doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2025052

$\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子的刚性结果

杨瑞瑞，刘建成
(西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070)

摘要： 首先，用散度定理和几何分析的方法研究紧致 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子的刚性问题，得到了关于孤立子的势向量场和 $\boldsymbol{\eta}$ 的对偶向量场的两个关键积分公式．其次，在不同的积分条件下得到了该孤立子的刚性结果，即证明了该孤立子或是 $\boldsymbol{\eta}$-Einstein 流形或是 Einstein 流形．

关键词： $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子；Einstein 流形；Killing 向量场；对偶向量场

中图分类号： O186.12 **文献标志码：** A **文章编号：** 1671-5489(2025)06-1622-07

Rigidity Results of $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon Solitons

YANG Ruirui, LIU Jiancheng
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: Firstly, by using the divergence theorem and geometric analysis methods, we studied the rigidity problem of compact $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon solitons, and obtained two key integral formulas for the potential vector field of the soliton and the dual vector field of $\boldsymbol{\eta}$. Secondly, under different integral conditions, we obtain rigidity results of the soliton, which proves that the soliton is either an $\boldsymbol{\eta}$-Einstein manifold or an Einstein manifold.

Keywords: $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon soliton; Einstein manifold; Killing vector field; dual vector field

0 引言

Bourguignon[1]在 n 维 Riemann 流形$(M^n,\boldsymbol{g})$上引入并研究了 Ricci-Bourguignon 流，其演化方程如下：

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t}=-2(\boldsymbol{Ric}-\rho r\boldsymbol{g}),\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{Ric}$ 是 Ricci 张量，r 是数量曲率，ρ 是常数．特别地，当 $\rho=0$ 时，流(1)即为 Ricci 流[2]，当 $\rho\leqslant 0$ 时，流(1)是 Ricci 流和 Yamabe 流之间的"插值"[3-5]．

Catino 等[6]对 Ricci-Bourguignon 流的抛物理论进行了系统研究，证明了流(1)的短时存在性．Dwivedi[7]引入了 Ricci-Bourguignon 流的自相似解——Ricci-Bourguignon 孤立子，即如果存在向量场 $\boldsymbol{V}$ 和常数 λ,ρ，使得

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}_V\boldsymbol{g}+\boldsymbol{Ric}=(\lambda+\rho r)\boldsymbol{g},$$

收稿日期： 2025-02-24． **网络首发日期：** 2025-09-03．

第一作者简介： 杨瑞瑞(2000—)，女，汉族，硕士研究生，从事微分几何的研究，E-mail: yangruirui2023@163.com. **通信作者简介：** 刘建成(1968—)，男，汉族，博士，教授，从事微分几何与几何分析的研究，E-mail: liujc@nwnu.edu.cn.

基金项目： 国家自然科学基金(批准号：12161078)和甘肃省基础研究创新群体项目(批准号：24JRRA778)．

网络首发地址： https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20250901.1337.001.

则$(M^n,\boldsymbol{g})$称为 Ricci-Bourguignon 孤立子或 ρ-Einstein 孤立子，记作$(M^n,\boldsymbol{g},\boldsymbol{V},\lambda,\rho)$，其中 $\mathscr{L}_V\boldsymbol{g}$ 表示度量 $\boldsymbol{g}$ 关于切向量场 $\boldsymbol{V}$ 的李导数．特别地，如果 $\rho=\frac{1}{2}$，则 Ricci-Bourguignon 孤立子称为 Einstein 孤立子；如果 $\rho=0$，则 Ricci-Bourguignon 孤立子称为 Ricci 孤立子；如果 $\rho=\frac{1}{2(n-1)}$，则 Ricci-Bourguignon 孤立子称为 Schouten 孤立子；如果 $\rho=\frac{1}{n}$，则 Ricci-Bourguignon 孤立子称为无迹 Ricci 孤立子．

Blaga 等[8]对 Ricci-Bourguignon 孤立子进行推广，提出了 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子的概念．设$(M^n,\boldsymbol{g})$是 $n(\geqslant 3)$维 Riemann 流形，如果存在切向量场 $\boldsymbol{V}$ 和常数 ρ,λ,μ，使得

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}_V\boldsymbol{g}+\boldsymbol{Ric}=(\lambda+\rho r)\boldsymbol{g}+\mu\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\eta},\tag{2}$$

则$(M^n,\boldsymbol{g})$称为 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子，记为$(M^n,\boldsymbol{g},\boldsymbol{V},\lambda,\rho,\mu)$，其中 $\boldsymbol{\eta}$ 是 1-形式，$\boldsymbol{V}$ 称为势向量场．当 $\lambda>0$（或 $=0$ 或 <0）时，孤立子称为收缩（或稳定或扩张）．如果势向量场 $\boldsymbol{V}$ 是 Killing 向量场，即 $\mathscr{L}_V\boldsymbol{g}=0$，则孤立子平凡．若存在常数 α 和 β，使得$(M^n,\boldsymbol{g})$的 Ricci 张量 $\boldsymbol{Ric}$ 满足

$$\boldsymbol{Ric}=\alpha\boldsymbol{g}+\beta\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\eta},$$

则称$(M^n,\boldsymbol{g})$是 $\boldsymbol{\eta}$-Einstein 流形．Blaga 等[8]证明了当 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子$(M^n,\boldsymbol{g},\boldsymbol{V},\lambda,\rho,\mu)$中 $\rho\neq 0$ 时，有

$$|\boldsymbol{Ric}|^2\geqslant|\nabla\boldsymbol{V}|^2+(n\rho-1)^2\left[\frac{n-1}{n}\mu^2|\boldsymbol{V}|^4-\mu\boldsymbol{V}(|\boldsymbol{V}|^2)\right].$$

Dey 等[9]证明了若$(M^4,\boldsymbol{g})$是具有半对称能量动量且存在 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子的广义相对论时空，则 $\mu=1$ 且 $\lambda=\frac{k\tau(4\rho-1)}{4}+1$，其中 τ 是能量动量张量的迹，$k(\neq 0)$是引力常数．Chaubey 等[10]证明了双曲 Sasakian 流形的不变子流形若是 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子，则它必是 $\boldsymbol{\eta}$-Einstein 流形．Dey[11]证明了若(k,μ)-近 Kenmotsu 流形是近 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子，则它是 $\boldsymbol{\eta}$-Einstein 流形．Mandal 等[12]在势向量场与 Reeb 向量场逐点共线的假设下，证明了三维紧致近 coKähler 流形上的 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子既是 k-近 coKähler 流形又是 $\boldsymbol{\eta}$-Einstein 流形．

上述对 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子的研究大多数集中在一些特殊 Riemann 流形上，本文的目的是在一般 Riemann 流形上将 Ghosh 关于 Ricci-Bourguignon 孤立子和 m-拟-Einstein 流形的结果推广到 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子的情形．Ghosh[13]在 $\rho=\frac{1}{2}$ 的条件下，证明了紧致 Ricci-Bourguignon 孤立子是 Einstein 流形，本文将其进行推广．此外，Ghosh[14]还证明了在 m-拟-Einstein 流形上成立如下积分公式：

$$\int_M\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{V}r-\|\boldsymbol{Q}\|^2+\frac{1}{m}\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})+\lambda r\right]\mathrm{d}M=0.$$

本文将其进行推广．

1　预备知识

设$(M^n,\boldsymbol{g})$是 n 维 Riemann 流形，在局部标准正交标架场$\{\boldsymbol{e}_i\}$下，切向量场 $\boldsymbol{V}$ 的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{V}$ 定义为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{V}=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{g}(\nabla_{e_i}\boldsymbol{V},\boldsymbol{e}_i).$$

定义 $\boldsymbol{Q}$ 是满足 $\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{QX},\boldsymbol{Y})$ 的 Ricci 算子，则有

$$\|\boldsymbol{Q}\|^2=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Qe}_i,\boldsymbol{Qe}_i).$$

广义 Laplacian 算子 $\bar{\Delta}$ 定义为

$$\bar{\Delta}\boldsymbol{V}=\sum_{i=1}^n(\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}-\nabla_{e_i}\nabla_{e_i})\boldsymbol{V},\tag{3}$$

与 $\bar{\Delta}$ 相关的 Weitzenböck 公式[15]为

$$\bar{\Delta}\boldsymbol{V}=\Delta\boldsymbol{V}-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{V}.\tag{4}$$

如果向量场 $\boldsymbol{V}$ 的对偶 1-形式 $\boldsymbol{V}^{\flat}$(即满足 $\boldsymbol{V}^{\flat}(\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{V})$)是闭的或余闭的，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{V}^{\flat}=0$ 或 $\delta\boldsymbol{V}^{\flat}=0$，则称 $\boldsymbol{V}$ 是调和向量场. 协变微分 ∇ 关于切向量场 $\boldsymbol{V}$ 的李导数 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\nabla$ 定义为

$$(\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\nabla)(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{V}-\nabla_{\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{V}-\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{V})\boldsymbol{Y}.\tag{5}$$

由文献[16]可得：

引理 1 对$(M^n,\boldsymbol{g})$上的任意切向量场 $\boldsymbol{V}$，有：

$$\operatorname{div}(\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V})-\operatorname{div}((\operatorname{div}\boldsymbol{V})\boldsymbol{V})=\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})+\frac{1}{2}\|\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g}\|^2-\|\nabla\boldsymbol{V}\|^2-(\operatorname{div}\boldsymbol{V})^2;\tag{6}$$

$$\frac{1}{2}\Delta\|\boldsymbol{V}\|^2=\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})-\boldsymbol{g}(\Delta\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})+\|\nabla\boldsymbol{V}\|^2.\tag{7}$$

引理 2 对于 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子$(M^n,\boldsymbol{g},\boldsymbol{V},\lambda,\rho,\mu)$，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\|\boldsymbol{V}\|^2=&\|\nabla\boldsymbol{V}\|^2-\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})-(n-2)\boldsymbol{V}(\lambda+\rho r)+\\&2\mu(\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})+2\mu\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})-\mu\nabla_{\boldsymbol{V}}\|\boldsymbol{W}\|^2,\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{W}$ 是 $\boldsymbol{\eta}$ 的对偶向量场.

证明：对式(2)沿任意切向量场 $\boldsymbol{X}$ 方向求协变导数，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\nabla_{\boldsymbol{X}}\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g})(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})+(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Ric})(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})=&[\boldsymbol{X}(\lambda+\rho r)]\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})+\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{W})+\\&\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z},\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{W}).\end{aligned}\tag{9}$$

用文献[17]中的计算公式，有

$$(\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{g}-\nabla_{\boldsymbol{X}}\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g}-\nabla_{[\boldsymbol{V},\boldsymbol{X}]}\boldsymbol{g})(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})=-\boldsymbol{g}((\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\nabla)(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\boldsymbol{Z})-\boldsymbol{g}((\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\nabla)(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}),\boldsymbol{Y}),\tag{10}$$

由相容性可知式(10)变为

$$(\nabla_{\boldsymbol{X}}\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g})(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{g}((\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\nabla)(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\boldsymbol{Z})+\boldsymbol{g}((\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\nabla)(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}),\boldsymbol{Y}).\tag{11}$$

将式(11)代入式(9)得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\boldsymbol{g}((\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\nabla)(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\boldsymbol{Z})+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}((\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\nabla)(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}),\boldsymbol{Y})=&-(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Ric})(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})+[\boldsymbol{X}(\lambda+\rho r)]\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})+\\&\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{W})+\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z},\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{W}).\end{aligned}$$

将 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$ 置换两次的结果相加再减去第三次置换的结果，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}((\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\nabla)(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\boldsymbol{Z})=&(\nabla_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Ric})(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})-(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Ric})(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})-(\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Ric})(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X})+\\&[\boldsymbol{X}(\lambda+\rho r)]\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})+[\boldsymbol{Y}(\lambda+\rho r)]\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X})-[\boldsymbol{Z}(\lambda+\rho r)]\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})+\\&\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{W})+\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z},\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{W})+\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z},\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{W})+\\&\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{W})-\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\nabla_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{W})-\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\nabla_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{W}).\end{aligned}\tag{12}$$

设$\{\boldsymbol{e}_i\}$是 M^n 上的局部标准正交标架场，在式(12)中取 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_j$，并考虑式(5)和$(\operatorname{div}\boldsymbol{Ric})\boldsymbol{Y}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{Y}r$(缩并的第二 Bianchi 恒等式)，可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{V}-\nabla_{\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{V}-R(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{V})\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{Z})=&-(n-2)\boldsymbol{Z}(\lambda+\rho r)+2\mu(\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{W})+\\&2\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z},\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W})-2\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\nabla_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{W}).\end{aligned}\tag{13}$$

将式(3)代入式(13)可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(-\bar{\Delta}\boldsymbol{V},\boldsymbol{Z})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{V},\boldsymbol{Z})=&-(n-2)\boldsymbol{Z}(\lambda+\rho r)+2\mu(\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{W})+\\&2\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z},\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W})-2\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\nabla_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{W}).\end{aligned}$$

由于

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\nabla_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{W})=\nabla_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W})-\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}),$$

所以

$$2\boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\nabla_Z \boldsymbol{W})=\nabla_Z\|\boldsymbol{W}\|^2.$$

因此有

$$\bar{\Delta}\boldsymbol{V}-\boldsymbol{QV}=(n-2)\nabla(\lambda+\rho r)-2\mu(\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{W}-2\mu\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W}+\mu\nabla\|\boldsymbol{W}\|^2. \tag{14}$$

将式(4)代入式(14)并与 $\boldsymbol{V}$ 做内积，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(\Delta\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})-2\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})=&(n-2)\boldsymbol{V}(\lambda+\rho r)-2\mu(\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})-\\&2\mu\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})+\mu\nabla_{\boldsymbol{V}}\|\boldsymbol{W}\|^2.\end{aligned} \tag{15}$$

将式(7)减去式(15)即完成证明.

2　主要结果

定理 1　设$(M^n,\boldsymbol{g},\boldsymbol{V},\lambda,\rho,\mu)$是紧致 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子，记$(M^n,\boldsymbol{g})$的数量曲率为 r，$\boldsymbol{W}$ 是 $\boldsymbol{\eta}$ 的对偶向量场. 则下式成立：

$$\int_M\left[\frac{1}{2}\|\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g}\|^2-(1-2\rho)\boldsymbol{V}r+2\mu(\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})+2\mu\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})\right]\mathrm{d}M=0.$$

证明：对式(2)缩并得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{V}=n\lambda+(n\rho-1)r+\mu\|\boldsymbol{W}\|^2. \tag{16}$$

对$(\operatorname{div}\boldsymbol{V})\boldsymbol{V}$ 沿任意切向量场 $\boldsymbol{X}$ 求协变导数，有

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}((\operatorname{div}\boldsymbol{V})\boldsymbol{V})=(\boldsymbol{X}\operatorname{div}\boldsymbol{V})\boldsymbol{V}+(\operatorname{div}\boldsymbol{V})\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{V}. \tag{17}$$

对式(17)求迹并代入式(16)可得

$$\operatorname{div}((\operatorname{div}\boldsymbol{V})\boldsymbol{V})=(n\rho-1)\boldsymbol{V}r+\mu\nabla_{\boldsymbol{V}}\|\boldsymbol{W}\|^2+(\operatorname{div}\boldsymbol{V})^2. \tag{18}$$

将式(6)与式(8)相加得

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V})-\operatorname{div}((\operatorname{div}\boldsymbol{V})\boldsymbol{V})+\frac{1}{2}\Delta\|\boldsymbol{V}\|^2=&\frac{1}{2}\|\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g}\|^2-(\operatorname{div}\boldsymbol{V})^2-(n-2)\rho\boldsymbol{V}r-\\&\mu\nabla_{\boldsymbol{V}}\|\boldsymbol{W}\|^2+2\mu(\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})+2\mu\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W},\boldsymbol{V}).\end{aligned} \tag{19}$$

将式(18)代入式(19)得

$$\operatorname{div}(\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V})+\frac{1}{2}\Delta\|\boldsymbol{V}\|^2=\frac{1}{2}\|\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g}\|^2-(1-2\rho)\boldsymbol{V}r+2\mu(\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})+2\mu\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W},\boldsymbol{V}).$$

在 M 上积分即完成证明.

推论 1　设$(M^n,\boldsymbol{g},\boldsymbol{V},\lambda,\rho,\mu)$是具有常数量曲率 r 的紧致 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子，若下列条件之一成立：

1) $\mu=0$；

2) $\mu\neq0$，$\int_M\mu[(\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})+\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})]\mathrm{d}M\geqslant0$.

则 $\boldsymbol{V}$ 是 Killing 向量场，且 M^n 是 $\boldsymbol{\eta}$-Einstein 流形，其中 $\boldsymbol{W}$ 是 $\boldsymbol{\eta}$ 的对偶向量场.

证明：当 r 是常数，$\mu=0$ 时，由定理 1 知

$$\int_M\frac{1}{2}\|\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g}\|^2\mathrm{d}M=0,$$

则 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g}=0$，势向量场 $\boldsymbol{V}$ 成为 Killing 向量场. 此时式(2)变为

$$\boldsymbol{Ric}=(\lambda+\rho r)\boldsymbol{g},$$

则 M^n 是 Einstein 流形，即在条件 1)下结论成立.

当 $\mu\neq0$，$\int_M\mu[(\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})+\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})]\mathrm{d}M\geqslant0$ 时，类似可得 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g}=0$，式(2)变为

$$\boldsymbol{Ric}=(\lambda+\rho r)\boldsymbol{g}+\mu\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\eta},$$

则 M^n 是 $\boldsymbol{\eta}$-Einstein 流形，即在条件 2)下结论成立.

推论 2　设$(M^n,\boldsymbol{g},\boldsymbol{V},\lambda,\rho,\mu)$是紧致 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子，如果 $\rho=\frac{1}{2}$，且

$$\int_M \mu[(\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})+\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})]\mathrm{d}M\geqslant 0,$$

则孤立子是平凡的，即 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g}=0$，其中 $\boldsymbol{W}$ 是 $\boldsymbol{\eta}$ 的对偶向量场.

证明：在假设条件下，由定理1得

$$\int_M \frac{1}{2}\|\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g}\|^2\mathrm{d}M=0.$$

则 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g}=0$，孤立子是平凡的，证毕.

定理2 设$(M^n,\boldsymbol{g},\boldsymbol{V},\lambda,\rho,\mu)$是紧致 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子，则

$$\int_M\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{V}r-\|\boldsymbol{Q}\|^2+(\lambda+\rho r)r+\mu\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W})\right]\mathrm{d}M=0$$

成立，其中 $\boldsymbol{W}$ 是 $\boldsymbol{\eta}$ 的对偶向量场，$\boldsymbol{Q}$ 是 Ricci 算子.

证明：定义 M^n 上的(1,1)型斜对称张量场 $\boldsymbol{\psi}$(即 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\psi X},\boldsymbol{Y})=-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\psi Y})$)为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{V}^b(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})=2\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\psi Y},\boldsymbol{Z}),\qquad\forall\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in\mathscr{X}(M).\tag{20}$$

由 Koszul 公式[18]，可得

$$2\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{V},\boldsymbol{Z})=(\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g})(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})+\mathrm{d}\boldsymbol{V}^b(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}),\qquad\forall\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in\mathscr{X}(M),\tag{21}$$

在式(2)中使用式(20),(21)得

$$\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{V},\boldsymbol{Z})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\psi Y},\boldsymbol{Z})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{QY},\boldsymbol{Z})=(\lambda+\rho r)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})+\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{W})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{W}),$$

则

$$\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\psi Y}-\boldsymbol{QY}+(\lambda+\rho r)\boldsymbol{Y}+\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{W})\boldsymbol{W},\qquad\forall\boldsymbol{Y}\in\mathscr{X}(M).\tag{22}$$

从而

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{V}=&(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\psi})\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{\psi}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}-(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Q}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}+[\boldsymbol{X}(\lambda+\rho r)]\boldsymbol{Y}+(\lambda+\rho r)\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}+\\&\mu[\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y},\boldsymbol{W})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W})]\boldsymbol{W}+\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{W})\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W},\\\nabla_{\boldsymbol{Y}}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{V}=&(\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{\psi})\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\psi}\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X}-(\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Q}\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X}+[\boldsymbol{Y}(\lambda+\rho r)]\boldsymbol{X}+(\lambda+\rho r)\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X}+\\&\mu[\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X},\boldsymbol{W})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{W})]\boldsymbol{W}+\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{W})\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{W},\\\nabla_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]}\boldsymbol{V}=&\boldsymbol{\psi}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]-\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]+(\lambda+\rho r)[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]+\mu\boldsymbol{g}([\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{W})\boldsymbol{W}.\end{aligned}$$

因此，Riemann 曲率张量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{V}=&(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\psi})\boldsymbol{Y}-(\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{\psi})\boldsymbol{X}-(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Y}+(\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{X}+[\boldsymbol{X}(\lambda+\rho r)]\boldsymbol{Y}-[\boldsymbol{Y}(\lambda+\rho r)]\boldsymbol{X}+\\&\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W})\boldsymbol{W}-\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{W})\boldsymbol{W}+\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{W})\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W}-\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{W})\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{W}.\end{aligned}\tag{23}$$

在 $\boldsymbol{X}$ 上对式(23)求迹得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{V})=&\sum_{i=1}^n\boldsymbol{g}((\nabla_{e_i}\boldsymbol{\psi})\boldsymbol{Y},\boldsymbol{e}_i)+\frac{1}{2}\boldsymbol{Y}r+(1-n)\boldsymbol{Y}(\lambda+\rho r)+\\&\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W})-\mu\nabla_{\boldsymbol{Y}}\|\boldsymbol{W}\|^2+\mu\operatorname{div}\boldsymbol{W}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{W}).\end{aligned}$$

于是

$$\boldsymbol{QV}=\frac{1}{2}\nabla r+(1-n)\nabla(\lambda+\rho r)+\mu\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W}-\mu\nabla\|\boldsymbol{W}\|^2+\mu(\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{W}+\delta\boldsymbol{\psi},\tag{24}$$

其中

$$\boldsymbol{g}(\delta\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{Y})=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{g}((\nabla_{e_i}\boldsymbol{\psi})\boldsymbol{Y},\boldsymbol{e}_i).$$

对式(24)沿任意切向量场 $\boldsymbol{X}$ 方向求协变导数，得

$$\begin{aligned}(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{V}+\boldsymbol{Q}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{V}=&\frac{1}{2}\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla r+(1-n)\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla(\lambda+\rho r)+\mu\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W}-\\&\mu\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla\|\boldsymbol{W}\|^2+\mu(\boldsymbol{X}\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{W}+\mu(\operatorname{div}\boldsymbol{W})\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W}+\nabla_{\boldsymbol{X}}(\delta\boldsymbol{\psi}).\end{aligned}\tag{25}$$

由式(22)知，

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\psi X}-\boldsymbol{QX}+(\lambda+\rho r)\boldsymbol{X}+\mu\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{W})\boldsymbol{W},\tag{26}$$

将式(26)代入式(25)得

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_X \boldsymbol{Q})\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{X} + (\lambda + \rho r)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X} + \mu \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{W})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W} = \\
&\frac{1}{2}\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla r + (1-n)\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla(\lambda+\rho r) + \mu\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W} - \\
&\mu\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla\|\boldsymbol{W}\|^2 + \mu(\boldsymbol{X}\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{W} + \mu(\operatorname{div}\boldsymbol{W})\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W} + \nabla_{\boldsymbol{X}}(\delta\boldsymbol{\psi}).
\end{aligned} \tag{27}
$$

将式(27)对 $\boldsymbol{X}$ 求迹得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\boldsymbol{V}r - \|\boldsymbol{Q}\|^2 + (\lambda+\rho r)r + \mu \boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}) = \frac{1}{2}\Delta r + (1-n)\Delta(\lambda+\rho r) + \mu\operatorname{div}(\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W}) - \\
&\mu\operatorname{div}(\nabla\|\boldsymbol{W}\|^2) + \mu\boldsymbol{W}(\operatorname{div}\boldsymbol{W}) + \mu(\operatorname{div}\boldsymbol{W})^2 + \operatorname{div}(\delta\boldsymbol{\psi}).
\end{aligned} \tag{28}
$$

由于

$$
\nabla_{\boldsymbol{X}}((\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{X}(\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{W} + (\operatorname{div}\boldsymbol{W})\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{W}, \tag{29}
$$

将式(29)关于 $\boldsymbol{X}$ 求迹得

$$
\operatorname{div}((\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W}(\operatorname{div}\boldsymbol{W}) + (\operatorname{div}\boldsymbol{W})^2.
$$

因此，式(28)变为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\boldsymbol{V}r - \|\boldsymbol{Q}\|^2 + (\lambda+\rho r)r + \mu \boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}) = \frac{1}{2}\Delta r + (1-n)\Delta(\lambda+\rho r) + \mu\operatorname{div}(\nabla_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W}) - \\
&\mu\operatorname{div}(\nabla\|\boldsymbol{W}\|^2) + \mu\operatorname{div}((\operatorname{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{W}) + \operatorname{div}(\delta\boldsymbol{\psi}).
\end{aligned} \tag{30}
$$

对式(30)积分即完成证明.

推论 3　设$(M^n,\boldsymbol{g},\boldsymbol{V},\lambda,\rho,\mu)$是紧致 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子，如果满足积分条件

$$
\int_M \left[\mu\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}) - \frac{\mu r}{n}\|\boldsymbol{W}\|^2 - \frac{n-2}{2n}\boldsymbol{V}r\right]\mathrm{d}M \leqslant 0,
$$

则 M^n 是 Einstein 流形，其中 $\boldsymbol{W}$ 是 $\boldsymbol{\eta}$ 的对偶向量场.

证明：注意到$\left\|\boldsymbol{Q}-\frac{r}{n}\boldsymbol{I}\right\|^2 = \|\boldsymbol{Q}\|^2 - \frac{r^2}{n}$，由定理 2 有

$$
\int_M \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{V}r + \mu\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W})\right]\mathrm{d}M = \int_M \left[\left\|\boldsymbol{Q}-\frac{r}{n}\boldsymbol{I}\right\|^2 + \frac{r^2}{n} - \lambda r - \rho r^2\right]\mathrm{d}M.
$$

由式(16)得

$$
\int_M \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{V}r + \mu\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W})\right]\mathrm{d}M = \int_M \left\|\boldsymbol{Q}-\frac{r}{n}\boldsymbol{I}\right\|^2 + \frac{1}{n}[\mu r\|\boldsymbol{W}\|^2 - \operatorname{div}(r\boldsymbol{V}) + \boldsymbol{V}r]\mathrm{d}M.
$$

因此

$$
\int_M \left\|\boldsymbol{Q}-\frac{r}{n}\boldsymbol{I}\right\|^2\mathrm{d}M = \int_M \left[\mu\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}) - \frac{\mu r}{n}\|\boldsymbol{W}\|^2 - \frac{n-2}{2n}\boldsymbol{V}r\right]\mathrm{d}M.
$$

由假设可知 $\boldsymbol{Q}=\frac{r}{n}\boldsymbol{I}$，则 M 是 Einstein 流形，证毕.

推论 4　设$(M^n,\boldsymbol{g},\boldsymbol{V},\lambda,\rho,\mu)(\mu\neq 0)$是具有常数量曲率 r 的紧致 $\boldsymbol{\eta}$-Ricci-Bourguignon 孤立子，如果满足积分条件

$$
\int_M \mu\left[\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}) - \frac{r}{n}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W})\right]\mathrm{d}M \leqslant 0,
$$

则 M^n 是 Einstein 流形，其中 $\boldsymbol{W}$ 是 $\boldsymbol{\eta}$ 的对偶向量场.

证明：由定理 2 及$\left\|\boldsymbol{Q}-\frac{r}{n}\boldsymbol{I}\right\|^2 = \|\boldsymbol{Q}\|^2 - \frac{r^2}{n}$得

$$
\int_M \left[\mu\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}) - \frac{r^2}{n} + \lambda r + \rho r^2\right]\mathrm{d}M = \int_M \left\|\boldsymbol{Q}-\frac{r}{n}\boldsymbol{I}\right\|^2\mathrm{d}M. \tag{31}
$$

由式(16)知

$$
\lambda r + \rho r^2 - \frac{r^2}{n} = \frac{r}{n}\operatorname{div}\boldsymbol{V} - \mu\frac{r}{n}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}), \tag{32}
$$

将式(32)代入式(31)得

$$
\int_M \left\|\boldsymbol{Q}-\frac{r}{n}\boldsymbol{I}\right\|^2\mathrm{d}M = \int_M \mu\left[\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}) - \frac{r}{n}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W})\right]\mathrm{d}M.
$$

由假设可知$\boldsymbol{Q}=\frac{r}{n}\boldsymbol{I}$，故$M$是Einstein流形，证毕.

参 考 文 献

[1] BOURGUIGNON J P. Ricci Curvature and Einstein Metrics [J]. Global Differential Geometry and Global Analysis，1981，838：42-63.

[2] CATINO G，CREMASCHI L，DJADLI Z，et al. The Ricci-Bourguignon Flow [J]. Pacific Journal of Mathematics，2017，287(2)：337-370.

[3] BRENDLE S. Convergence of the Yamabe Flow for Arbitrary Initial Energy [J]. Journal of Differential Geometry，2005，69(2)：217-278.

[4] SCHWETLICK H，STRUWE M. Convergence of the Yamabe Flow for Large Energies [J]. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik，2003，562：59-100.

[5] YE R G. Global Existence and Convergence of Yamabe Flow [J]. Journal of Differential Geometry，1994，39(1)：35-50.

[6] CATINO G，MAZZIERI L. Gradient Einstein Solitons [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2016，132：66-94.

[7] DWIVEDI S. Some Results on Ricci-Bourguignon Solitons and Almost Solitons [J]. Canadian Mathematical Bulletin，2021，64(3)：591-604.

[8] BLAGA A M，TAŞTAN H M. Some Results on Almost η-Ricci-Bourguignon Solitons [J]. Journal of Geometry and Physics，2021，168：104316-1-104316-9.

[9] DEY S，ROY S. Characterization of General Relativistic Spacetime Equipped with η-Ricci-Bourguignon Soliton [J]. Journal of Geometry and Physics，2022，178：104578-1-104578-11.

[10] CHAUBEY S K，SIDDIQI M D，PRAKASHA D G. Invariant Submanifolds of Hyperbolic Sasakian Manifolds and η-Ricci-Bourguignon Solitons [J]. Filomat，2022，36(2)：409-421.

[11] DEY S. Certain Results on Gradient Almost η-Ricci-Bourguignon Soliton [J]. Quaestiones Mathematicae，2024，47(2)：263-284.

[12] MANDAL T，DE U C，SARKAR A. η-Ricci-Bourguignon Solitons on Three-Dimensional (Almost) CoKähler Manifolds [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences，2025，48(3)：3638-3651.

[13] GHOSH A. Certain Triviality Results for Ricci-Bourguignon Almost Solitons [J]. Journal of Geometry and Physics，2022，182：104681-1-104681-12.

[14] GHOSH A. m-Quasi-Einstein Metrics Satisfying Certain Conditions on the Potential Vector Field [J]. Mediterranean Journal of Mathematics，2020，17(4)：115-1-115-17.

[15] JOST J. Riemannian Geometry and Geometric Analysis [M]. 6th ed. [S. l.]：Springer，2011：1-611.

[16] YANO K，KON M. Structures on Manifolds [M]. Singapore：World Scientific Publishing Company，1985：1-520.

[17] YANO K. Integral Formulas in Riemannian Geometry [M]. New York：Marcel Dekker，1970：1-156.

[18] BESSE A L. Einstein Manifolds [M]. Berlin：Springer，1987：1-510.

(责任编辑：赵立芹)