

变指数 Kirchhoff 方程 Neumann 问题的非平凡解

张申贵

(西北民族大学 数学与计算机科学学院, 兰州 730030)

摘要: 用临界点理论中的局部环绕定理和变指数 Sobolev 空间理论, 在不假设 (AR) 型超线性条件成立时, 证明带 $p(x)$ -Laplace 算子的 Kirchhoff 型方程非平凡解的存在性.

关键词: Kirchhoff 型方程; $p(x)$ -Laplace 算子; 局部环绕; 非平凡解; 临界点

中图分类号: O175.8 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)06-1549-08

Nontrivial Solutions for Neumann Problem of Kirchhoff Equation with Variable Exponent

ZHANG Shengui

(College of Mathematics and Computer Science, Northwest Minzu University, Lanzhou 730030, China)

Abstract: By using the local linking theorem in critical point theory and the theory of variable exponent Sobolev space, the author proved the existence of nontrivial solutions for Kirchhoff-type equation with $p(x)$ -Laplacian operator without assuming the (AR) type superlinearity condition held.

Keywords: Kirchhoff-type equation; $p(x)$ -Laplacian operator; local linking; nontrivial solution; critical point

0 引言

许多数学模型, 如非牛顿流体力学模型^[1]、电磁场作用下的流体运动模型^[2-3]和图像修复模型^[4-5]等均可归结为变指数微分方程. 设 $p(x)$ 为连续函数, $p(x) > 1$, 记 $\Delta_{p(x)} u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)$ 为 $p(x)$ -Laplace 算子, $p(x)$ -Laplace 方程是一类变指数方程, 该类方程可描述逐点异性的物理现象.

本文讨论 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} -M\left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) \Delta_{p(x)} u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, ν 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $p(x) \in C(\bar{\Omega})$, 使得

$$1 < p^- := \inf_{\Omega} p(x) \leq p^+ := \sup_{\Omega} p(x) < N. \quad (2)$$

设 $M(t)$ 是连续函数, 且 $f(x, t): \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数.

问题(1)中方程算子部分带有非局部系数 $M\left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right)$, 说明该方程不是一个逐点成立的

收稿日期: 2025-03-06.

作者简介: 张申贵(1980—), 男, 汉族, 博士, 副教授, 从事非线性泛函分析与偏微分方程的研究, E-mail: zhangshengui315@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12361047)和 2024 年度中央高校基本科研业务费项目(批准号: 31920240091).

等式, 此类问题称为 Kirchhoff 问题, 这类方程具有深刻的物理意义^[6-7].

文献[8]研究了 $p(x)$ -Laplace 方程 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \lambda |u|^{p(x)-2} u, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的变分问题. 之后, 研究者们开始利用变分方法和临界点理论探讨带有变指数算子的椭圆方程 Neumann 边值问题的可解性^[9-18]. 特别地, 当 $f(x, u)$ 满足经典的(AR)型超线性条件, 即存在 $\mu > p^+$, $r > 0$, 使得

$$0 < \mu F(x, u) := \mu \int_0^u f(x, s) ds \leq f(x, u)u$$

对所有的 $x \in \Omega$ 和 $|u| \geq r$ 均成立时, 文献[9-11]利用山路定理研究了 $p(x)$ -Laplace 方程 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u + a(x) |u|^{p(x)-2} u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

解的存在性, 其中 $a(x)$ 为非负函数. 条件(AR)可推出非线性项 $f(x, u)$ 关于 u 在无穷远处是超 p^+ -线性的, 条件(AR)广泛用于非线性偏微分方程可解性和 Hamilton 系统周期解等问题的研究中, 但许多超线性函数不满足(AR)条件. 对比已有研究结果, 问题(1)中方程不带有线性项 $a(x) |u|^{p(x)-2} u$, 对于 Neumann 边值问题, 会导致问题(1)对应的能量泛函不再满足山路定理的几何条件. 本文在不同于(AR)的超线性条件下, 用临界点理论中的局部环绕定理^[19]证明问题(1)非平凡解的存在性.

1 预备知识

定义 1^[20] 变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(x)}(\Omega)$ 为

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u \mid u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \in S(\Omega), \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < +\infty \right\},$$

其中 $S(\Omega)$ 表示 Ω 中实值可测函数集合, 其范数为

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = |u|_{p(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

定义 2^[20] 变指数 Sobolev 空间 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 为

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{ u \in L^{p(x)}(\Omega) \mid \nabla u \in L^{p(x)}(\Omega) \},$$

其范数为 $\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = |u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}$. 对 $\forall u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, 记

$$\|u\| = |\bar{u}| + |\nabla u|_{p(x)}, \tag{4}$$

其中 $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$, $\|\cdot\|$ 表示 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 的等价范数.

引理 1^[20] 设空间 $(L^{p(x)}(\Omega), |\cdot|_{p(x)})$ 是一致凸、自反和可分的空间, 令 $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$. 则对

$\forall u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$, 有

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} \right) |u|_{p(x)} |v|_{q(x)} \leq 2 |u|_{p(x)} |v|_{q(x)}.$$

引理 2^[8] 对 $\forall u \in L^{p(x)}(\Omega)$, 记 $\rho(u) = \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx$, 则:

- 1) $|u|_{p(x)} \leq 1 \Rightarrow |u|_{p(x)}^+ \leq \rho(u) \leq |u|_{p(x)}^-$;
- 2) $|u|_{p(x)} \geq 1 \Rightarrow |u|_{p(x)}^- \leq \rho(u) \leq |u|_{p(x)}^+$.

引理 3^[8] 设 Sobolev 指数为

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)}, & p(x) < N, \\ +\infty, & p(x) \geq N. \end{cases}$$

若 $q \in C(\bar{\Omega})$, $\forall x \in \bar{\Omega}$, $1 \leq q(x) < p^*(x)$, 则 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 到 $L^{q(x)}(\Omega)$ 是紧嵌入的.

本文记 $\tilde{W}^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in W^{1,p(x)}(\Omega) \mid \int_{\Omega} u(x) dx = 0\}$. 对 $\forall u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, 令 $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$, 则 $u(x) = \bar{u} + \tilde{u}(x)$, $\bar{u} \in \mathbb{R}$, $\tilde{u}(x) \in \tilde{W}^{1,p(x)}(\Omega)$, 其中 $|\Omega|$ 表示 Ω 的测度. 且 $W^{1,p(x)}(\Omega) = \mathbb{R} \oplus \tilde{W}^{1,p(x)}(\Omega)$, 易见 $\tilde{W}^{1,p(x)}(\Omega)$ 是 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 的有限维子空间. 结合式(4)和引理 2, 可得如下结论.

引理 4^[8] 设 $I(\tilde{u}) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx$, 则对 $\forall \tilde{u} \in \tilde{W}^{1,p(x)}(\Omega)$, 有:

- 1) $\|\tilde{u}\| < 1 \Rightarrow \|\tilde{u}\|^{p^+} \leq I(\tilde{u}) \leq \|\tilde{u}\|^{p^-}$;
- 2) $\|\tilde{u}\| > 1 \Rightarrow \|\tilde{u}\|^{p^-} \leq I(\tilde{u}) \leq \|\tilde{u}\|^{p^+}$.

引理 5^[8] 线性有界算子 $I' : W^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow (W^{1,p(x)}(\Omega))^*$ 定义为

$$\langle I'(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx,$$

如果当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 在空间 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 中 $u_n \rightarrow u$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u \rangle \leq 0$, 则在空间 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 中 $u_n \rightarrow u$.

文献[19]给出了下列临界点定理.

引理 6^[19] 设 X 是 Banach 空间, $X = Y \oplus W$, 其中 $\dim Y < +\infty$. 设泛函 $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, 满足以下条件:

- 1) 泛函 Φ 满足(C)条件, 即对 $\forall \{u_n\} \subset X$, 由 $(1 + \|u_n\|) \|\Phi'(u_n)\| \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$ 时 $\{\Phi(u_n)\}$ 有界, 可推得 $\{u_n\}$ 有收敛子列;
- 2) 泛函 Φ 在零点处满足局部环绕条件, 即存在正常数 δ , 使得

$$\Phi(u) \geq 0, \quad \forall u \in W, \quad \|u\| \leq \delta$$

及

$$\Phi(u) \leq 0, \quad \forall u \in Y, \quad \|u\| \leq \delta,$$

其中 $X = Y \oplus W$, $\dim Y < +\infty$;

- 3) 泛函 Φ 将有界集映射为有界集;
- 4) 设 E 为 W 的任意有限维子空间, 当 $\|u\| \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\Phi(u) \rightarrow -\infty, u \in Y \oplus E$.

则泛函 Φ 在 X 上至少有 1 个非平凡临界点.

对 $\forall v \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, 有

$$M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f(x, u) v dx,$$

则称 $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ 是问题(1)的(弱)解.

在 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 上定义能量泛函 Φ 如下:

$$\Phi(u) = \hat{M} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) - \int_{\Omega} F(x, u) dx,$$

其中 $\hat{M}(t) = \int_0^t M(s) ds, F(x, \xi) = \int_0^{\xi} f(x, \tau) d\tau$. 则 $\Phi \in C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R}), u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ 是问题(1)的(弱)解等价于 u 是泛函 Φ 的临界点, 且

$$\langle \Phi'(u), v \rangle = M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx.$$

2 主要结果

假设以下条件成立:

(H₁) 设 $M(t) : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 为连续函数, 且 $M(t) \geq m_0 > 0$;

(H₂) 设存在常数 $\eta \in [1, +\infty)$, 使得对所有的 $t \in [0, +\infty)$, 均有 $\hat{M}(t) := \int_0^t M(s) ds \geq \frac{1}{\eta} M(t)t$;

(H₃) 设存在正常数 c_1 , 使得对所有的 $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, 均有 $|f(x, t)| \leq c_1(1 + |t|^{\alpha(x)-1})$, 其中 $\alpha(x) \in C_+(\bar{\Omega})$, $C_+(\bar{\Omega}) = \{h \mid h \in C(\bar{\Omega}), h(x) > 1, \forall x \in \bar{\Omega}\}$, 且

$$p^+ < \alpha^- := \inf_{\Omega} \alpha(x) \leq \alpha^+ := \sup_{\Omega} \alpha(x) < p^*(x);$$

(H₄) 设 $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{F(x, t)}{|t|^{\eta p^+}} = +\infty$ 对 $x \in \Omega$ 一致成立;

(H₅) 设 $\lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{F(x, t)}{|t|^{\eta p^+}} = 0$ 对 $x \in \Omega$ 一致成立;

(H₆) 设存在常数 $c_2 > 0, c_3 > 0$ 及 $L > 0$, 使得:

① $\frac{1}{\eta p^+} f(x, t)t - F(x, t) \geq c_2 |t|^{\eta p^-}$ 对 $|t| \geq L$ 成立;

② $|f(x, t)| \leq c_3 |t|^{\sigma(\eta p^- - 1)} \left[\frac{1}{\eta p^+} f(x, t)t - F(x, t) \right]$ 对 $|t| \geq L$ 成立, 其中 $\sigma > \frac{p^*}{(1-\theta)(p^* - p^-)}$,

$\theta \in (0, 1)$;

(H₇) 设存在常数 $\delta_0 > 0$, 使得 $F(x, t) \geq 0$ 对所有的 $x \in \Omega$ 和 $|t| \leq \delta_0$ 成立.

本文主要结果如下.

定理 1 设条件(H₁)~(H₇)成立, 则问题(1)至少有 1 个非平凡解.

证明: 利用引理 6 证明定理 1. 记 $p^- := \inf_{\Omega} p(x)$, $p^+ := \sup_{\Omega} p(x)$, $c_i (i=1, 2, 3, \dots)$ 表示不同的正常数.

1) 证明泛函 Φ 满足(C)条件. 设 $\{u_n\} \subseteq W^{1, p(x)}(\Omega)$ 为泛函 Φ 的(C)序列, 则存在常数 $c_4 > 0$, 使得

$$|\Phi(u_n)| \leq c_4, \quad (1 + \|u_n\|) \|\Phi'(u_n)\| \leq c_4. \tag{5}$$

先利用反证法证明 $\{u_n\}$ 在 $W^{1, p(x)}(\Omega)$ 中有界, 反设 $\{u_n\}$ 在 $W^{1, p(x)}(\Omega)$ 中无界, 即有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| = +\infty. \tag{6}$$

由条件(H₃)和(H₆)中①, 对所有的 $x \in \Omega$ 和 $u \in \mathbb{R}$ 有

$$\frac{1}{\eta p^+} f(x, u)u - F(x, u) \geq c_2 |u|^{\eta p^-} - c_5. \tag{7}$$

由式(5), (7)及条件(H₁)和(H₂), 有

$$\begin{aligned} c_6 &\geq \Phi(u_n) + \frac{1}{\eta p^+} (1 + \|u_n\|) \|\Phi'(u_n)\| \geq \Phi(u_n) - \frac{1}{\eta p^+} \langle \Phi'(u_n), u_n \rangle = \\ &M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx - \\ &\frac{1}{\eta p^+} M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \frac{1}{\eta p^+} \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx \geq \\ &\frac{1}{\eta} M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx - \\ &\frac{1}{\eta p^+} M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \frac{1}{\eta p^+} \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx \geq \\ &\int_{\Omega} \left[\frac{1}{\eta p^+} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right] dx \geq c_2 \int_{\Omega} |u_n|^{\eta p^-} dx - c_5 |\Omega|, \end{aligned}$$

从而有

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{\eta p^+} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right] dx \leq c_6, \tag{8}$$

$$\int_{\Omega} |u_n|^{\eta p^-} dx \leq \frac{c_6 + c_5 |\Omega|}{c_2}. \tag{9}$$

记 $\omega_n := \frac{u_n}{\|u_n\|}$, 则 $\|\omega_n\| = 1$. 由式(6)和式(9), 有

$$\int_{\Omega} |\omega_n|^{\eta p^-} dx = \frac{1}{\|u_n\|^{\eta p^-}} \int_{\Omega} |u_n|^{\eta p^-} dx \leq \frac{c_7}{\|u_n\|^{\eta p^-}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \tag{10}$$

注意到 $\sigma > \frac{p^*}{(1-\theta)(p^* - p^-)}$, $\theta \in (0, 1)$ 及 $p^* > p^-$, 可得 $\sigma > 1$, $\frac{\sigma-1}{\theta\sigma} > 1$, $\frac{(1-\theta)\sigma p^-}{(1-\theta)\sigma-1} < p^*$.

由引理 3, $W^{1, p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{(1-\theta)\sigma p^- / [(1-\theta)\sigma-1]}(\Omega)$ 是紧嵌入, 则有

$$\int_{\Omega} |\omega_n|^{(1-\theta)\sigma p^- / [(1-\theta)\sigma-1]} dx \leq c_8 \|\omega_n\|^{[(1-\theta)\sigma-1] / [(1-\theta)\sigma p^-]} = c_8. \tag{11}$$

由式(10)和式(11)及 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\omega_n|^{p^- \sigma'} dx &= \int_{\Omega} |\omega_n|^{\sigma p^- / (\sigma-1)} dx = \int_{\Omega} |\omega_n|^{\theta\sigma p^- / (\sigma-1)} |\omega_n|^{(1-\theta)\sigma p^- / (\sigma-1)} dx \leq \\ & \left[\int_{\Omega} (|\omega_n|^{\theta\sigma p^- / (\sigma-1)})^{(\sigma-1) / (\theta\sigma)} dx \right]^{\theta\sigma / (\sigma-1)} \left[\int_{\Omega} (|\omega_n|^{(1-\theta)\sigma p^- / (\sigma-1)})^{[1-\theta\sigma / (\sigma-1)]^{-1}} dx \right]^{1-\theta\sigma / (\sigma-1)} = \\ & \left(\int_{\Omega} |\omega_n|^{p^-} dx \right)^{\theta\sigma / (\sigma-1)} \left(\int_{\Omega} |\omega_n|^{(1-\theta)\sigma p^- / [(1-\theta)\sigma-1]} dx \right)^{1-\theta\sigma / (\sigma-1)} \leq \\ & \left(\int_{\Omega} |\omega_n|^{p^-} dx \right)^{\theta\sigma / (\sigma-1)} (c_8)^{1-\theta\sigma / (\sigma-1)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma'} = 1$.

由条件(H₆)中②、式(8)并取 n 充分大, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x, u_n)|}{|u_n|^{p^- - 1}} \right)^{\sigma} dx &\leq c_2 \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\eta p_+} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right] dx \leq \\ & c_2 \left[\Phi(u_n) - \frac{1}{\eta p_+} \langle \Phi'(u_n), u_n \rangle \right] \leq c_9, \end{aligned} \tag{13}$$

由式(9)和式(10)及 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n) u_n}{\|u_n\|^{p^-}} dx \right| &\leq \int_{\Omega} \frac{|f(x, u_n)|}{|u_n|^{p^- - 1}} |\omega_n|^{p^-} dx \leq \\ & \left(\int_{\Omega} \left(\frac{|f(x, u_n)|}{|u_n|^{p^- - 1}} \right)^{\sigma} dx \right)^{1/\sigma} \left(\int_{\Omega} |\omega_n|^{p^- \sigma'} dx \right)^{1/\sigma'} \leq \\ & c_{10} \left(\int_{\Omega} |\omega_n|^{p^- \sigma'} dx \right)^{1/\sigma'} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma'} = 1$. 对 $\forall u \in W^{1, p(x)}(\Omega)$, 令 $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$, 则 $u(x) = \bar{u} + \tilde{u}(x)$, $\bar{u} \in \mathbb{R}$ 及 $\tilde{u}(x) \in \widetilde{W}^{1, p(x)}(\Omega)$. 由式(9)及 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\| = |\bar{u}| &= \left| \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx \right| \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u(x)| dx \leq \\ & \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{p^-} dx \right)^{1/p^-} |\Omega|^{1/q_+} \leq c_{11}, \end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q_+} = 1$. 结合式(6)和式(15), 可设 $\|\tilde{u}_n\| \geq 1$. 由条件(H₁)和式(15), 再利用引理 4, 对 $\|\tilde{u}_n\| \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(u_n), u_n \rangle &= M \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx \geq \\ & m_0 \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx \geq m_0 \|\tilde{u}_n\|^{p^-} - \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx \geq \\ & m_0 (\|u_n\| - \|\bar{u}_n\|)^{p^-} - \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx \geq \\ & \|u_n\|^{p^-} \left[m_0 \left(1 - \frac{c_{11}}{\|u_n\|} \right)^{p^-} - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n) u_n}{\|u_n\|^{p^-}} dx \right]. \end{aligned} \tag{16}$$

结合式(5), (6), (14), (16), 有 $m_0 \leq o(1)$, 其中当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $o(1) \rightarrow 0$, 与 $m_0 > 0$ 矛盾. 故 $\{u_n\}$ 在 $W^{1, p(x)}(\Omega)$ 中有界.

因为 $W^{1,\rho(x)}(\Omega)$ 是自反的 Banach 空间, 所以存在 $u \in W^{1,\rho(x)}(\Omega)$, 使得 $\{u_n\}$ 在空间 $W^{1,\rho(x)}(\Omega)$ 中弱收敛于 u , 且 $\{u_n\}$ 在 $L^{\alpha(x)}(\Omega)$ 中强收敛于 u . 由 Hölder 不等式, 有

$$\left| \int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x, u_n)| |u_n - u| dx \leq c_1 \int_{\Omega} (1 + |u_n|^{\alpha(x)-1}) |u_n - u| dx \leq 2c_1 \int_{\Omega} (1 + |u_n|^{\alpha(x)-1}) |u_n - u|_{\alpha(x)},$$

其中 $\frac{1}{\alpha'(x)} + \frac{1}{\alpha(x)} = 1$. 从而有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u) dx = 0. \tag{17}$$

当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\langle \Phi'(u_n), u_n - u \rangle \rightarrow 0$, 结合条件 (H_1) 及式(17), 可得

$$\langle I'(u_n), u_n - u \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{\rho(x)-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) dx \rightarrow 0. \tag{18}$$

利用式(18), 并注意到 $I'(u)$ 线性有界, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u \rangle = 0$, 根据引理 5 可知, 序列 $\{u_n\}$ 在 $W^{1,\rho(x)}(\Omega)$ 中强收敛于 u . 故泛函 Φ 满足(C)条件.

2) 证明泛函 Φ 满足引理 6 中条件 2), 即 Φ 在零点处满足局部环绕条件. 存在正常数 δ , 取 $W^{1,\rho(x)}(\Omega) = \widetilde{W}^{1,\rho(x)}(\Omega) \oplus \mathbb{R}$, 使得

$$\Phi(u) \geq 0, \quad \forall u \in \widetilde{W}^{1,\rho(x)}(\Omega), \quad \|u\| \leq \delta; \quad \Phi(u) \leq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \|u\| \leq \delta.$$

由条件 (H_3) 和 (H_5) 可知, 对给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $c_\epsilon > 0$, 使得对所有的 $x \in \Omega$ 和 $u \in \mathbb{R}$, 下式均成立:

$$|F(x, u)| \leq \epsilon |u|^{\rho^+} + c_\epsilon |u|^{\alpha(x)}. \tag{19}$$

由条件 (H_1) 和式(19), 对 $\tilde{u} \in \widetilde{W}^{1,\rho(x)}(\Omega)$, 取 $\|\tilde{u}\|$ 充分小, 并利用引理 4, 有

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{u}) &= \hat{M} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{\rho(x)}}{p(x)} dx \right) - \int_{\Omega} F(x, \tilde{u}) dx = \int_0^{\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{\rho(x)}}{p(x)} dx} M(s) ds - \int_{\Omega} F(x, \tilde{u}) dx \geq \\ & m_0 \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{\rho(x)}}{p(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, \tilde{u}) dx \geq \frac{m_0}{p^+} \int_{\Omega} |\nabla u|^{\rho(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, \tilde{u}) dx \geq \\ & \frac{m_0}{p^+} \|\tilde{u}\|^{\rho^+} - \epsilon \int_{\Omega} |\tilde{u}|^{\rho^+} dx - c_\epsilon \int_{\Omega} |\tilde{u}|^{\alpha(x)} dx. \end{aligned} \tag{20}$$

由 $W^{1,\rho(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho^+}(\Omega)$ 和 $W^{1,\rho(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega)$ 是紧嵌入知, 存在常数 $c_{12}, c_{13} > 0$, 使得对 $\forall u \in W^{1,\rho(x)}(\Omega)$, 有

$$|u|^{\rho^+} \leq c_{12} \|u\|, \tag{21}$$

$$|u|^{\alpha(x)} \leq c_{13} \|u\|. \tag{22}$$

对 $\forall u \in W^{1,\rho(x)}(\Omega)$, 取 $\|u\|$ 充分小, 可得

$$\int_{\Omega} |u|^{\alpha(x)} dx \leq \max\{|u|_{\alpha(x)}^-, |u|_{\alpha(x)}^+\} \leq c_{14} \|u\|^{\alpha^-}. \tag{23}$$

取 $\epsilon > 0$, 使得 $\epsilon c_{12}^{\rho^+} \leq \frac{m_0}{2p^+}$, 再结合式(20), (21), (23), 有

$$\Phi(\tilde{u}) \geq \left(\frac{m_0}{p^+} - \epsilon c_{12}^{\rho^+} \right) \|\tilde{u}\|^{\rho^+} - c_{15} \|\tilde{u}\|^{\alpha^-} \geq \|\tilde{u}\|^{\rho^+} \left(\frac{m_0}{2p^+} - c_{15} \|\tilde{u}\|^{\alpha^- - \rho^+} \right). \tag{24}$$

注意到 $\rho^+ < \alpha^-$, 式(24)表明存在 $\delta_1 > 0$, 使得对 $\forall \tilde{u} \in \widetilde{W}^{1,\rho(x)}(\Omega)$, $\|\tilde{u}\| \leq \delta_1$, 有 $\Phi(\tilde{u}) \geq 0$.

另一方面, 由条件 (H_7) , 对 $y \in \mathbb{R}$, $\|y\| = |y| \leq \delta_0$, 有 $\Phi(y) = - \int_{\Omega} F(x, y) dx \leq 0$. 令 $\delta \leq \min\{\delta_0, \delta_1\}$, 则泛函 Φ 满足引理 6 中条件 2).

3) 证明泛函 Φ 满足引理 6 中条件 3).

记 $G(t) = \frac{\hat{M}(t)}{t^\eta} = \frac{\int_0^t M(s) ds}{t^\eta}$, 利用条件 (H_2) , 可得

$$\frac{dG(t)}{dt} = \frac{M(t)t^\eta - \eta t^{\eta-1}\hat{M}(t)}{t^{2\eta}} \leq 0,$$

表明 $G(t)$ 关于变量 t 是递减的, $t \geq t_0 > 0$. 因此 $G(t) = \frac{\hat{M}(t)}{t^\eta} \leq M(t_0) = \frac{\hat{M}(t_0)}{t_0^\eta}$, 从而存在常数 $c_{16} > 0, c_{17} > 0$, 使得

$$\hat{M}(t) \leq c_{16}t^\eta + c_{17}, \quad \forall t > 0. \tag{25}$$

由条件(H₃)、式(23)和式(25), 取 $\|u\|$ 充分小, 并利用引理 4, 有

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \hat{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) - \int_\Omega F(x, u) dx \leq \\ &c_{16}\left(\frac{1}{p^-}\right)^\eta \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx\right)^\eta + c_{17} + c_1 \left(\int_\Omega |u|^{\alpha(x)} dx + \int_\Omega |u| dx\right) \leq \\ &c_{16}\left(\frac{1}{p^-}\right)^\eta \|u\|^{\eta p^-} + c_{18} \|u\|^{\alpha^-} + c_{19} \|u\| + c_{17}, \end{aligned} \tag{26}$$

表明泛函 Φ 将有界集映射为有界集.

4) 证明泛函 Φ 满足引理 6 中条件 4), 即 E 为 $\widetilde{W}^{1,p(x)}(\Omega)$ 的任意有限维子空间, 当 $\|u\| \rightarrow +\infty$ 时, $\Phi(u) \rightarrow -\infty, u \in \mathbb{R} \oplus E$.

注意到 $\dim E < +\infty$, 利用有限维空间范数的等价性, 存在 $c_{20} > 0$, 使得对 $\forall u \in E$, 有

$$\|u\|^{\eta p^+} \leq c_{20} \int_\Omega |u|^{\eta p^+} dx. \tag{27}$$

由条件(H₃)和(H₄), 对 $\forall \vartheta > 0$, 存在 $c_{21} > 0$, 使得

$$F(x, u) \geq \vartheta |u|^{\eta p^+} - c_{21} \tag{28}$$

对所有的 $x \in \Omega$ 和 $u \in \mathbb{R}$ 成立. 结合式(25), (27), (28), 对 $u \in \mathbb{R} \oplus E$, 取 $\|u\|$ 充分大, 利用引理 4 有

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \hat{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) - \int_\Omega F(x, u) dx \leq \\ &c_{16}\left(\frac{1}{p^-}\right)^\eta \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx\right)^\eta + c_{17} - \int_\Omega F(x, u) dx \leq \\ &c_{16}\left(\frac{1}{p^-}\right)^\eta \|u\|^{\eta p^+} - \vartheta \int_\Omega |u|^{\eta p^+} dx + c_{21} |\Omega| \leq \\ &\left[c_{16}\left(\frac{1}{p^-}\right)^\eta - \frac{\vartheta}{c_{20}}\right] \|u\|^{\eta p^+} + c_{21} |\Omega|. \end{aligned} \tag{29}$$

令 ϑ 充分大, 式(29)表明当 $\|u\| \rightarrow +\infty$ 时, $\Phi(u) \rightarrow -\infty$, 则引理 6 中条件 4) 成立.

综上, 泛函 Φ 满足引理 6 中所有条件, 则 Φ 在 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 中至少有 1 个非平凡临界点, 从而问题(1)在 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 中至少有 1 个非平凡解.

注 1 令 $M(t) = a + 2bt$, 其中 $t \geq 0, a > 0, b \geq 0$, 则有

$$M(t) = a + 2bt \geq a > 0, \quad \forall t \geq 0,$$

$$\hat{M}(t) = \int_0^t M(s) ds = at + bt^2 \geq \frac{1}{2}(a + 2bt)t = \frac{1}{2}M(t)t, \quad \forall t \geq 0.$$

取 $m_0 = a, \eta = 2$, 则 $M(t)$ 满足条件(H₁)和(H₂). Kirchhoff 方程可以准确模拟依赖于自身平均密度的微生物种群密度变化过程. 令 $M(t) = a + 2bt, p(x) = 2$, 则问题(1)退化为高维 Kirchhoff 方程对应的稳态方程

$$\begin{cases} -\left(a + b \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

取 $M(t) = 1 + \frac{\cos t}{1+t^2}, p(x) = 2$, 则 $\eta = 1, p^+ = p^- = 2$. 令

$$F(x, u) = \left(2 - \frac{1}{1+|x|}\right) u^2 \ln(1+u^2),$$

则 F 满足定理 1 的所有条件,但并不满足(AR)条件及文献[8-19]中定理的条件.

参 考 文 献

- [1] ZHIKOV V. On Some Variational Problems [J]. Russian Journal of Mathematical Physics, 1997, 11(5): 105-116.
- [2] RUZICKA M. Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2000: 1-175.
- [3] RADULESCU V D, ZHANG B L. Morse Theory and Local Linking for a Nonlinear Degenerate Problem Arising in the Theory of Electrorheological Fluids [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2014, 17: 311-321.
- [4] CHEN Y M, LEVINE S, RAO M. Variable Exponent, Linear Growth Functionals in Image Restoration [J]. SIAM Journal Application Math, 2006, 66(4): 1383-1406.
- [5] KARAMA F, SADIK K, ZIAD L. A Variable Exponent Nonlocal $p(x)$ -Laplacian Equation for Image Restoration [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2018, 75(2): 534-546.
- [6] AUTUORI G, PUCCI P, SALVATORI M C. Asymptotic Stability for Anisotropic Kirchhoff Systems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 352(1): 149-165.
- [7] AROSIO A, PANIZZI S. On the Well-Posedness of the Kirchhoff String [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1996, 348(1): 305-330.
- [8] FAN X L. Eigenvalues of the $p(x)$ -Laplacian Neumann Problems [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2007, 67(10): 2982-2992.
- [9] YAO J H. Solutions for Neumann Boundary Value Problems Involving $p(x)$ -Laplace Operators [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2008, 68(5): 1271-1283.
- [10] DAI G W, MA R Y. Solutions for a $p(x)$ -Kirchhoff Type Equation with Neumann Boundary Data [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, 12(5): 2666-2680.
- [11] BARLETTA G, CHINNI A. Existence of Solutions for a Neumann Problem Involving the $p(x)$ -Laplacian [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2013, 158(1): 1-12.
- [12] RADULESCU V D. Nonlinear Elliptic Equations with Variable Exponent: Old and New [J]. Nonlinear Analysis: Theory Methods and Applications, 2015, 121(1): 336-369.
- [13] AFROUZI G A, KIRANE M, SHOKOOH S. Infinitely Many Weak Solutions for $p(x)$ -Laplacian-Like Problems with Neumann Condition [J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2018, 63(1): 23-36.
- [14] HEIDARKHANI S, MORADI S, BARILLA D. Existence Results for Second-Order Boundary-Value Problems with Variable Exponents [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2018, 44(1): 40-53.
- [15] SAOUDI K. The Fibering Map Approach to a $p(x)$ -Laplacian Equations with Singular Nonlinearities and Nonlinear Neumann Boundary Conditions [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2018, 48(3): 927-946.
- [16] TAARABTI S, ALLALI Z E, HADDOUCH K B, et al. Eigenvalue Problems for $p(x)$ -Kirchhoff-Type Equations with Neumann Boundary Conditions [J]. Mathematical Reports, 2021, 23(1/2): 233-248.
- [17] RACHID A, ABDELRAHID E A, FOUZIA M, et al. Existence and Multiplicity of Solutions for a $p(x)$ -Biharmonic Problem with Neumann Boundary Conditions [J]. Boletim da Sociedade Paranaense Matematica, 2022, 40(1): 1-15.
- [18] KEFI K. Multiple Solutions for a $p(x)$ -Laplacian-Like Problem with Neumann Boundary Conditions [J]. Ukrainian Mathematical Journal, 2025, 76(8): 1313-1323.
- [19] BISI G M, RĂDULESCU V D. Applications of Local Linking to Nonlocal Neumann Problems [J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2015, 17(1): 1450001-1-1450001-17.
- [20] DIENING L, HARJULEHTO P, HÄSTÖ P, et al. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2011: 1-505.

(责任编辑:李琦)