

Gorenstein u - S -内射模

卢柯, 杨刚

(兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070)

摘要: 设 R 是环, S 是 R 的乘法子集. 首先, 借助 Hom 函子理论引入 Gorenstein u - S -内射模的概念. 其次, 利用 u - S -五引理及构造拉回图的方法, 研究 Gorenstein u - S -内射模的同调性质. 特别地, 证明了 R -模 M 是 Gorenstein u - S -内射模当且仅当对任意 u - S -内射 R -模 E 及任意整数 $i > 0$, 有 $\text{Ext}_R^i(E, M)$ 是 u - S -torsion 模, 并且 M 有真左 u - S -内射分解; Gorenstein u - S -内射模类关于有限直和封闭.

关键词: u - S -内射模; Gorenstein u - S -内射模; u - S -torsion 模

中图分类号: O154.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)06-1572-07

Gorenstein u - S -Injective Modules

LU Ke, YANG Gang

(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Let R be a ring, and S be a multiplicative subset of R . Firstly, we introduce the notion of Gorenstein u - S -injective modules by means of the theory of Hom functors. Secondly, we study the homological properties of Gorenstein u - S -injective modules by using the u - S -Five Lemma and the method of constructing pull-back diagrams. Particularly, it is shown that an R -module M is Gorenstein u - S -injective if and only if $\text{Ext}_R^i(E, M)$ is u - S -torsion module for any u - S -injective R -module E and any integer $i > 0$, and M admits a proper left u - S -injective-resolution. The class of Gorenstein u - S -injective modules is closed under finite direct sums.

Keywords: u - S -injective module; Gorenstein u - S -injective module; u - S -torsion module

1 引言及预备知识

Enochs 等^[1]引入了 Gorenstein 投射模、Gorenstein 内射模和 Gorenstein 平坦模的概念. Holm^[2]进一步完善了文献[1]中的相关结论, 将特殊的交换 Noetherian 环上 Gorenstein 维数的结论推广到一般的结合环上, 并给出了一般结合环上的 Gorenstein 模和 Gorenstein 维数的刻画. Zhang^[3]给出了 u - S -torsion 模、 u - S -正合列和 u - S -平坦模的定义. Chen 等^[4]提出了 u - S -Noetherian 环的概念, 并给出了 u - S -内射模的定义. Zhang 等^[5]介绍了 u - S -半单模和 u - S -半单环, 并给出了 u - S -投射模的定义. Qi 等^[6]提出了 R -模的 u - S -投射维数和 u - S -内射维数, 并证明了通过 Ext 函子可诱导出长 u - S -正合列. Zhang^[7]给出了 u - S -绝对纯模的概念. 受上述研究结果的启发, 本文研究 Gorenstein u - S -内射模, 基于同调方法讨论其性质. 本文所有的环 R 均是包含单位元的交换环.

收稿日期: 2025-03-06. 网络首发日期: 2025-09-18.

第一作者简介: 卢柯(2001—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事环的同调理论的研究, E-mail: 3557596106@qq.com. **通信作者简介:** 杨刚(1980—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事环的同调理论的研究, E-mail: yanggang@mail.lzjtu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12161049).

网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20250917.1428.001>.

设 R 是环, S 是 R 的子集. 若 $1 \in S$, 且对任意的 $s_1 \in S, s_2 \in S$, 有 $s_1 s_2 \in S$, 则 S 称为 R 的乘法子集. 若存在 $s \in S$ 使得 $sT = 0$, 则称 R -模 T 是 u - S -torsion 模^[3]. 若存在 $s \in S$ 使得 $s\text{Ker } g \subseteq \text{Im } f$ 和 $s\text{Im } f \subseteq \text{Ker } g$, 则称 R -模序列 $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ 是 u - S -正合列^[3]. 特别地, 此时称该序列是 s -正合的. 若序列 $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N (M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0, 0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0)$ 是 u - S -正合列, 则称 R -模同态 $f: M \rightarrow N$ 是 u - S -单同态(u - S -满同态, u - S -同构). 易证 R -模同态 $f: M \rightarrow N$ 是 u - S -单同态(u - S -满同态)当且仅当 $\text{Ker } f(\text{Coker } f)$ 是 u - S -torsion 模.

定义 1^[2] 如果存在 R -模的正合列

$$\mathbb{I} = \cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \cdots,$$

使得 $M \cong \text{Ker}(I^0 \rightarrow I^1)$, 并且对任意的内射 R -模 $E, \text{Hom}_R(E, \mathbb{I})$ 正合, 则称 R -模 M 是 Gorenstein 内射模, 其中每个 I_i 和 I^i 都是内射 R -模.

命题 1^[3] 设 R 是环, S 是 R 的乘法子集, M 是 R -模, 则下列叙述成立:

- 1) 设 $f: M \rightarrow N$ 是 u - S -同构, 若 M 和 N 中一个是 u - S -torsion 模, 则另一个也是 u - S -torsion 模;
- 2) 设序列 $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow 0$ 是 u - S -正合列, 则 N 是 u - S -torsion 模当且仅当 M 和 L 是 u - S -torsion 模.

定义 2^[4] 设 R 是环, S 是 R 的乘法子集, E 是 R -模. 若对任意 u - S -正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 有序列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, E) \rightarrow \text{Hom}_R(B, E) \rightarrow \text{Hom}_R(A, E) \rightarrow 0$$

是 u - S -正合列, 则称 E 是 u - S -内射模.

下面将 u - S -内射模类简记为 u - S - $I(R)$.

定义 3^[3] 若对任意正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 有 $B \in \mathcal{X}$, 则称 R -模类 \mathcal{X} 关于扩张封闭, 其中 $A \in \mathcal{X}, C \in \mathcal{X}$.

定理 1^[4] 设 R 是环, S 是 R 的乘法子集, E 是 R -模, 则下列叙述等价:

- 1) E 是 u - S -内射模;
- 2) 对任意的短正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 有序列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, E) \rightarrow \text{Hom}_R(B, E) \rightarrow \text{Hom}_R(A, E) \rightarrow 0$$

是 u - S -正合列;

- 3) 对任意的 R -模 $M, \text{Ext}_R^1(M, E)$ 是 u - S -torsion 模;
- 4) 对任意的 R -模 M 及任意整数 $n \geq 1, \text{Ext}_R^n(M, E)$ 是 u - S -torsion 模.

2 主要结果

引理 1 设 R 是环, S 是 R 的乘法子集. 若 R -模序列 $A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{f_3} A_4$ 是 u - S -正合列, 则存在 $s \in S$ 使得该序列是 s -正合的.

证明: 因为 $A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{f_3} A_4$ 是 u - S -正合列, 所以存在 $s_1 \in S$, 使得 $s_1 \text{Im}(f_1) \subseteq \text{Ker}(f_2), s_1 \text{Ker}(f_2) \subseteq \text{Im}(f_1)$; 存在 $s_2 \in S$, 使得 $s_2 \text{Im}(f_2) \subseteq \text{Ker}(f_3), s_2 \text{Ker}(f_3) \subseteq \text{Im}(f_2)$. 故

$$\begin{aligned} s_1 s_2 \text{Im}(f_1) &\subseteq \text{Ker}(f_2), & s_1 s_2 \text{Ker}(f_2) &\subseteq \text{Im}(f_1); \\ s_1 s_2 \text{Im}(f_2) &\subseteq \text{Ker}(f_3), & s_1 s_2 \text{Ker}(f_3) &\subseteq \text{Im}(f_2). \end{aligned}$$

令 $s = s_1 s_2$, 则结论得证.

定理 2(蛇引理) 设 R 是环, S 是 R 的乘法子集. 考虑下列 R -模的行 u - S -正合的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A' & \xrightarrow{j} & A & \xrightarrow{p} & A'' & \longrightarrow & 0 \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{\pi} & C'' \end{array},$$

则存在 R -模的 u - S -正合列

$$\text{Ker } \alpha \xrightarrow{j'} \text{Ker } \beta \xrightarrow{p'} \text{Ker } \gamma \xrightarrow{\delta} \text{Coker } \alpha \xrightarrow{\bar{i}} \text{Coker } \beta \xrightarrow{\bar{\pi}} \text{Coker } \gamma.$$

进一步, 若 j 是 u - S -单同态, 则 j' 是 u - S -单同态; 若 π 是 u - S -满同态, 则 $\bar{\pi}$ 是 u - S -满同态.

证明: 下面借助图追踪法给出链接同态 δ 的具体定义. 考虑如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \text{Ker } \alpha & \xrightarrow{j'} & \text{Ker } \beta & \xrightarrow{p'} & \text{Ker } \gamma \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & A' & \xrightarrow{j} & A & \xrightarrow{p} & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\
 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{\pi} & C'' \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \text{Coker } \alpha & \xrightarrow{\bar{i}} & \text{Coker } \beta & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \text{Coker } \gamma \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0,
 \end{array}$$

其中 j' 是 j 在 $\text{Ker } \alpha$ 上的限制, p' 是 p 在 $\text{Ker } \beta$ 上的限制, \bar{i} 和 $\bar{\pi}$ 分别是 i 和 π 诱导的 R -模同态.

由引理 1 知, 存在 $s \in S$ 使得交换图的上下两行均是 s -正合的. 于是, 对任意的 $a'' \in \text{Ker } \gamma$, 由 p 是 u - S -满同态知 $s\text{Coker } p = 0$, 即 $sA'' \subseteq \text{Im } p$. 因此存在 $a \in A$, 使得 $sa'' = p(a)$. 由图交换得 $\pi\beta(a) = \gamma p(a) = \gamma(sa'') = s\gamma(a'') = 0$, 故 $\beta(a) \in \text{Ker } \pi$. 又因为 $s\text{Ker } \pi \subseteq \text{Im } i$, 故 $s\beta(a) \subseteq \text{Im } i$, 从而存在 $c' \in C'$, 使得 $i(c') = s\beta(a)$.

定义 $\delta: \text{Ker } \gamma \rightarrow \text{Coker } \alpha$ via $a'' \mapsto sc' + \text{Im } \alpha$, 其中 $c' \in C'$ 满足 $i(c') = s\beta(a)$, $sa'' = p(a)$. 下证 δ 的定义有意义. 事实上, 若 $a'' = 0$, 则由 $p(a) = sa'' = 0$ 可知 $a \in \text{Ker } p$. 又因为 $s\text{Ker } p \subseteq \text{Im } j$, 故 $sa \subseteq \text{Im } j$, 从而存在 $a' \in A'$ 使得 $j(a') = sa$. 由图交换得 $i\alpha(a') = \beta j(a') = s\beta(a) = i(c')$, 则 $i(c' - \alpha(a')) = 0$, 即 $c' - \alpha(a') \in \text{Ker } i$. 由于 i 是 u - S -单同态, 故 $s\text{Ker } i = 0$, 从而 $sc' - s\alpha(a') = 0$, $sc' = s\alpha(a') = \alpha(sa')$. 于是 $sc' \in \text{Im } \alpha$, 即 $sc' + \text{Im } \alpha = 0$.

下证 $\text{Ker } \alpha \xrightarrow{j'} \text{Ker } \beta \xrightarrow{p'} \text{Ker } \gamma$ 是 u - S -正合列. 因为 $\beta j = i\alpha$, 所以对任意的 $a' \in \text{Ker } \alpha$, 有 $\beta j(a') = i\alpha(a') = 0$, 则 $j(a') \in \text{Ker } \beta$, 从而有 R -模同态 $j': \text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Ker } \beta$ via $a' \mapsto j(a')$. 事实上, $j' = j|_{\text{Ker } \alpha}$, 从而 $\text{Ker}(j') = \text{Ker } j \cap \text{Ker } \alpha$. 当 j 是 u - S -单同态时, j' 是 u - S -单同态. 同理, 有 R -模同态 $p' = p|_{\text{Ker } \beta}: \text{Ker } \beta \rightarrow \text{Ker } \gamma$ via $a \mapsto p(a)$. 因为 $s \in S$ 满足 $spj = 0$, 所以 $sp'j' = 0$, 进而 $s^2\text{Im}(j') \subseteq s\text{Im}(j') \subseteq \text{Ker}(p')$. 反之, 设 $a \in \text{Ker}(p') = \text{Ker } p \cap \text{Ker } \beta$, 则由 $s\text{Ker } p \subseteq \text{Im } j$ 知, 存在 $a' \in A'$, 使得 $sa = j(a')$. 因为 $i\alpha(a') = \beta j(a') = s\beta(a) = 0$, 故 $\alpha(a') \in \text{Ker } i$. 又因为 i 是 u - S -单同态, 所以 $s\text{Ker } i = 0$. 从而 $s\alpha(a') = 0$, 则 $sa' \in \text{Ker } \alpha$. 因此有 $j'(sa') = j(sa') = sj(a') = s^2a$, 即 $s^2\text{Ker}(p') \subseteq \text{Im}(j')$. 从而序列 $\text{Ker } \alpha \xrightarrow{j'} \text{Ker } \beta \xrightarrow{p'} \text{Ker } \gamma$ 是 u - S -正合列.

下证 $\text{Coker } \alpha \xrightarrow{\bar{i}} \text{Coker } \beta \xrightarrow{\bar{\pi}} \text{Coker } \gamma$ 是 u - S -正合列. 存在 R -模同态

$$\bar{i}: \text{Coker } \alpha \rightarrow \text{Coker } \beta \text{ via } c' + \text{Im } \alpha \mapsto i(c') + \text{Im } \beta;$$

$$\bar{\pi}: \text{Coker } \beta \rightarrow \text{Coker } \gamma \text{ via } c + \text{Im } \beta \mapsto \pi(c) + \text{Im } \gamma.$$

因为 $s \in S$ 满足 $s\pi i = 0$, 显然 $s\bar{\pi}\bar{i} = 0$, 故 $s^2\text{Im } \bar{i} \subseteq s\text{Im } \bar{i} \subseteq \text{Ker } \bar{\pi}$. 反之, 设 $c \in C$, $c + \text{Im } \beta \in \text{Ker } \bar{\pi}$, 则 $\pi(c) + \text{Im } \gamma = 0$, 从而 $\pi(c) \in \text{Im } \gamma$, 进而存在 $a'' \in A''$, 使得 $\pi(c) = \gamma(a'')$. 又因为 p 是 u - S -满同态, 故存在 $a \in A$, 使得 $sa'' = p(a)$, 所以 $\pi\beta(a) = \gamma p(a) = s\gamma(a'') = s\pi(c)$, 则 $\pi(sc - \beta(a)) = 0$, $sc - \beta(a) \in \text{Ker } \pi$. 由于 $s\text{Ker } \pi \subseteq \text{Im } i$, 因此存在 $c' \in C'$, 使得 $s(sc - \beta(a)) = i(c')$, 从而

$$\bar{i}(c') = i(c') + \text{Im } \beta = s^2c - \beta(sa) + \text{Im } \beta = s^2c + \text{Im } \beta,$$

即 $s^2c + \text{Im } \beta \in \text{Im } \bar{i}$, 故有 $s^2\text{Ker } \bar{\pi} \subseteq \text{Im } \bar{i}$. 从而序列 $\text{Coker } \alpha \xrightarrow{\bar{i}} \text{Coker } \beta \xrightarrow{\bar{\pi}} \text{Coker } \gamma$ 是 u - S -正合列.

下证 $\text{Ker } \beta \xrightarrow{p'} \text{Ker } \gamma \xrightarrow{\delta} \text{Coker } \alpha$ 是 u - S -正合列. 设 $a'' \in \text{Im}(p')$, 则存在 $a \in \text{Ker } \beta$, 使得 $sa'' = p'(a) = p(a)$. 而 $s\beta(a) = 0 = i(c')$, 其中 $c' \in C'$. 由 i 是 u - S -单同态知 $sc' = 0$, 故 $\delta(a'') = sc' + \text{Im } \alpha = 0 + \text{Im } \alpha = \bar{0}$, 从而 $a'' \in \text{Ker } \delta$. 于是, $s^4 \text{Im}(p') \subseteq \text{Im}(p') \subseteq \text{Ker } \delta$. 反之, 设 $a'' \in \text{Ker } \delta$, 且 $p(a) = sa''$, $s\beta(a) = i(c')$, 则 $0 = \delta(a'') = sc' + \text{Im } \alpha$, 从而存在 $a' \in A'$ 使得 $sc' = \alpha(a')$. 由于 $\beta j(a') = i\alpha(a') = si(c') = s^2\beta(a)$, 所以 $s^2a - j(a') \in \text{Ker } \beta$, 从而有

$$sp'(s^2a - j(a')) = sp(s^2a - j(a')) = s^3p(a) - spj(a') = s^3p(a) = s^4a'',$$

即 $s^4 \text{Ker } \delta \subseteq \text{Im}(p')$. 于是序列 $\text{Ker } \beta \xrightarrow{p'} \text{Ker } \gamma \xrightarrow{\delta} \text{Coker } \alpha$ 是 u - S -正合列.

最后证明 $\text{Ker } \gamma \xrightarrow{\delta} \text{Coker } \alpha \xrightarrow{\bar{i}} \text{Coker } \beta$ 是 u - S -正合列. 设 $\bar{c}' \in \text{Im } \delta$, 则存在 $a'' \in \text{Ker } \gamma$, 使得 $\bar{c}' = \delta(a'')$. 取 $a \in A$ 使得 $sa'' = p(a)$, 记 $c = s\beta(a)$, 并设 $c_1 \in C'$ 满足 $i(c_1) = c$, 于是 $c' - c_1 \in \text{Im } \alpha$, 则存在 $a_1' \in A'$ 使得 $c' - c_1 = \alpha(a_1')$, 故 $i(c') - i(c_1) = i\alpha(a_1') = \beta j(a_1')$, 从而

$$i(c') = \beta j(a_1') + c = \beta(j(a_1') + sa) \in \text{Im } \beta.$$

即 $\bar{i}(\bar{c}') = i(c') + \text{Im } \beta = 0$, $\bar{c}' \in \text{Ker } \bar{i}$, $\text{Im } \delta \subseteq \text{Ker } \bar{i}$. 反之, 设 $\bar{c}' \in \text{Ker } \bar{i}$, 且存在 $a \in A$ 使得 $s\beta(a) = i(c')$, 则 $s^2\gamma p(a) = s^2\pi\beta(a) = s\pi i(c') = 0$, 从而 $s^2p(a) \in \text{Ker } \gamma$, 进而根据 δ 的定义有 $\bar{c}' = \delta(s^2p(a)) \in \text{Im } \delta$, 即 $\text{Ker } \bar{i} \subseteq \text{Im } \delta$. 于是序列 $\text{Ker } \gamma \xrightarrow{\delta} \text{Coker } \alpha \xrightarrow{\bar{i}} \text{Coker } \beta$ 是 u - S -正合列.

综上所述, 序列 $\text{Ker } \alpha \xrightarrow{j'} \text{Ker } \beta \xrightarrow{p'} \text{Ker } \gamma \xrightarrow{\delta} \text{Coker } \alpha \xrightarrow{\bar{i}} \text{Coker } \beta \xrightarrow{\bar{\pi}} \text{Coker } \gamma$ 是 u - S -正合列.

推论 1 设 R 是环, S 是 R 的乘法子集. 在定理 2 的条件下, 若 α 是 u - S -满同态, 则 p' 是 u - S -满同态.

证明: 若 α 是 u - S -满同态, 则序列 $0 \rightarrow \text{Ker } \alpha \rightarrow A' \xrightarrow{\alpha} C' \rightarrow 0$ 是 u - S -正合列, 于是由定理 2 可得 u - S -正合列 $\text{Ker } \alpha \xrightarrow{j'} \text{Ker } \beta \xrightarrow{p'} \text{Ker } \gamma \rightarrow 0$, 从而 p' 是 u - S -满同态.

定义 4 设 R 是环, S 是 R 的乘法子集, M 是 R -模, 则称正合序列 $X = \dots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ 是 M 的左 u - S -内射分解, 其中 $\forall i \geq 0, I_i \in u$ - S - $I(R)$.

若对任意的 $E \in u$ - S - $I(R)$, 序列 $\text{Hom}_R(E, X)$ 是 u - S -正合列, 则称 X 是 M 的真左 u - S -内射分解.

定义 5 设 R 是环, S 是 R 的乘法子集. 对于

$$\mathbb{I} = \dots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots,$$

若 \mathbb{I} 是 u - S -内射模的正合序列, 且对任意 u - S -内射模 E , 有 $\text{Hom}_R(E, \mathbb{I})$ 是 u - S -正合列, 则称 \mathbb{I} 是完全 u - S -内射分解.

如果存在一个完全 u - S -内射分解 \mathbb{I} , 有 $M \cong \text{Im}(I_0 \rightarrow I^0)$, 则称 R -模 M 是 Gorenstein u - S -内射模. 下面将 Gorenstein u - S -内射模类简记为 G - u - S - $I(R)$.

定义 6 设 R 是环, S 是 R 的乘法子集, M 是 R -模. 则称正合序列 $X' = 0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow I^2 \rightarrow \dots$ 是 M 的 u - S -内射分解, 其中 $\forall i \geq 0, I^i \in u$ - S - $I(R)$. 用 u - S - $\text{id}_R(M)$ 表示 R -模 M 的 u - S -内射维数. 特别地, u - S - $\text{id}_R(M) \leq n$ 当且仅当存在正合列

$$0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots \rightarrow I^n \rightarrow 0,$$

其中每个 I^i 是 u - S -内射模. 如果上述有限序列不存在, 则称 u - S - $\text{id}_R(M) = \infty$. 若 n 是满足上述条件的最小整数, 则记 u - S - $\text{id}_R(M) = n$.

命题 2 设 R 是环, S 是 R 的乘法子集, M 是 R -模. 则下列叙述等价:

- 1) 对任意 u - S -内射模 E 及任意整数 $i > 0$, 有 $\text{Ext}_R^i(E, M)$ 是 u - S -torsion 模;
- 2) 对任意 u - S -内射维数有限的 R -模 N 及任意整数 $i > 0$, 有 $\text{Ext}_R^i(N, M)$ 是 u - S -torsion 模.

证明: 2) \Rightarrow 1). 由于 u - S -内射模的 u - S -内射维数为 0, 故对任意的 $E \in u$ - S - $I(R)$, 有 $\text{Ext}_R^i(E, M)$ 是 u - S -torsion 模.

1) \Rightarrow 2). 设 N 是 R -模, 且 u - S - $\text{id}_R(N) = n < \infty$, 则存在正合列

$$0 \rightarrow N \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots \rightarrow I^{n-2} \rightarrow I^{n-1} \rightarrow I^n \rightarrow 0,$$

其中 I^i 是 u - S -内射模. 显然当 $n=0$ 时结论成立. 不妨设 $n \geq 1$, 取 $K^i = \text{Im}(I^{i-1} \rightarrow I^i)$, $i=1, 2, \dots, n$. 用 $\text{Hom}_R(-, M)$ 作用短正合列 $0 \rightarrow K^{n-1} \rightarrow I^{n-1} \rightarrow I^n \rightarrow 0$, 有长正合列

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_R^{i+n-1}(I^{n-1}, M) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+n-1}(K^{n-1}, M) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+n}(I^n, M) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+n}(I^{n-1}, M) \rightarrow \dots$$

又因为 $I^i \in u$ - S - $I(R)$, 故由已知条件知 $\text{Ext}_R^{i+n-1}(I^{n-1}, M), \text{Ext}_R^{i+n}(I^{n-1}, M), \text{Ext}_R^{i+n}(I^n, M)$ 是 u - S -torsion 模. 从而由文献[6]中推论 2.3 可知

$$\text{Ext}_R^{i+n-1}(K^{n-1}, M) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+n}(I^n, M)$$

是 u - S -同构. 由命题 1 知 $\text{Ext}_R^{i+n-1}(K^{n-1}, M)$ 是 u - S -torsion 模. 用 $\text{Hom}_R(-, M)$ 作用短正合列 $0 \rightarrow K^{n-2} \rightarrow I^{n-2} \rightarrow K^{n-1} \rightarrow 0$, 同理可得

$$\text{Ext}_R^{i+n-2}(K^{n-2}, M) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+n-1}(K^{n-1}, M)$$

是 u - S -同构, $\text{Ext}_R^{i+n-2}(K^{n-2}, M)$ 是 u - S -torsion 模. 重复上述步骤, 可得 $\text{Ext}_R^{i+1}(K^1, M)$ 是 u - S -torsion 模, 且 $\text{Ext}_R^i(N, M) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(K^1, M)$ 是 u - S -同构. 因此对任意整数 $i > 0$, 有 $\text{Ext}_R^i(N, M)$ 是 u - S -torsion 模.

定理 3 设 R 是环, S 是 R 的乘法子集, M 是 R -模. 则 M 是 Gorenstein u - S -内射模当且仅当对任意 u - S -内射模 E 及任意整数 $i > 0$, 有 $\text{Ext}_R^i(E, M)$ 是 u - S -torsion 模, 并且 M 有真左 u - S -内射分解.

证明: 必要性. 因为 M 是 Gorenstein u - S -内射模, 所以存在 M 的完全 u - S -内射分解

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{I} = \dots & \longrightarrow & I^2 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & I^0 & \xrightarrow{\beta^0} & I^1 & \xrightarrow{\beta^1} & I^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & & & & & & \searrow \pi^0 & \nearrow \rho^1 & & & & \\ & & & & & & & & C^1 & & & & \end{array}$$

且 $M \cong \text{Im}(I^{-1} \rightarrow I^0)$, 其中每个 I^i 是 u - S -内射模. 取 $C^i = \text{Im}(I^{i-1} \rightarrow I^i)$, $\rho^i: C^i \rightarrow I^i$ 是嵌入. 对任意 u - S -内射模 E , 用 $\text{Hom}_R(E, -)$ 作用短正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \xrightarrow{\pi^0} C^1 \rightarrow 0$, 得序列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(E, M) \rightarrow \text{Hom}_R(E, I^0) \xrightarrow{(\pi^0)_*} \text{Hom}_R(E, C^1) \rightarrow 0. \tag{1}$$

下证序列(1)是 u - S -正合列, 即只需证明 $(\pi^0)_*$ 是 u - S -满同态. 考虑下图:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_R(E, I^1) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(E, I^0) & \xrightarrow{(\beta^0)_*} & \text{Hom}_R(E, I^1) & \xrightarrow{(\beta^1)_*} & \text{Hom}_R(E, I^2) \\ & & \searrow (\pi^0)_* & & \nearrow (\rho^1)_* & & \\ & & & \text{Hom}_R(E, C^1) & & & \end{array}$$

因为存在 $s \in S$, 使得 $s\text{Ker}((\beta^1)_*) \subseteq \text{Im}((\beta^0)_*)$, 对任意 $g \in \text{Hom}_R(E, C^1)$, 有

$$(\beta^1)_*(\rho^1)_*(g) = (\beta^1)_*(\rho^1 g) = \beta^1 \rho^1 g = 0,$$

故 $\rho^1 g \in \text{Ker}((\beta^1)_*)$, 从而

$$s(\rho^1 g) = (\beta^0)_*(f) = \beta^0 f = \rho^1 \pi^0 f,$$

其中 $f \in \text{Hom}_R(E, I^0)$. 由于 ρ^1 是单同态, 故 $sg = \pi^0 f = (\pi^0)_*(f)$, 即 $s\text{Hom}_R(E, C^1) \subseteq \text{Im}((\pi^0)_*)$, 从而 $(\pi^0)_*$ 是 u - S -满同态. 又存在正合列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(E, M) \rightarrow \text{Hom}_R(E, I^0) \rightarrow \text{Hom}_R(E, C^1) \rightarrow \text{Ext}_R^1(E, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(E, I^0) \rightarrow \dots,$$

由定理 1 知对 u - S -内射模 I^0 , 有 $\text{Ext}_R^1(E, I^0)$ 是 u - S -torsion 模, 进而序列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(E, M) \rightarrow \text{Hom}_R(E, I^0) \rightarrow \text{Hom}_R(E, C^1) \rightarrow \text{Ext}_R^1(E, M) \rightarrow 0$$

是 u - S -正合列. 考虑如下行 u - S -正合的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(E, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(E, I^0) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(E, C^1) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^1(E, M) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(E, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(E, I^0) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(E, C^1) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由文献[8]中定理 1.2 知 $\text{Ext}_R^1(E, M) \rightarrow 0$ 是 u - S -同构, 由命题 1 知 $\text{Ext}_R^1(E, M)$ 是 u - S -torsion 模. 同理可证 $\forall i \in \mathbb{Z}, \text{Ext}_R^i(E, C^i)$ 是 u - S -torsion 模. 易知存在长正合列

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_R^{i-1}(E, I^0) \rightarrow \text{Ext}_R^{i-1}(E, C^1) \rightarrow \text{Ext}_R^i(E, M) \rightarrow \text{Ext}_R^i(E, I^0) \rightarrow \dots,$$

由定理 1 知 $\text{Ext}_R^i(E, I^0)$ 是 u - S -torsion 模. 由文献[6]中推论 2.3 可知 $\text{Ext}_R^{i-1}(E, C^1) \rightarrow \text{Ext}_R^i(E, M)$ 是 u - S -同构, 则由命题 1 知 $\text{Ext}_R^2(E, M)$ 是 u - S -torsion 模. 归纳可证对 $\forall i > 0$, 有 $\text{Ext}_R^i(E, M)$ 是 u - S -torsion 模. 取 M 的完全 u - S -内射分解的左半部分, 即为 M 的真左 u - S -内射分解.

充分性. 设 M 的真左 u - S -内射分解为 $X = \cdots \rightarrow I^{-2} \rightarrow I^{-1} \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 $I^i \in u$ - S - $I(R)$. 对任意的 $E \in u$ - S - $I(R)$, $\text{Hom}_R(E, X)$ 是 u - S -正合的. 任取 M 的 u - S -内射分解, 即

$$X' = 0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow I^2 \rightarrow \cdots,$$

其中 $I^i \in u$ - S - $I(R)$, 取 $C^i = \text{Im}(I^{i-1} \rightarrow I^i)$. 用 $\text{Hom}_R(E, -)$ 作用正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \rightarrow C^1 \rightarrow 0$, 有长正合列

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \text{Ext}_R^i(E, I^0) \rightarrow \text{Ext}_R^i(E, C^1) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(E, M) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(E, I^0) \rightarrow \cdots, \\ 0 \rightarrow \text{Hom}_R(E, M) \rightarrow \text{Hom}_R(E, I^0) \rightarrow \text{Hom}_R(E, C^1) \rightarrow \text{Ext}_R^1(E, M) \rightarrow \cdots. \end{aligned}$$

由条件可知 $\text{Ext}_R^i(E, M)$ 是 u - S -torsion 模, 所以序列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(E, M) \rightarrow \text{Hom}_R(E, I^0) \rightarrow \text{Hom}_R(E, C^1) \rightarrow 0$$

是 u - S -正合列. 由定理 1 知 $\text{Ext}_R^i(E, I^0)$ 是 u - S -torsion 模, 由文献[6]中推论 2.3 可知 $\text{Ext}_R^i(E, C^1) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(E, M)$ 是 u - S -同构, 故由命题 1 知 $\text{Ext}_R^i(E, C^1)$ 是 u - S -torsion 模. 重复上述步骤, $\forall i \geq 1$, 可得序列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(E, C^i) \rightarrow \text{Hom}_R(E, I^i) \rightarrow \text{Hom}_R(E, C^{i+1}) \rightarrow 0$$

是 u - S -正合列. 因此易得 $\text{Hom}_R(E, X')$ 是 u - S -正合的. 下面证明序列

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_R(E, I^2) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}_R(E, I^1) & \xrightarrow{\gamma} & \text{Hom}_R(E, I^0) & \xrightarrow{\beta} & \text{Hom}_R(E, I) \\ & & \searrow \alpha' & & \nearrow \beta' & & \\ & & & \text{Hom}_R(E, M) & & & \end{array}$$

是 u - S -正合列. 因为 $\text{Im } \alpha \subseteq \text{Ker } \gamma$, $\text{Im } \gamma \subseteq \text{Ker } \beta$ 显然成立, 所以只需证明存在 $s \in S$, 使得 $s\text{Ker } \gamma \subseteq \text{Im } \alpha$, 同时存在 $t \in S$ 使得 $t\text{Ker } \beta \subseteq \text{Im } \gamma$ 即可.

由 $\text{Hom}_R(E, X)$ 是 u - S -正合列知, 存在 $s_1 \in S$, 使得 $s_1\text{Ker}(\alpha') \subseteq \text{Im } \alpha$, 且有 $\gamma = \beta' \alpha'$. 由于 β' 是 u - S -单同态, 故存在 $s_2 \in S$, 使得 $s_2\text{Ker}(\beta') = 0$. 对任意的 $a \in \text{Ker } \gamma$, 有 $\gamma(a) = \beta' \alpha'(a) = 0$, 所以 $\alpha'(a) \in \text{Ker}(\beta')$, 从而有 $s_2 \alpha'(a) = 0 = \alpha'(s_2 a)$, 即 $s_2 a \in \text{Ker}(\alpha')$. 进而 $s_1 s_2 a \in s_1\text{Ker}(\alpha') \subseteq \text{Im } \alpha$, 故 $s_1 s_2 \text{Ker } \gamma \subseteq \text{Im } \alpha$. 令 $s = s_1 s_2$, 则可得 $s\text{Ker } \gamma \subseteq \text{Im } \alpha$. 由于 α' 是 u - S -满同态, 所以存在 $t_1 \in S$, 使得 $t_1\text{Hom}_R(E, M) \subseteq \text{Im}(\alpha')$. 又因为存在 $t_2 \in S$, 使得 $t_2\text{Ker } \beta \subseteq \text{Im}(\beta')$, 所以对任意 $b \in \text{Ker } \beta$, 存在 $g \in \text{Hom}_R(E, M)$, 使得 $t_2 b = \beta'(g)$, 进而存在 $f \in \text{Hom}_R(E, I^{-1})$, 使得 $t_1 g = \alpha'(f)$. 故有

$$\beta' \alpha'(f) = t_1 \beta'(g) = t_1 t_2 b = \gamma(f),$$

从而 $t_1 t_2 b \in \text{Im } \gamma$, 于是 $t_1 t_2 \text{Ker } \beta \subseteq \text{Im } \gamma$. 令 $t = t_1 t_2$, 则可得 $t\text{Ker } \beta \subseteq \text{Im } \gamma$. 因此 M 是 Gorenstein u - S -内射模.

推论 2 设 R 是环, S 是 R 的乘法子集, M 是 R -模. 若 M 是 Gorenstein u - S -内射模, 则对任意 u - S -内射维数有限的 R -模 N 及任意整数 $i > 0$, 有 $\text{Ext}_R^i(N, M)$ 是 u - S -torsion 模.

证明: 由定理 3 的必要性和命题 2 可证得结论.

命题 3 设 R 是环, S 是 R 的乘法子集, 则 Gorenstein u - S -内射模的有限直和是 Gorenstein u - S -内射模.

证明: 设 M_1, M_2, \dots, M_n 是 Gorenstein u - S -内射模, E 是 u - S -内射模. 则对任意整数 $i > 0, j = 1, 2, \dots, n$, 由定理 3 可知 $\text{Ext}_R^i(E, M_j)$ 是 u - S -torsion 模, 且 M_j 有真左 u - S -内射分解. 因此存在 $s_j^i \in S$, 使得 $s_j^i \text{Ext}_R^i(E, M_j) = 0$. 令 $s^i = s_1^i s_2^i \cdots s_n^i$, 则

$$s^i \text{Ext}_R^i(E, \bigoplus_{j=1}^n M_j) \cong \bigoplus_{j=1}^n s^i \text{Ext}_R^i(E, M_j) = 0,$$

所以 $\text{Ext}_R^i(E, \bigoplus_{j=1}^n M_j)$ 是 u - S -torsion 模. 易证明 $\bigoplus_{j=1}^n M_j$ 也有真左 u - S -内射分解. 从而由定理 3 可知 $\bigoplus_{j=1}^n M_j$ 是 Gorenstein u - S -内射模.

命题 4 设 R 是环, S 是 R 的乘法子集. 序列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ 是正合列, 且 A 和 B 是 Gorenstein u - S -内射模. 若 Gorenstein u - S -内射模类关于扩张封闭, 则 C 也是 Gorenstein u - S -内射模.

证明: 因为 B 是 Gorenstein u - S -内射模, 所以存在短正合列 $0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow B \rightarrow 0$, 其中 L 是 u - S -内射模, N 是 Gorenstein u - S -内射模. 考虑下列拉回图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & N & \xlongequal{\quad} & N & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

在序列 $0 \rightarrow N \rightarrow N' \rightarrow A \rightarrow 0$ 中, N 和 A 都是 Gorenstein u - S -内射模, 从而由条件知 N' 是 Gorenstein u - S -内射模. 由定理 1 和定理 3 知, 对任意 u - S -内射模 E 及任意整数 $i > 0$, 有 $\text{Ext}_R^i(E, N')$ 和 $\text{Ext}_R^i(E, L)$ 是 u - S -torsion 模. 用 $\text{Hom}_R(E, -)$ 作用短正合列 $0 \rightarrow N' \rightarrow L \rightarrow C \rightarrow 0$, 有长正合列

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_R^i(E, N') \rightarrow \text{Ext}_R^i(E, L) \rightarrow \text{Ext}_R^i(E, C) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(E, N') \rightarrow \cdots.$$

由命题 1 知, $\text{Ext}_R^i(E, C)$ 是 u - S -torsion 模. 因为 N' 是 Gorenstein u - S -内射模, 所以存在正合列 $X = \cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow N' \rightarrow 0$, 使得 $\text{Hom}_R(E, X)$ 是 u - S -正合列, 其中 I_i 是 u - S -内射模. 因此有正合列 $\cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow L \rightarrow C \rightarrow 0$, 且 $\text{Hom}_R(E, -)$ 作用后得到 u - S -正合列. 于是由定理 3 可知 C 是 Gorenstein u - S -内射模.

参 考 文 献

[1] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein Injective and Projective Modules [J]. *Mathematische Zeitschrift*, 1995, 220(4): 611-633.

[2] HOLM H. Gorenstein Homological Dimensions [J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2004, 189(1/2/3): 167-193.

[3] ZHANG X L. Characterizing S -Flat Modules and S -von Neumann Regular Rings by Uniformity [J]. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 2022, 59(3): 643-657.

[4] CHEN M Z, KIM H, QI W, et al. Uniformly S -Noetherian Rings [J]. *Quaestiones Mathematicae*, 2024, 47(5): 1019-1038.

[5] ZHANG X L, QI W. Characterizing S -Projective Modules and S -Semisimple Rings by Uniformity [J]. *Journal of Commutative Algebra*, 2023, 15(1): 139-149.

[6] QI W, ZHANG X L. The u - S -Global Dimensions of Commutative Rings [J]. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 2023, 60(6): 1523-1537.

[7] ZHANG X L. On Uniformly S -Absolutely Pure Modules [J]. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 2023, 60(3): 521-536.

[8] ZHANG X L. The u - S -Weak Global Dimensions of Commutative Rings [J]. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 2023, 38(1): 97-112.

(责任编辑: 赵立芹)