doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2025102

n-Tor-对

张俊杰，陈文静
（西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070）

摘要： 设 n 是一个正整数，R 是有单位元的结合环. 首先，引入环 R 上 n-Tor-对的定义；其次，给出 n-Tor-对的性质，并讨论遗传的 n-Tor-对；最后，给出当$(\mathscr{X},\mathscr{Y})$为 n-Tor-对时，$\mathscr{X}$ 中模的直积具有有限 $\mathscr{X}$-投射维数的等价刻画.

关键词： n-Tor-对；遗传的 n-Tor-对；$\mathscr{X}$-投射维数
中图分类号： O153.3 **文献标志码：** A **文章编号：** 1671-5489(2025)06-1593-05

n-Tor-Pairs

ZHANG Junjie，CHEN Wenjing
(*College of Mathematics and Statistics*，*Northwest Normal University*，*Lanzhou* 730070，*China*)

Abstract： Let n be a positive integer and R be an associative ring with identity. Firstly，the definition of n-Tor-pair over the ring R is introduced. Secondly，some properties of n-Tor-pairs are given，and hereditary n-Tor-pairs are discussed. Finally，the equivalent characterization of the direct product of modules in $\mathscr{X}$ having finite $\mathscr{X}$-projective dimension is given when $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ is an n-Tor-pair.

Keywords： n-Tor-pair；hereditary n-Tor-pair；$\mathscr{X}$-projective dimension

0 引 言

Salce[1]在 Abel 群范畴中引入了余挠对. Trlifaj[2]给出了 Tor-torsion-对的定义：设 $\mathscr{A}$ 是右 R-模的类，$\mathscr{B}$ 是左 R-模的类. 如果有

$$\mathscr{A}=\{A \mid \mathrm{Tor}_1^R(A,B)=0,\ \forall B \in \mathscr{B}\},\qquad \mathscr{B}=\{B \mid \mathrm{Tor}_1^R(A,B)=0,\ \forall A \in \mathscr{A}\},$$

则$(\mathscr{A},\mathscr{B})$称为 Tor-torsion-对. 文献[2]还给出了 Tor-torsion-对与余挠对的关系，从而得到了 Tor-torsion-对与由纯内射模类所生成的特殊余挠对之间的关系. 目前，关于 Tor-torsion-对的研究已有许多结果：邢建民[3]利用研究 torsion-对的方法讨论了 Tor-torsion-对的一些性质，给出了 Tor-torsion-对与环的弱整体维数之间的关系；Gobel 等[4]讨论了 Tor-对与其相关的模类在取正向极限后闭包之间的联系，这里 Tor-对即为上述 Tor-torsion-对；Cortés-Izurdiaga[5]证明了对任意的 Tor-对$(\mathscr{A},\mathscr{B})$，$\mathscr{A}$ 关于正向极限、纯子模、$\mathscr{B}$-纯商模封闭，且对任意的遗传 Tor-对$(\mathscr{A},\mathscr{B})$，$\mathscr{A}$ 关于 $\mathscr{B}$-纯子模封闭，并给出了模类 $\mathscr{A}$ 中模的直积具有有限 $\mathscr{A}$-投射维数的条件，进而研究了由 $\mathscr{A}$ 中模给出的逼近的存在性；Herbera 等[6]在交换 Noether 环上给出了所有遗传 Tor-对的分类定理.

受 Iwanaga-Gorenstein 环上的 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模满足的一些性质的启发，Huerta 等[7]在 Abel 范畴中提出了左、右 n-余挠对的定义，并阐述了 n-余挠对的诸多性质，建立了其

收稿日期： 2025-03-28.

第一作者简介： 张俊杰(1999—)，男，汉族，硕士研究生，从事环的同调理论的研究，E-mail：17797575425@163.com. **通信作者简介：** 陈文静(1989—)，女，汉族，博士，副教授，从事环的同调理论的研究，E-mail：chenwj@nwnu.edu.cn.

基金项目： 国家自然科学基金(批准号：11901463；12361007)和甘肃省青年科技基金计划项目(批准号：20JR5RA517).

与完备余挠对之间的联系.

受上述研究结果的启发，本文首先给出 n-Tor-对的定义：设 $\mathscr{X}$ 是右 R-模的类，$\mathscr{Y}$ 是左 R-模的类. 如果 $\mathscr{X}={}^{\mathrm{T}_n}\mathscr{Y}$, $\mathscr{X}^{\mathrm{T}_n}=\mathscr{Y}$, 则称$(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是环 R 上的 n-Tor-对. 其次，给出 1-Tor-对诱导左 n-Tor-对的条件，进而给出遗传 n-Tor-对的定义：若对任意的 $X\in\mathscr{X}$, $Y\in\mathscr{Y}$, $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(X,Y)=0$, 则称 n-Tor-对$(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是遗传的. 再次，讨论遗传的 n-Tor-对$(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. 最后，给出 $\mathscr{X}$ 中模的直积具有有限 $\mathscr{X}$-投射维数的等价刻画.

1 预备知识

本文用 R 表示有单位元的结合环，用 R-Mod(Mod-R)表示左(右)R-模范畴，用${}_R\mathscr{P}(\mathscr{P}_R)$表示由所有投射左(右)$R$-模构成的类，${}_R\mathscr{F}(\mathscr{F}_R)$表示由所有平坦左(右)$R$-模构成的类. 设 $\mathscr{X}$ 是右 R-模的类，$\mathscr{Y}$ 是左 R-模的类，$i\geqslant 1$. $\mathrm{Tor}_i^R(\mathscr{X},\mathscr{Y})=0$ 表示对任意的 $X\in\mathscr{X}$, $Y\in\mathscr{Y}$, $\mathrm{Tor}_i^R(X,Y)=0$.

设 $\mathscr{Y}$ 是左 R-模的类，m 是非负整数，M 是左 R-模，M 的一个长度为 m 的 $\mathscr{Y}$-余分解是指在 R-Mod 中存在正合序列

$$0\to M\to Y^0\to Y^1\to\cdots\to Y^{m-1}\to Y^m\to 0,$$

其中对任意的 $0\leqslant k\leqslant m$, $Y^k\in\mathscr{Y}$. 进而 M 关于 $\mathscr{Y}$ 的余分解维数

$$\mathrm{cores}\ \dim_{\mathscr{Y}}(M)=\inf\{m\,|\,\text{存在正合列 } 0\to M\to Y^0\to\cdots\to Y^m\to 0\text{，其中每个 } Y^i\in\mathscr{Y}\}.$$

若这样的 m 不存在，则$\mathrm{cores}\ \dim_{\mathscr{Y}}(M)=\infty$. 对偶地，有 M 的长度为 m 的 $\mathscr{Y}$-分解和 M 关于 $\mathscr{Y}$ 的分解维数的概念，后者简记为 $\mathrm{res}\ \dim_{\mathscr{Y}}(M)$. 记

$$\mathscr{Y}_m^{\wedge}:=\{M\in R\text{-Mod}\,|\,\mathrm{res}\ \dim_{\mathscr{Y}}(M)\leqslant m\},\qquad \mathscr{Y}_m^{\vee}:=\{M\in R\text{-Mod}\,|\,\mathrm{cores}\ \dim_{\mathscr{Y}}(M)\leqslant m\}.$$

进一步，当${}_R\mathscr{P}\subseteq\mathscr{Y}$时，如果存在正合序列

$$0\to K\to P_{n-1}\to P_{n-2}\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0,$$

则称 M 的 $\mathscr{Y}$-投射维数不超过 n，其中对任意的 $0\leqslant k\leqslant n-1$, $P_k\in{}_R\mathscr{P}$, $K\in\mathscr{Y}$ 是 M 的第$(n-1)$个合冲，记为 $\mathrm{pd}_{\mathscr{Y}}(M)$.

设 $\mathscr{H}$ 是左 R-模的类，$\mathscr{K}$ 是右 R-模的类，i 是正整数. 记

$$^{\mathrm{T}_i}\mathscr{H}=\{X\in\mathrm{Mod}\text{-}R\,|\,\mathrm{Tor}_i^R(X,H)=0,\ \forall\, H\in\mathscr{H}\},$$
$$\mathscr{K}^{\mathrm{T}_i}=\{X\in R\text{-Mod}\,|\,\mathrm{Tor}_i^R(K,X)=0,\ \forall\, K\in\mathscr{K}\}.$$

设 $\mathscr{X}$ 是右 R-模的类，$\mathscr{Y}$ 是左 R-模的类. 如果 $\mathscr{X}^{\mathrm{T}_1}=\mathscr{Y}$, $\mathscr{X}={}^{\mathrm{T}_1}\mathscr{Y}$, 则称$(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是环 R 上的 Tor-对. 如果对任意的 $Y\in\mathscr{Y}$, 正合列 $0\to A\otimes_R Y\to B\otimes_R Y\to C\otimes_R Y\to 0$ 是正合的，则称右 R-模的短正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$ 是 $\mathscr{Y}$-纯正合的.

定义 1[3] 如果 Tor-对$(\mathscr{X},\mathscr{Y})$满足下列条件之一，则称其是遗传的：

1) $\mathscr{X}$ 是可解类(即 $\mathscr{X}$ 关于扩张、满同态的核封闭，且 $\mathscr{P}_R\subseteq\mathscr{X}$)；

2) $\mathscr{Y}$ 是可解类(即 $\mathscr{Y}$ 关于扩张、满同态的核封闭，且${}_R\mathscr{P}\subseteq\mathscr{Y}$)；

3) 对任意的 $X\in\mathscr{X}$, $Y\in\mathscr{Y}$, $i\geqslant 1$, $\mathrm{Tor}_i^R(X,Y)=0$.

定义 2[5] 设 $\mathscr{X}$ 是右 R-模的类，M 是一个左 R-模. 如果对 $\mathscr{X}$ 中的任意一簇模$\{X_i: i\in I\}$，典范同态 $\left(\prod_{i\in I}X_i\right)\otimes_R M\to\prod_{i\in I}(X_i\otimes_R M)$ 均为单同态，则称 M 是 $\mathscr{X}$-Mittag-Leffler 模. 用 $\mathrm{ML}(\mathscr{X})$表示由所有 $\mathscr{X}$-Mittag-Leffler 左 R-模构成的类.

2 主要结果

设 n 是一个正整数.

定义 3 设 $\mathscr{X}$ 是右 R-模的类，$\mathscr{Y}$ 是左 R-模的类. 如果 $\mathscr{X}={}^{\mathrm{T}_n}\mathscr{Y}$, $\mathscr{X}^{\mathrm{T}_n}=\mathscr{Y}$, 则称$(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是环 R 上的 n-Tor-对.

注 1 1) 若$(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是环 R 上的 n-Tor-对，则 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 关于扩张、直和项、任意直和封闭，且 $\mathscr{X}$ 包含所有的平坦右 R-模，$\mathscr{Y}$ 包含所有的平坦左 R-模. 因为函子 $\mathrm{Tor}_{i\geqslant 1}^R(-,-)$保持正向极限，所以 $\mathscr{X}$ 关于

正向极限封闭.

2）1-Tor-对是 Tor-对.

3）易得($\mathscr{F}_R$,R-Mod)和(Mod-R,${}_R\mathscr{F}$)是 n-Tor-对.

命题 1　设 R 是右遗传环，($\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$)是环 R 上的 n-Tor-对，且 $\mathscr{X}$ 中任意的短正合列都 $\mathscr{Y}$-纯正合. 则对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$，$\mathrm{Tor}_i^R(\mathscr{X},\mathscr{Y})=0$.

证明：设 $X\in\mathscr{X}$，$Y\in\mathscr{Y}$，则存在短正合列 $0\to H\to P\to X\to 0$，其中 $P\in\mathscr{P}_R$. 因为 R 是右遗传环，所以 $H\in\mathscr{P}_R$. 由长正合列定理[8]知，存在正合列

$$\mathrm{Tor}_{n-1}^R(P,Y)\to\mathrm{Tor}_{n-1}^R(X,Y)\to\mathrm{Tor}_{n-2}^R(H,Y)\to\cdots\to$$
$$\mathrm{Tor}_2^R(P,Y)\to\mathrm{Tor}_2^R(X,Y)\to\mathrm{Tor}_1^R(H,Y)\to\cdots,$$

因为 $\mathrm{Tor}_{n-1}^R(P,Y)=0$，$\mathrm{Tor}_{n-2}^R(H,Y)=0$，…，$\mathrm{Tor}_2^R(P,Y)=0$，$\mathrm{Tor}_1^R(H,Y)=0$，所以对任意的 $2\leqslant i\leqslant n$，$\mathrm{Tor}_i^R(\mathscr{X},\mathscr{Y})=0$. 由题设条件及分解定理[8]可得如下行正合的交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^R(X,Y) \arrow[r] \arrow[d] & H\otimes_R Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & P\otimes_R Y \arrow[d, equal] \\
& 0 \arrow[r] & H\otimes_R Y \arrow[r] & P\otimes_R Y
\end{tikzcd},$$

从而由五引理[8]得 $\mathrm{Tor}_1^R(X,Y)=0$. 因此对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$，$\mathrm{Tor}_i^R(\mathscr{X},\mathscr{Y})=0$.

命题 2　设 $\mathscr{X}$ 是右 R-模的类，$\mathscr{Y}$ 是左 R-模的类，并对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$，$\mathrm{Tor}_i^R(\mathscr{X},\mathscr{Y})=0$. 对任意的 $0\leqslant k\leqslant n-1$，若 $Y\in\mathscr{Y}_k^{\vee}$，则对任意的 $1\leqslant i\leqslant n-k$ 和 $X\in\mathscr{X}$，均有 $\mathrm{Tor}_i^R(X,Y)=0$. 特别地，有 $\mathrm{Tor}_1^R(\mathscr{X},\mathscr{Y}_{n-1}^{\vee})=0$.

证明：当 $n=1$ 时，结论显然成立.

设 $n\geqslant 2$，用数学归纳法对 k 进行归纳. 当 $k=0$ 时，结论显然成立. 当 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 时，设 $X\in\mathscr{X}$，$Y\in\mathscr{Y}_k^{\vee}$. 当 $k=1$ 时，由条件知 $\mathrm{cores\,dim}_{\mathscr{Y}}(Y)\leqslant 1$，则存在短正合列 $0\to Y\to Y^0\to Y^1\to 0$，其中 $Y^0,Y^1\in\mathscr{Y}$. 由长正合列定理知存在正合列

$$\mathrm{Tor}_{i+1}^R(X,Y^1)\to\mathrm{Tor}_i^R(X,Y)\to\mathrm{Tor}_i^R(X,Y^0).$$

因为 $1\leqslant i\leqslant n-1$，所以 $\mathrm{Tor}_{i+1}^R(X,Y^1)=0$，$\mathrm{Tor}_i^R(X,Y^0)=0$. 于是对任意的 $1\leqslant i\leqslant n-1$，$X\in\mathscr{X}$，$Y\in\mathscr{Y}_1^{\vee}$，从而 $\mathrm{Tor}_i^R(X,Y)=0$.

假设对任意的 $1\leqslant k\leqslant n-1$，$Y'\in\mathscr{Y}_{k-1}^{\vee}$，$X\in\mathscr{X}$，则有 $1\leqslant i\leqslant n-(k-1)$，$\mathrm{Tor}_i^R(X,Y')=0$. 设 $Y\in\mathscr{Y}_k^{\vee}$，则存在短正合列 $0\to Y\to Y_0\to Y'\to 0$，其中 $Y_0\in\mathscr{Y}$，$Y'\in\mathscr{Y}_{k-1}^{\vee}$. 由长正合列定理知，存在正合列

$$\mathrm{Tor}_{i+1}^R(X,Y')\to\mathrm{Tor}_i^R(X,Y)\to\mathrm{Tor}_i^R(X,Y_0),$$

则 $\mathrm{Tor}_i^R(X,Y_0)=0$. 因为 $1\leqslant i\leqslant n-k$，所以由归纳假设得 $\mathrm{Tor}_{i+1}^R(X,Y')=0$. 因此对任意的 $1\leqslant i\leqslant n-k$ 和 $X\in\mathscr{X}$，$\mathrm{Tor}_i^R(X,Y)=0$.

命题 3　设 $\mathscr{X}$ 是右 R-模的类，$\mathscr{Y}$ 是左 R-模的类，且对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$，$\mathrm{Tor}_i^R(\mathscr{X},\mathscr{Y})=0$. 则对任意的 $0\leqslant k\leqslant n-1$，$\mathscr{X}_k^{\wedge}\subseteq{}^{\mathrm{T}_{k+1}}\mathscr{Y}$.

证明：当 $n=1$ 时，结论显然成立.

设 $n\geqslant 2$，用数学归纳法对 k 进行归纳. 当 $k=0$ 时，结论显然成立. 假设对任意的 $1\leqslant k\leqslant n-1$，有 $\mathscr{X}_{k-1}^{\wedge}\subseteq{}^{\mathrm{T}_k}\mathscr{Y}$. 设 $X\in\mathscr{X}_k^{\wedge}$，$Y\in\mathscr{Y}$，则存在短正合列 $0\to L\to X'\to X\to 0$，其中 $X'\in\mathscr{X}$，$L\in\mathscr{X}_{k-1}^{\wedge}$. 由长正合列定理知，存在正合列

$$\mathrm{Tor}_{k+1}^R(X',Y)\to\mathrm{Tor}_{k+1}^R(X,Y)\to\mathrm{Tor}_k^R(L,Y),$$

则 $\mathrm{Tor}_{k+1}^R(X',Y)=0$，由归纳假设得 $\mathrm{Tor}_k^R(L,Y)=0$，故 $\mathrm{Tor}_{k+1}^R(X,Y)=0$. 因此 $\mathscr{X}_k^{\wedge}\subseteq{}^{\mathrm{T}_{k+1}}\mathscr{Y}$.

命题 4　设 $\mathscr{X}$ 是右 R-模的类，且 $\mathscr{P}_R\subseteq\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$ 是左 R-模的类，且对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$，$\mathrm{Tor}_i^R(\mathscr{X},\mathscr{Y})=0$. 则下列结论等价：

1）$\mathscr{X}={}^{\mathrm{T}_1}\mathscr{Y}$;

2）对任意的 $0\leqslant k\leqslant n-1$，$\mathscr{X}_k^{\wedge}={}^{\mathrm{T}_{k+1}}\mathscr{Y}$.

证明：2)⇒1). 当 $k=0$ 时，结论显然成立.

1)⇒2). 当 $k=0$ 时，结论成立. 设 $k\geqslant 1$. 由命题3知 $\mathscr{X}_k^{\wedge}\subseteq {}^{\mathrm{T}_{k+1}}\mathscr{Y}$. 下证 $\mathscr{X}_k^{\wedge}\supseteq {}^{\mathrm{T}_{k+1}}\mathscr{Y}$.

设 $M\in {}^{\mathrm{T}_{k+1}}\mathscr{Y}$, $Y\in\mathscr{Y}$. 取 M 的部分投射分解

$$0\to K\to P_{k-1}\to P_{k-2}\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0,$$

其中 $P_l\in\mathscr{P}_R\subseteq\mathscr{X}(0\leqslant l\leqslant k-1)$. 由维数转移得

$$\mathrm{Tor}_1^R(K,Y)\cong\mathrm{Tor}_{k+1}^R(M,Y)=0.$$

因此 $K\in {}^{\mathrm{T}_1}\mathscr{Y}=\mathscr{X}$, 从而 $M\in\mathscr{X}_k^{\wedge}$.

定理1　设 $\mathscr{X}$ 是右 R-模的类，$\mathscr{Y}$ 是左 R-模的类，对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$, $\mathrm{Tor}_i^R(\mathscr{X},\mathscr{Y})=0$，且 $(\mathscr{X}_{n-1}^{\wedge})^{\mathrm{T}_n}\subseteq\mathscr{Y}$. 若 $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是环 R 上的1-Tor-对，则 $(\mathscr{X}_{n-1}^{\wedge},\mathscr{Y})$ 是环 R 上的 n-Tor-对.

证明：由命题4知，当 $k=n-1$ 时，$\mathscr{X}_{n-1}^{\wedge}={}^{\mathrm{T}_n}\mathscr{Y}$. 因此 $\mathscr{Y}\subseteq(\mathscr{X}_{n-1}^{\wedge})^{\mathrm{T}_n}$. 由条件可知 $(\mathscr{X}_{n-1}^{\wedge},\mathscr{Y})$ 是环 R 上的 n-Tor-对.

注2　对偶地，设 $\mathscr{X}$ 是右 R-模的类，$\mathscr{Y}$ 是左 R-模的类，对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$, $\mathrm{Tor}_i^R(\mathscr{X},\mathscr{Y})=0$，且 ${}^{\mathrm{T}_n}(\mathscr{Y}_{n-1}^{\wedge})\subseteq\mathscr{X}$. 若 $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是环 R 上的1-Tor-对，则 $(\mathscr{X},\mathscr{Y}_{n-1}^{\wedge})$ 是环 R 上的 n-Tor-对.

定义4　若对任意的 $X\in\mathscr{X}$, $Y\in\mathscr{Y}$, $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(X,Y)=0$，则称 n-Tor-对 $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是遗传的.

定理2　若 $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是环 R 上的 n-Tor-对，则下列条件等价：

1) $\mathscr{X}$ 是可解类；2) $\mathscr{Y}$ 是可解类；3) $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是遗传的.

证明：3)⇒1). 因为 $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是环 R 上的 n-Tor-对，所以 $\mathscr{X}={}^{\mathrm{T}_n}\mathscr{Y}$. 则 $\mathscr{X}$ 关于扩张封闭，并包含所有投射右 R-模构成的类. 考虑以下右 R-模的短正合列：$0\to A\to B\to C\to 0$，其中 $B,C\in\mathscr{X}$. 对任意的 $Y\in\mathscr{Y}$. 由长正合列定理得

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(C,Y)\to\mathrm{Tor}_n^R(A,Y)\to\mathrm{Tor}_n^R(B,Y).$$

因为 $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是 n-Tor-对，所以 $\mathrm{Tor}_n^R(B,Y)=0$. 由 $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 的遗传性得 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(C,Y)=0$. 故 $\mathrm{Tor}_n^R(A,Y)=0$，即 $A\in {}^{\mathrm{T}_n}\mathscr{Y}=\mathscr{X}$.

1)⇒3). 设 $X\in\mathscr{X}$. 考虑以下右 R-模的短正合列：$0\to K\to P\to X\to 0$，其中 $P\in\mathscr{P}_R\subseteq\mathscr{X}$. 因为 $\mathscr{X}$ 是可解类，所以 $K\in\mathscr{X}$. 对任意的 $Y\in\mathscr{Y}$. 由长正合列定理得

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(P,Y)\to\mathrm{Tor}_{n+1}^R(X,Y)\to\mathrm{Tor}_n^R(K,Y),$$

则 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(P,Y)=0$, $\mathrm{Tor}_n^R(K,Y)=0$. 因此对任意的 $X\in\mathscr{X}$, $Y\in\mathscr{Y}$, $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(X,Y)=0$.

同理可证2)和3)等价.

引理1　设 $n\geqslant 0$, $m\geqslant 1$, M 是一个右 R-模. 若 $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是环 R 上的 m-Tor-对，则 $\mathrm{pd}_{\mathscr{X}}(M)\leqslant n$ 当且仅当对任意的 $Y\in\mathscr{Y}$, $\mathrm{Tor}_{m+n}^R(M,Y)=0$.

证明：取 M 的部分投射分解：

$$0\to K\to P_{n-1}\to P_{n-2}\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0,$$

其中 $P_i\in\mathscr{P}_R(0\leqslant i\leqslant n-1)$. 则 $\mathrm{pd}_{\mathscr{X}}(M)\leqslant n$ 当且仅当 $K\in\mathscr{X}$，而 $K\in\mathscr{X}$ 当且仅当对 $Y\in\mathscr{Y}$, $\mathrm{Tor}_m^R(K,Y)=0$. 由维数转移得

$$\mathrm{Tor}_{m+n}^R(M,Y)\cong\mathrm{Tor}_m^R(K,Y)=0.$$

因此 $\mathrm{pd}_{\mathscr{X}}(M)\leqslant n$ 当且仅当对任意的 $Y\in\mathscr{Y}$, $\mathrm{Tor}_{m+n}^R(M,Y)=0$.

定理3　设 $n\geqslant 0$, $m\geqslant 1$, $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是环 R 上遗传的 m-Tor-对，且 $\mathscr{Y}$ 中任意的短正合列都 $\mathscr{X}$-纯正合，则下列结论等价：

1) $\mathscr{X}$ 中模的所有直积的 $\mathscr{X}$-投射维数小于等于 n；

2) $\mathscr{Y}$ 中每个模的 $\mathrm{ML}(\mathscr{X})$-投射维数小于等于 $m+n$.

证明：设 $Y\in\mathscr{Y}$, $\{X_i: i\in I\}$ 是 $\mathscr{X}$ 中的一簇模. 取 Y 的投射分解

$$\cdots\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{d_0}Y\longrightarrow 0,$$

其中每个 $P_i\in{}_R\mathscr{P}$，且对于 $i=0,1,\cdots,K_i=\mathrm{Ker}\,d_i$. 考虑以下短正合列：

$$0\to K_{m+n-1}\to P_{m+n-1}\to K_{m+n-2}\to 0.\tag{1}$$

因为 $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是遗传的，所以由定理2知 $K_{m+n-1},K_{m+n-2}\in\mathscr{Y}$. 由条件有如下短正合列：

$$0\to X_i\otimes_R K_{m+n-1}\to X_i\otimes_R P_{m+n-1}\to X_i\otimes_R K_{m+n-2}\to 0.$$

用函子 $\left(\prod_{i\in I}X_i\right)\otimes_R$- 作用在短正合列(1) 上，可得如下行正合的交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & (\prod_{i\in I}X_i)\otimes_R K_{m+n-1} \arrow[r] \arrow[d] & (\prod_{i\in I}X_i)\otimes_R P_{m+n-1} \arrow[r] \arrow[d] & (\prod_{i\in I}X_i)\otimes_R K_{m+n-2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod_{i\in I}(X_i\otimes_R K_{m+n-1}) \arrow[r] & \prod_{i\in I}(X_i\otimes_R P_{m+n-1}) \arrow[r] & \prod_{i\in I}(X_i\otimes_R K_{m+n-2}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

因为 $P_{m+n-1}\in ML(\mathscr{X})$，所以 $h:\left(\prod_{i\in I}X_i\right)\otimes_R P_{m+n-1}\to\prod_{i\in I}(X_i\otimes_R P_{m+n-1})$ 是单同态，其中 h 表示上图中的第二个竖箭头. 则

$$f:\left(\prod_{i\in I}X_i\right)\otimes_R K_{m+n-1}\to\left(\prod_{i\in I}X_i\right)\otimes_R P_{m+n-1}$$

是单同态当且仅当

$$g:\left(\prod_{i\in I}X_i\right)\otimes_R K_{m+n-1}\to\prod_{i\in I}(X_i\otimes_R K_{m+n-1})$$

是单同态，其中 f 表示上图中第一行的第一个横箭头，g 表示上图中第一个竖箭头. 从而由维数转移得

$$\mathrm{Tor}_1^R\left(\prod_{i\in I}X_i,K_{m+n-2}\right)\cong\mathrm{Tor}_{m+n}^R\left(\prod_{i\in I}X_i,Y\right).$$

因此有如下正合列：

$$0\to\mathrm{Tor}_{m+n}^R\left(\prod_{i\in I}X_i,Y\right)\to\left(\prod_{i\in I}X_i\right)\otimes_R K_{m+n-1}\to\left(\prod_{i\in I}X_i\right)\otimes_R P_{m+n-1}.$$

f 是单同态当且仅当 $\mathrm{Tor}_{m+n}^R\left(\prod_{i\in I}X_i,Y\right)=0$，则 g 是单同态当且仅当 $\mathrm{Tor}_{m+n}^R\left(\prod_{i\in I}X_i,Y\right)=0$. 因此由 Y 和 $\{X_i: i\in I\}$ 的任意性及引理 1 知，$\mathscr{X}$ 中模的每个直积的 $\mathscr{X}$-投射维数小于等于 n 当且仅当 $\mathscr{Y}$ 中每个模有有限的 ML($\mathscr{X}$)-投射维数小于等于 $m+n$.

参 考 文 献

[1] SALCE L. Cotorsion Theories for Abelian Groups [J]. Symposia Mathematica，1979，23：11-32.

[2] TRLIFAJ J. Handbook of Tilting Theory [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2007：283-284.

[3] 邢建民. Tor-Torsion Pair 与弱整体维数 [J]. 纯粹数学与应用数学，2009，25(3)：563-565.（XING J M. Tor-Torsion Pair and Weak Global Dimensions [J]. Pure and Applied Mathematics，2009，25(3)：563-565.）

[4] GOBEL R，TRLIFAJ J. Approximations and Endomorphism Algebras of Modules [M]. Berlin：Walter de Gruyter Incorporated，2012：99-101.

[5] CORTÉS-IZURDIAGA M. Tor-Pairs：Products and Approximations [J]. Contemporary Mathematics，2020，751：119-133.

[6] HERBERA D，HRBEK M，LE GROS G. Cotorsion Pairs and Tor-Pairs over Commutative Noetherian Rings [EB/OL]. (2024-11-07)[2025-03-28]. https://arxiv.org/abs/2411.04514.

[7] HUERTA M，MENDOZA O，PÉREZ M A. n-Cotorsion Pairs [J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2021，225(5)：106556-1-106556-40.

[8] 佟文廷. 同调代数引论 [M]. 北京：高等教育出版社，1998：53-201.（TONG W T. An Introduction to Homological Algebra [M]. Beijing：Higher Education Press，1998：53-201.）

（责任编辑：李　琦）