对偶双模的相对同调理论；文献[15]对相对于半对偶双模的 Gorenstein 投射(内射)模进行了系统研究；文献[16]深入研究了相对于半对偶双模 C 的 Gorenstein C-投射模和 Gorenstein C-内射模；文献[17]引入并研究了相对于半对偶模 C 的 Ding C-投射模和 Ding C-内射模.

形式三角矩阵环是一类重要的环扩张，在同调代数和代数表示论研究中具有重要作用. 文献[18-19]给出了形式三角矩阵环上投射模和内射模的构造；文献[20]给出了形式三角矩阵环上平坦模的构造；文献[21]刻画了三角矩阵 Artin 代数上的 Gorenstein 投射模；文献[22]给出了一般情形下三角矩阵环上 Gorenstein 投射模的描述；文献[23]给出了三角矩阵环上 Ding 投射和 Ding 内射模的刻画；文献[24]建立了 $T=\begin{pmatrix}R & 0\\ C & S\end{pmatrix}$上一类 Gorenstein 投射(内射)模与 $\mathscr{B}_C(S)$($\mathscr{A}_C(R)$)中的 G_C-投射(内射)模之间的联系，其中 C 是忠实半对偶(S,R)-双模.

受上述研究工作的启发，本文讨论形式三角矩阵环 $T=\begin{pmatrix}R & 0\\ C & S\end{pmatrix}$上的一类 Ding 投射模和 Ding 内射模的构造.

1 预备知识

本文中的环均指有单位元的结合环，模均是酉模. 设 R 是环，用 $\mathscr{P}(R)$($\mathscr{I}(R)$,$\mathscr{F}(R)$)表示所有投射(内射、平坦)左 R-模的类. 用 R-Mod(Mod-R)表示左(右)R-模范畴.

设 R,S 是两个环，U 是一个(S,R)-双模. 令 $T=\begin{pmatrix}R & 0\\ U & S\end{pmatrix}$，则 T 关于矩阵的加法和乘法构成一个环，称为形式三角矩阵环. 文献[25]中定理 1.5 确定了形式三角矩阵环 T 上的模结构：左 T-模范畴等价于范畴 Ω，其中 Ω 中的对象是三元组 $M=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$，这里 $M_1\in R$-Mod，$M_2\in S$-Mod，$\varphi^M: U\otimes_R M_1\to M_2$ 是左 S-模同态；Ω 中的对象 $\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 到对象 $\begin{pmatrix}N_1\\ N_2\end{pmatrix}_{\varphi^N}$ 之间的左 T-模同态是一对态射 $\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}$，其中 $f_1: M_1\to N_1$ 是左 R-模同态，$f_2: M_2\to N_2$ 是左 S-模同态，且满足如下交换图：

$$\begin{tikzcd} U\otimes_R M_1 \arrow[r, "1\otimes f_1"] \arrow[d, "\varphi^M"'] & U\otimes_R N_1 \arrow[d, "\varphi^N"'] \\ M_2 \arrow[r, "f_2"] & N_2 \end{tikzcd}.$$

对 Ω 中的任意对象 $M=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$，定义$\widetilde{\varphi^M}: M_1\to \mathrm{Hom}_S(U,M_2)$，$\widetilde{\varphi^M}(x)(u)=\varphi^M(u\otimes x)$，其中 $u\in U$，$x\in M_1$.

左 T-模的序列

$$0\to \begin{pmatrix}L_1\\ L_2\end{pmatrix}_{\varphi^L}\to \begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}\to \begin{pmatrix}N_1\\ N_2\end{pmatrix}_{\varphi^N}\to 0$$

正合当且仅当左 R-模的序列 $0\to L_1\to M_1\to N_1\to 0$ 正合，且左 S-模的序列 $0\to L_2\to M_2\to N_2\to 0$ 正合.

引理 1[26] 设 $M_1,M_2\in R$-Mod，$N_1,N_2\in S$-Mod，U 是(S,R)-双模，则存在以下同构：

1) $\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}M_1\\ (U\otimes_R M_1)\oplus M_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}N_1\\ N_2\end{pmatrix}\right)\cong \mathrm{Hom}_R(M_1,N_1)\oplus \mathrm{Hom}_S(M_2,N_2)$；

2) $\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}N_1\oplus\mathrm{Hom}_S(U,N_2)\\N_2\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Hom}_R(M_1,N_1)\oplus\mathrm{Hom}_S(M_2,N_2)$.

引理 2[18] $P=\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}_{\varphi^P}$ 是投射左 T-模当且仅当 P_1 是投射左 R-模，φ^P：$U\otimes_R P_1\to P_2$ 是单射，Coker φ^P 是投射左 S-模.

引理 3[19] $I=\begin{pmatrix}I_1\\I_2\end{pmatrix}_{\varphi^I}$是内射左 T-模当且仅当 I_2 是内射左 S-模，$\widetilde{\varphi^I}$：$I_1\to\mathrm{Hom}_B(U,I_2)$是满射，Ker $\widetilde{\varphi^I}$是内射左R-模.

引理 4[20] $F=\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}_{\varphi^F}$ 是平坦左 T-模当且仅当 F_1 是平坦左 R-模，φ^F：$U\otimes_R F_1\to F_2$ 是单射，Coker φ^F 是平坦左 S-模.

定义 1[27] 如果对任意有限表现左 R-模 N，有 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$，则称左 R-模 M 是 FP-内射模.

记 $\mathscr{FI}(R)$为 FP-内射左R-模构成的类.

定义 2[1] 如果存在 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{F}(R))$-正合的正合序列$\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$，则称左 R-模 M 为 Ding 投射模，其中对任意的 $i\geqslant0$，$P_i,P^i\in\mathscr{P}(R)$.

记 $\mathscr{DP}(R)$为 Ding 投射左 R-模构成的类.

定义 3[2] 如果存在 $\mathrm{Hom}_R(\mathscr{FI}(R),-)$-正合的正合序列$\cdots\to I_1\to I_0\to I^0\to I^1\to\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(I^0\to I^1)$，则称左 R-模 M 为 Ding 内射模，其中对任意的 $i\geqslant0$，$I_i,I^i\in\mathscr{I}(R)$.

记 $\mathscr{DI}(R)$为 Ding 内射左 R-模构成的类.

定义 4[14] 如果${}_SC_R$ 满足下列条件，则称(S,R)-双模 C 是半对偶模：

1) ${}_SC$ 和 C_R 分别存在一个有限生成投射左 S-模和右 R-模的投射分解；

2) 自然同态${}_SS_S\to\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,C)$和${}_RR_R\to\mathrm{Hom}_S(C,C)$是同构；

3) $\mathrm{Ext}_S^{\geqslant1}(C,C)=\mathrm{Ext}_{R^{\mathrm{op}}}^{\geqslant1}(C,C)=0$.

如果${}_SC_R$ 满足下列条件，则称半对偶模${}_SC_R$ 是忠实半对偶模：

1) 对任意的左 S-模 M，若 $\mathrm{Hom}_S(C,M)=0$，则 $M=0$；

2) 对任意的右 R-模 N，若 $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,N)=0$，则 $N=0$.

定义 5[14,28] 1) 如果 $M\cong C\otimes_R P$，则称左 S-模 M 是 C-投射的，其中 P 是投射左R-模；

2) 如果 $M\cong C\otimes_R F$，则称左 S-模 M 是 C-平坦的，其中 F 是平坦左R-模；

3) 如果 $N\cong\mathrm{Hom}_S(C,I)$，则称左 R-模 N 是 C-内射的，其中 I 是内射左 S-模；

4) 如果 $N\cong\mathrm{Hom}_S(C,I)$，则称左 R-模 N 是 C-FP-内射的，其中 I 是 FP-内射左 S-模.

记 $\mathscr{P}_C(S)$为 C-投射左 S-模构成的类；$\mathscr{F}_C(S)$为 C-平坦左 S-模构成的类；$\mathscr{I}_C(R)$为 C-内射左R-模构成的类；$\mathscr{FI}_C(R)$为 C-FP-内射左R-模构成的类.

定义 6[14] 相对于半对偶模${}_SC_R$ 的 Auslander 类 $\mathscr{A}_C(R)$是由满足以下条件的所有左 R-模 N 构成的类：

1) $\mathrm{Ext}_S^{i\geqslant1}(C,C\otimes_R N)=0$；

2) $\mathrm{Tor}_{i\geqslant1}^R(C,N)=0$；

3) 自然赋值同态 μ_N：$N\to\mathrm{Hom}_S(C,C\otimes_R N)$是同构.

相对于半对偶模${}_SC_R$ 的 Bass 类 $\mathscr{B}_C(S)$是由满足以下条件的所有左 S-模 M 构成的类：

1) $\mathrm{Ext}_S^{i\geqslant1}(C,M)=0$；

2) $\mathrm{Tor}_{i\geqslant1}^R(C,\mathrm{Hom}_S(C,M))=0$；

3) 自然赋值同态 ν_M：$C\otimes_R\mathrm{Hom}_S(C,M)\to M$ 是同构.

引理 5[14] 设 M 和 M'都是左R-模，$i\geqslant0$. 若 $M\in\mathscr{A}_C(R)$，$\mathrm{Tor}_{\geqslant1}^R(C,M')=0$，则
$$\mathrm{Ext}_R^i(M',M)\cong\mathrm{Ext}_S^i(C\otimes_R M',C\otimes_R M).$$

2　主要结果

定义 7[17]　1）如果存在 $\mathrm{Hom}_S(\mathscr{P}_C(S),-)$-正合且 $\mathrm{Hom}_S(-,\mathscr{F}_C(S))$-正合的正合序列$\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$，则左 S-模 M 称为 Ding C-投射模，其中对任意的 $i\geqslant 0$，$P_i,P^i\in\mathscr{P}_C(S)$. 记 $D(\mathscr{P}_C(S))$为 Ding C-投射左 S-模构成的类.

2）如果存在 $\mathrm{Hom}_R(\mathscr{F}\mathscr{I}_C(R),-)$-正合且 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{I}_C(R))$-正合的正合序列$\cdots\to I_1\to I_0\to I^0\to I^1\to\cdots$，使得 $N\cong\mathrm{Ker}(I^0\to I^1)$，则左 R-模 N 称为 Ding C-内射模，其中对任意的 $i\geqslant 0$，$I_i,I^i\in\mathscr{I}_C(R)$. 记$D(\mathscr{I}_C(R))$为 Ding C-内射左 R-模构成的类.

定理 1　设 $T=\begin{pmatrix}R & 0\\ C & S\end{pmatrix}$是形式三角矩阵环，其中 C 是忠实半对偶(S,R)-双模，则：

1）M 是 Ding C-投射左 S-模当且仅当$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_S(C,M)\\ M\end{pmatrix}$是 Ding 投射左 T-模；

2）N 是 Ding C-内射左 R-模当且仅当$\begin{pmatrix}N\\ C\otimes_R N\end{pmatrix}$是 Ding 内射左 T-模.

证明：1）必要性. 因为 M 是 Ding C-投射左 S-模，所以存在 $\mathrm{Hom}_S(\mathscr{P}_C(S),-)$-正合且 $\mathrm{Hom}_S(-,\mathscr{F}_C(S))$-正合的左 S-模的正合序列

$$\mathbb{U}:\cdots\to C\otimes_R P_1\to C\otimes_R P_0\to C\otimes_R P^0\xrightarrow{g^0} C\otimes_R P^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Ker}\ g^0$，其中对任意的 $i\geqslant 0$，$P_i,P^i\in\mathscr{P}(R)$. 由文献[17]中事实 2.3 知 $M\in\mathscr{B}_C(S)$，由文献[14]中推论 6.1 知 $C\otimes_R P_i,C\otimes_R P^i\in\mathscr{B}_C(S)$，$i\geqslant 0$，从而由文献[14]中推论 6.3 知 $\mathbb{U}$ 中每个同态的核都在 $\mathscr{B}_C(S)$中. 又由文献[14]中推论 6.2 知 $\mathscr{P}(R)\in\mathscr{A}_C(R)$，所以对任意的 $i\geqslant 0$，$\mathrm{Hom}_S(C,C\otimes_R P_i)\cong P_i$，$\mathrm{Hom}_S(C,C\otimes_R P^i)\cong P^i$. 于是用 $\mathrm{Hom}_S(C,-)$作用于 $\mathbb{U}$ 可得正合序列

$$\mathrm{Hom}_S(C,\mathbb{U}):\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\xrightarrow{f^0} P^1\to\cdots,$$

使得 $\mathrm{Hom}_S(C,M)\cong\mathrm{Ker}\ f^0$. 因此，存在左 T-模的正合序列

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_S(C,\mathbb{U})\\ \mathbb{U}\end{pmatrix}:\cdots\to\begin{pmatrix}P_1\\ C\otimes_R P_1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}P_0\\ C\otimes_R P_0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}P^0\\ C\otimes_R P^0\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}f^0\\ g^0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}P^1\\ C\otimes_R P^1\end{pmatrix}\to\cdots,$$

使得$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_S(C,M)\\ M\end{pmatrix}\cong\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}f^0\\ g^0\end{pmatrix}$，其中对任意的 $i\geqslant 0$，$P_i,P^i\in\mathscr{P}(R)$. 设$\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\end{pmatrix}$是平坦左 T-模，则

$$\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_S(C,\mathbb{U})\\ \mathbb{U}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_S(C,\mathbb{U}),F_1)\cong\mathrm{Hom}_S(\mathbb{U},C\otimes_R F_1)$$

正合，其中第一个同构由引理 1 可得，第二个同构由 $F_1\in\mathscr{A}_C(R)$及引理 5 可得. 因此，$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_S(C,M)\\ M\end{pmatrix}$是 Ding 投射左 T-模.

充分性. 因为$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_S(C,M)\\ M\end{pmatrix}$是 Ding 投射左 T-模，所以由引理 2 知，存在 $\mathrm{Hom}_T(-,\mathscr{F}(T))$-正合的左 T-模的正合序列

$$\cdots\to\begin{pmatrix}P_0\\ (C\otimes_R P_0)\oplus H_0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}P^0\\ (C\otimes_R P^0)\oplus H^0\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}h^0\\ j^0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}P^1\\ (C\otimes_R P^1)\oplus H^1\end{pmatrix}\to\cdots,$$

使得$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_S(C,M)\\ M\end{pmatrix}\cong\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}h^0\\ j^0\end{pmatrix}$，其中对任意的 $i\geqslant 0$，$P_i,P^i\in\mathscr{P}(R)$，$H_i,H^i\in\mathscr{P}(S)$. 从而存在左 R-模的正合序列

$$\mathbb{P}:\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\xrightarrow{h^0} P^1\to\cdots,$$

使得 $\mathrm{Hom}_S(C,M)\cong \mathrm{Ker}\ h^0$. 因为序列 $(C\otimes_R\mathbb{P})\oplus\mathbb{H}$ 正合，所以序列

$$C\otimes_R\mathbb{P}:\cdots\to C\otimes_R P_1\to C\otimes_R P_0\to C\otimes_R P^0\to C\otimes_R P^1\to\cdots$$

正合. 从而由文献[29]中定理4.7知 $\mathrm{Hom}_S(C,M)\in\mathscr{A}_C(R)$. 于是由文献[30]中定理2.8知 $M\in\mathscr{B}_C(S)$. 设 $F\in\mathscr{F}(R)$，则由引理4知 $\begin{pmatrix}F\\ C\otimes_R F\end{pmatrix}\in\mathscr{F}(T)$，故由引理1知

$$\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}\mathbb{P}\\ (C\otimes_R\mathbb{P})\oplus\mathbb{H}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}F\\ C\otimes_R F\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Hom}_S((C\otimes_R\mathbb{P}),C\otimes_R F)\oplus\mathrm{Hom}_S(\mathbb{H},C\otimes_R F)$$

正合. 因此 $\mathrm{Hom}_S(C\otimes_R\mathbb{P},C\otimes_R F)$ 正合. 由文献[14]中推论6.2知 $\mathbb{P}$ 中的每一项属于 $\mathscr{A}_C(R)$，$F\in\mathscr{A}_C(R)$，所以由引理5知 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P},F)$ 正合. 因此，由文献[17]中引理4.1知 M 是 Ding C-投射左 S-模.

2) 必要性. 因为 N 是 Ding C-内射左 R-模，所以存在 $\mathrm{Hom}_R(\mathscr{FI}_C(R),-)$-正合且 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{I}_C(R))$-正合的左 R-模正合序列

$$\mathbb{G}:\cdots\to\mathrm{Hom}_S(C,E_1)\to\mathrm{Hom}_S(C,E_0)\to\mathrm{Hom}_S(C,E^0)\xrightarrow{h^0}\mathrm{Hom}_S(C,E^1)\to\cdots,$$

使得 $N\cong\mathrm{Ker}\ h^0$，其中对任意的 $i\geqslant 0$，$E_i,E^i\in\mathscr{I}(S)$. 由文献[17]中事实2.3的对偶知 $N\in\mathscr{A}_C(R)$，由文献[14]中推论6.1知 $\mathrm{Hom}_S(C,E_i),\mathrm{Hom}_S(C,E^i)\in\mathscr{A}_C(R)$，$i\geqslant 0$，从而由文献[14]中推论6.3知 $\mathbb{G}$ 中每个同态的核都在 $\mathscr{A}_C(R)$ 中. 又由文献[14]中推论6.2知 $\mathscr{I}(S)\subseteq\mathscr{B}_C(S)$，所以对任意的 $i\geqslant 0$，$C\otimes_R\mathrm{Hom}_S(C,E_i)\cong E_i$，$C\otimes_R\mathrm{Hom}_S(C,E^i)\cong E^i$. 于是用 $(C\otimes_R -)$ 作用于 $\mathbb{G}$ 可得正合序列

$$C\otimes_R\mathbb{G}:\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\xrightarrow{j^0}E^1\to\cdots,$$

使得 $C\otimes_R N\cong\mathrm{Ker}\ j^0$. 因此，存在左 T-模的正合序列

$$\begin{pmatrix}\mathbb{G}\\ C\otimes_R\mathbb{G}\end{pmatrix}:\cdots\to\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_S(C,E_0)\\ E_0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_S(C,E^0)\\ E^0\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}h^0\\ j^0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_S(C,E^1)\\ E^1\end{pmatrix}\to\cdots,$$

使得 $\begin{pmatrix}N\\ C\otimes_R N\end{pmatrix}\cong\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}h^0\\ j^0\end{pmatrix}$. 设 $\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}$ 是FP-内射左 T-模，则由文献[31]中定理3.3知 A_2 是FP-内射左 S-模，并且

$$\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbb{G}\\ C\otimes_R\mathbb{G}\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Hom}_S(A_2,C\otimes_R\mathbb{G})\cong\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_S(C,A_2),\mathbb{G})$$

正合，其中第一个同构由引理1可得，第二个同构由 $A_2\in\mathscr{B}_C(S)$[28] 及引理5可得. 因此，$\begin{pmatrix}N\\ C\otimes_R N\end{pmatrix}$ 是 Ding 内射左 T-模.

充分性. 因为 $\begin{pmatrix}N\\ C\otimes_R N\end{pmatrix}$ 是 Ding 内射左 T-模，所以由引理3知，存在 $\mathrm{Hom}_T(\mathscr{FI}(T),-)$-正合的左 T-模正合序列

$$\begin{pmatrix}\mathbb{S}\oplus\mathrm{Hom}_S(C,\mathbb{H})\\ \mathbb{H}\end{pmatrix}:\cdots\to\begin{pmatrix}S^0\oplus\mathrm{Hom}_S(C,H^0)\\ H^0\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}f^0\\ g^0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}S^1\oplus\mathrm{Hom}_S(C,H^1)\\ H^1\end{pmatrix}\to\cdots,$$

使得 $\begin{pmatrix}N\\ C\otimes_R N\end{pmatrix}\cong\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}f^0\\ g^0\end{pmatrix}$，其中对任意的 $i\geqslant 0$，$S_i,S^i\in\mathscr{I}(R)$，$H_i,H^i\in\mathscr{I}(S)$. 故存在左 S-模的正合序列

$$\mathbb{H}:\cdots\to H_1\to H_0\to H^0\xrightarrow{g^0}H^1\to\cdots,$$

使得 $C\otimes_R N\cong\mathrm{Ker}\ g^0$. 因为序列 $\mathbb{S}\oplus\mathrm{Hom}_S(C,\mathbb{H})$ 正合，所以序列

$$\mathrm{Hom}_S(C,\mathbb{H}):\cdots\to\mathrm{Hom}_S(C,H_1)\to\mathrm{Hom}_S(C,H_0)\to\mathrm{Hom}_S(C,H^0)\to\mathrm{Hom}_S(C,H^1)\to\cdots$$

正合. 从而由文献[29]中定理4.8知 $C\otimes_R N\in\mathscr{B}_C(S)$. 于是由文献[30]中定理2.8知 $N\in\mathscr{A}_C(R)$. 设

$B\in\mathscr{FI}(S)$，则由文献[31]中定理 3.3 知 $O=\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_S(C,B)\\ B\end{pmatrix}\in\mathscr{FI}(T)$. 故由引理 1 知

$$\mathrm{Hom}_T\left(O,\begin{pmatrix}\mathbb{S}\oplus\mathrm{Hom}_S(C,\mathbb{H})\\ \mathbb{H}\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_S(C,B),\mathbb{S})\oplus\mathrm{Hom}_S(B,\mathbb{H})$$

正合，从而 $\mathrm{Hom}_S(B,\mathbb{H})$正合. 因此，由文献[17]中引理 4.1 的对偶命题知 N 是 Ding C-内射左R-模. 证毕.

定义 8[13]　1）如果存在 $\mathrm{Hom}_S(-,\mathscr{F}_C(S))$-正合的正合序列

$$\cdots\to P_1\to P_0\to C\otimes_R P^0\to C\otimes_R P^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Ker}(C\otimes_R P^0\to C\otimes_R P^1)$，则左 S-模 M 称为 $\mathscr{D}_C$-投射模，其中对任意的 $i\geqslant 0$，$P_i\in\mathscr{P}(S)$，$P^i\in\mathscr{P}(R)$.

2）如果存在 $\mathrm{Hom}_R(\mathscr{FI}_C(R),-)$-正合的正合序列

$$\cdots\to\mathrm{Hom}_S(C,I_1)\to\mathrm{Hom}_S(C,I_0)\to I^0\to I^1\to\cdots,$$

使得 $N\cong\mathrm{Ker}(I^0\to I^1)$，则左 R-模 N 称为 $\mathscr{D}_C$-内射模，其中对于任意的 $i\geqslant 0$，$I_i\in\mathscr{I}(S)$，$I^i\in\mathscr{I}(R)$.

设 $T=\begin{pmatrix}R&0\\ C&S\end{pmatrix}$，其中 C 是忠实半对偶(S,R)-双模. 由文献[24]中定理 2.3 知，对任意的 $M\in\mathscr{B}_C(S)$和 $N\in\mathscr{A}_C(R)$，M 是 G_C-投射左 S-模当且仅当$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_S(C,M)\\ M\end{pmatrix}$是 Ding 投射左 T-模；N 是 G_C-内射左R-模当且仅当$\begin{pmatrix}N\\ C\otimes_R N\end{pmatrix}$是 Ding 内射左 T-模. 从而有如下推论.

推论 1　设 $T=\begin{pmatrix}R&0\\ C&S\end{pmatrix}$是形式三角矩阵环，则：

1）M 是 D_C-投射左 S-模且 $M\in\mathscr{B}_C(S)$当且仅当$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_S(C,M)\\ M\end{pmatrix}$是 Ding 投射左 T-模；

2）N 是 D_C-内射左R-模且 $N\in\mathscr{A}_C(R)$当且仅当$\begin{pmatrix}N\\ C\otimes_R N\end{pmatrix}$是 Ding 内射左 T-模.

其中 C 是忠实半对偶(S,R)-双模.

证明：由定理 1 和文献[17]中注记 4.5 及其对偶可得结论.

参　考　文　献

[1] DING N Q，LI Y L，MAO L X. Strongly Gorenstein Flat Modules [J]. Journal of the Australian Mathematical Society，2009，86(3)：323-338.

[2] MAO L X，DING N Q. Gorenstein FP-Injective and Gorenstein Flat Modules [J]. Journal of Algebra and Its Applications，2008，7(4)：491-506.

[3] YANG G，LIU Z K，LIANG L. Ding Projective and Ding Injective Modules [J]. Algebra Colloquium，2013，20(4)：601-612.

[4] GILLESPIE J. Model Structures on Modules over Ding-Chen Rings [J]. Homology，Homotopy and Applications，2010，12(1)：61-73.

[5] IACOB A. Ding Injective Modules [J]. Communications in Algebra，2021，49(7)：2901-2905.

[6] 张豫冈，曹天涯. Ding-投射模和粘合 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2022，60(2)：307-310. (ZHANG Y G，CAO T Y. Ding-Projective Modules and Recollement [J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2022，60(2)：307-310.)

[7] GILLESPIE J，IACOB A. Duality Pairs，Generalized Gorenstein Modules，and Ding Injective Envelopes [J]. Comptes Rendus Mathématique，Académie des Sciences，Paris，2022，360：381-398.

[8] MAO L X. Ding Projective and Ding Injective Modules over Trivial Ring Extensions [J]. Czechoslovak Mathematical Journal，2023，73(3)：903-919.

[9] 李润华, 张翠萍. 平凡环扩张上的强 Ding 投射模[J]. 吉林大学学报(理学版), 2024, 62(4): 781-786. (LI R H, ZHANG C P. Strongly Ding Projective Modules over Trivial Ring Extensions [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2024, 62(4): 781-786.)
[10] ASEFA D. Ding Projective Modules over Morita Context Rings [J]. Communications in Algebra, 2024, 52(1): 79-87.
[11] HOLM H, JØRGENSEN P. Semi-dualizing Modules and Related Gorenstein Homological Dimensions [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2006, 205(2): 423-445.
[12] WHITE D. Gorenstein Projective Dimension with Respect to a Semidualizing Module [J]. Journal of Commutative Algebra, 2010, 2(1): 111-137.
[13] ZHANG C X, WANG L M, LIU Z K. Ding Projective Modules with Respect to a Semidualizing Module [J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2014, 51(2): 339-356.
[14] HOLM H, WHITE D. Foxby Equivalence over Associative Rings [J]. Journal of Mathematics of Kyoto University, 2007, 47(4): 781-808.
[15] LIU Z F, HUANG Z Y, XU A M. Gorenstein Projective Dimension Relative to a Semidualizing Bimodule [J]. Communications in Algebra, 2013, 41(1): 1-18.
[16] GENG Y X, DING N Q. $\mathscr{W}$-Gorenstein Modules [J]. Journal of Algebra, 2011, 325: 132-146.
[17] ZHANG C X, WANG L M, LIU Z K. Ding Projective Modules with Respect to a Semidualizing Bimodule [J]. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2015, 45(4): 1389-1411.
[18] HAGHANY A, VARADARAJAN K. Study of Modules over Formal Triangular Matrix Rings [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2000, 147(1): 41-58.
[19] HAGHANY A, VARADARAJAN K. Study of Formal Triangular Matrix Rings [J]. Communications in Algebra, 1999, 27(11): 5507-5525.
[20] FOSSUM R M, GRIFFITH P A, REITEN I. Trivial Extensions of Abelian Categories [M]. New York: Springer-Verlag, 1975: 1-122.
[21] ZHANG P. Gorenstein-Projective Modules and Symmetric Recollements [J]. Journal of Algebra, 2013, 388(15): 65-80.
[22] LI H H, ZHENG Y F, HU J S, et al. Gorenstein Projective Modules and Recollements over Triangular Matrix Rings [J]. Communications in Algebra, 2020, 48(11): 4932-4947.
[23] MAO L X. Ding Modules and Dimensions over Formal Triangular Matrix Rings [J]. Rendiconti del Seminario Matematico Della Universitàdi Padova, 2022, 148: 1-22.
[24] MAO L X. A Class of Special Formal Triangular Matrix Rings [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2024, 47(4): 129-1-129-17.
[25] GREEN E L. On the Representation Theory of Rings in Matrix Form [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1982, 100(1): 123-138.
[26] ENOCHS E E, CORTÉS-IZURDIAGA M, TORRECILLAS B. Gorenstein Conditions over Triangular Matrix Rings [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2014, 218(8): 1544-1554.
[27] STENSTRÖM B. Coherent Rings and FP-Injective Modules [J]. Journal of the London Mathematical Society (Second Series), 1970, 2(2): 323-329.
[28] ZHANG D D, OUYANG B Y. Semidualizing Modules and Related Modules [J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2011, 10(6): 1261-1282.
[29] GAO Z H, ZHAO T W. Foxby Equivalence Relative to C-Weak Injective and C-Weak Flat Modules [J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2017, 54(5): 1457-1482.
[30] TAKAHASHI R, WHITE D. Homological Aspects of Semidualizing Modules [J]. Mathematica Scandinavica, 2010, 106(1): 5-22.
[31] MAO L X. Duality Pairs and FP-Injective Modules over Formal Triangular Matrix Rings [J]. Communications in Algebra, 2020, 48(12): 5296-5310.

(责任编辑: 赵立芹)