

基于属性导出三支面向属性概念格的规则提取

周东海, 魏玲, 金铭

(西北大学 数学学院, 西安 710127; 西北大学 概念、认知与智能研究中心, 西安 710127)

摘要: 针对属性导出三支面向属性概念格, 通过定义弱协调性, 解决一般决策形式背景的规则提取问题, 并探讨其与面向属性规则之间的关系. 首先, 定义属性导出三支面向属性弱协调性及对应规则, 给出属性导出三支面向属性弱协调性与面向属性弱协调性之间的关系, 以及两种属性规则之间的包含关系. 其次, 结合实例验证用该方法获取的规则更全面合理.

关键词: 形式概念分析; 决策形式背景; 面向属性概念格; 三支概念; 规则提取

中图分类号: O29; TP18 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2026)02-0265-10

Rules Acquisition Based on Attribute-Induced Three-Way Property-Oriented Concept Lattices

ZHOU Donghai, WEI Ling, JIN Ming

(School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China;

Institute of Concept, Cognition and Intelligence, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: Aiming at the rules acquisition for attribute-induced three-way property-oriented concept lattices, by defining weak consistency, we solved the problem of rules acquisition in general formal decision contexts and explored its relationship with property-oriented rules. Firstly, we defined the attribute-induced three-way property-oriented weak consistency and corresponding rules, and gave the relationship between attribute-induced three-way property-oriented weak consistency and property-oriented weak consistency, as well as the inclusion relationship between the two types of attribute rules. Secondly, we demonstrated through examples that the obtained rules using this method are more comprehensive and reasonable.

Keywords: formal concept analysis; formal decision context; property-oriented concept lattice; three-way concept; rule acquisition

形式概念分析(formal concept analysis, FCA)^[1-2]作为数据分析的有力工具, 目前在概念格模型的推广^[3-9]、属性约简^[10-12]和规则提取^[13-23]等方面已取得了诸多成果. 概念格是 FCA 的核心数据结构, 它通过格图生动简洁地体现概念之间的泛化和特化关系. Düntsch 等^[3]将粗糙集中的上、下近似引入到形式概念分析中, 提出了面向属性概念格; Yao^[4]给出了面向对象概念格的定义并研究了其性质. 受形式概念与三支决策思想的启发, Qi 等^[6]在形式背景上构造三支算子, 提出了属性(对象)导

收稿日期: 2025-05-26. 网络首发日期: 2025-11-25.

第一作者简介: 周东海(2001—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事形式概念分析及三支决策的研究, E-mail: 13882575885@163.com.
通信作者简介: 魏玲(1972—), 女, 汉族, 博士, 教授, 从事形式概念分析、粗糙集、三支决策和粒计算的研究, E-mail: wl@nwu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12171392)和陕西数理基础科学研究项目(批准号: 23JSZ008).

网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20251124.1039.001>.

出三支概念格,刻画了对象和属性之间“共同具有”和“共同不具有”的关系;文献[8-9]进一步提出了属性(对象)导出三支面向属性(对象)概念格,并给出了两者的构造方法.

规则提取是形式概念分析的重要内容.王一帆等^[14]研究了基于概念约简的强协调决策形式背景的规则提取;姜玉婷等^[15]讨论了面向属性(对象)概念格的决策规则,并研究了面向属性规则与面向对象规则之间的联系.通常,经典概念格只能用于解决二支决策规则问题,而三支决策的引入将概念划分的更清晰,因此,在三支框架下获取的规则可更好地解释实际生活中遇到的问题.例如:刘琳等^[16]利用置信度提出了属性(对象)导出三支概念格的规则提取方法;Wei等^[17]给出了属性(对象)导出三支概念格的规则提取方法,并研究了所提取的规则与普通概念格下提取规则之间的联系;任睿思等^[18]研究了属性导出三支弱协调决策形式背景上的规则获取问题,其提取的规则更适用于实际生活中的决策推理;牛丽慧等^[19]研究了不完备形式背景下基于 $OE\text{-}cp$ -近似概念的规则提取问题;Huang等^[20]研究了基于混合信息的决策形式背景的规则简化问题;Hu等^[21]通过定义单边模糊三支概念格挖掘正负规则;Xie等^[22]利用算法快速构造对象导出三支概念格,并讨论了关联规则的提取问题.

属性导出三支面向属性概念能刻画对象与属性之间“部分具有”和“部分不具有”的关系,考虑了更多可能性,语义更丰富,对实际问题解释也更到位.因此,贺晓丽等^[23]定义了三支面向属性强协调性,并考虑了在强协调性下的规则提取.然而由于实际问题中决策形式背景不一定是三支面向属性强协调的,鉴于此,本文定义属性导出三支面向属性弱协调决策形式背景,并研究其规则提取问题,进一步从决策形式背景及其补背景两方面讨论属性导出三支面向属性规则与面向属性规则之间的内在联系,最后通过实例说明本文提出规则的合理性.

1 预备知识

定义 1^[1] 设 (G, M, I) 是形式背景,其中 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ 为对象集, $M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$ 为属性集, $I \subseteq G \times M$ 为 G 和 M 之间的二元关系.对任意的 $g \in G, m \in M$,若 $(g, m) \in I$,则表示对象 g 具有属性 m ,记为 gIm .

对任意的 $X \subseteq G, B \subseteq M$,Wille^[1]定义了如下一对诱导算子:

$$X^* = \{m \in M \mid \forall g \in X, gIm\}, \quad (1)$$

$$B^* = \{g \in G \mid \forall m \in B, gIm\}. \quad (2)$$

特别地,对任意的 $g \in G, m \in M$,记 $\{g\}^*$ 为 g^* , $\{m\}^*$ 为 m^* .

Düntsch等^[3]在对象集和属性集上定义了 \square 和 \diamond 算子,其性质见文献[3-4].对任意的 $X \subseteq G, B \subseteq M$,有

$$X^\square = \{m \in M \mid m^* \subseteq X\}, \quad B^\square = \{g \in G \mid g^* \subseteq B\}, \quad (3)$$

$$X^\diamond = \{m \in M \mid m^* \cap X \neq \emptyset\}, \quad B^\diamond = \{g \in G \mid g^* \cap B \neq \emptyset\}. \quad (4)$$

定义 2^[3] 若二元组 (X, B) 满足 $X = B^\square$ 且 $B = X^\diamond$,则 (X, B) 称为面向属性概念,其中 X 称为面向属性概念的外延, B 称为面向属性概念的内涵.

(G, M, I) 上所有面向属性概念的集合记为 $L_P(G, M, I)$.对任意的 $(X_1, B_1), (X_2, B_2) \in L_P(G, M, I)$,定义偏序关系为 $(X_1, B_1) \leq (X_2, B_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 (B_1 \subseteq B_2)$.显然, $(L_P(G, M, I), \leq)$ 是偏序集.任意两个面向属性概念的上确界和下确界分别为

$$(X_1, B_1) \vee (X_2, B_2) = ((X_1 \cup X_2)^\diamond, B_1 \cup B_2), \quad (5)$$

$$(X_1, B_1) \wedge (X_2, B_2) = (X_1 \cap X_2, (B_1 \cap B_2)^\square). \quad (6)$$

易知 $L_P(G, M, I)$ 为完备格,称为面向属性概念格.

Wei等^[8]将 \square 和 \diamond 算子进行推广,提出了相应的负算子.

定义 3^[8] 设 (G, M, I) 为形式背景,定义一对负算子: $\overline{\square}(\overline{\diamond}): \mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{P}(M), \overline{\diamond}(\overline{\square}): \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(G)$.对任意的 $X \subseteq G, B \subseteq M$,有

$$X^{\overline{\square}} = \{m \in M \mid m^{\overline{\square}} \subseteq X\}, \quad B^{\overline{\diamond}} = \{g \in G \mid g^{\overline{\diamond}} \subseteq B\}, \quad (7)$$

$$X^{\overline{\diamond}} = \{m \in M \mid m^{\overline{\diamond}} \cap X \neq \emptyset\}, \quad B^{\overline{\square}} = \{g \in G \mid g^{\overline{\square}} \cap B \neq \emptyset\}. \quad (8)$$

对任意的 $x \in X$, 若 $x^* \subseteq B$, 则称对象 x 部分具有属性集 B ; 若 $x^{\bar{*}} \subseteq B$, 则称对象 x 部分不具有属性集 B .

定义 4^[8] 设 (G, M, I) 为形式背景, 对任意的 $X, Y \subseteq G, B \subseteq M$, 一对属性导出三支面向属性算子分别定义为

$$\nabla: \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(G) \times \mathcal{P}(G), \quad (9)$$

$$\Delta: \mathcal{P}(G) \times \mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{P}(M), \quad (10)$$

其中 $B^\nabla = (B^\square, B^{\bar{\square}})$, $(X, Y)^\Delta = X^\diamond \cup Y^{\bar{\diamond}}$.

若 $B^\nabla = (X, Y)$ 且 $(X, Y)^\Delta = B$, 则 $((X, Y), B)$ 称为属性导出三支面向属性概念.

(G, M, I) 上所有属性导出三支面向属性概念的集合记为 $L_{\text{AEP}}(G, M, I)$. 对任意的 $((X, Y), B)$, $((Z, W), C) \in L_{\text{AEP}}(G, M, I)$, 定义偏序关系为

$$((X, Y), B) \leq ((Z, W), C) \Leftrightarrow (X, Y) \subseteq (Z, W) \Leftrightarrow B \subseteq C.$$

显然, $(L_{\text{AEP}}(G, M, I), \leq)$ 是偏序集. 任意两个属性导出三支面向属性概念的上确界和下确界分别为

$$((X, Y), B) \vee ((Z, W), C) = (((X, Y) \cap (Z, W))^{\Delta\nabla}, B \cup C), \quad (11)$$

$$((X, Y), B) \wedge ((Z, W), C) = ((X, Y) \cap (Z, W), (B \cap C)^{\nabla\Delta}). \quad (12)$$

易知 $L_{\text{AEP}}(G, M, I)$ 为完备格, 称为属性导出三支面向属性概念格.

引理 1^[9] 设 (G, M, I) 为形式背景, (G, M, I^c) 为形式背景的补背景, 其中 $I^c = (G \times M) \setminus I$, 若 $(X, B) \in L_P(G, M, I)$, $(Y, C) \in L_P(G, M, I^c)$, 则 $((X, B^{\bar{\square}}), B) \in L_{\text{AEP}}(G, M, I)$, $((C^{\square}, Y), C) \in L_{\text{AEP}}(G, M, I)$.

引理 2^[9] 设 (G, M, I) 为形式背景, (G, M, I^c) 为形式背景的补背景, 其中 $I^c = (G \times M) \setminus I$, 若 $((X, Y), B) \in L_{\text{AEP}}(G, M, I)$, 则 $(X, X^\diamond) \in L_P(G, M, I)$, $(Y, Y^{\bar{\diamond}}) \in L_P(G, M, I^c)$.

引理 3^[9] 设 (G, M, I) 为形式背景, (G, M, I^c) 为其补背景, 其中 $I^c = (G \times M) \setminus I$, 则:

- 1) 存在从 $L_P(G, M, I)$ 到 $L_{\text{AEP}}(G, M, I)$ 的保并序嵌入;
- 2) 存在从 $L_P(G, M, I^c)$ 到 $L_{\text{AEP}}(G, M, I)$ 的保并序嵌入.

定义 5^[13] 设 (G, M, I) 和 (G, N, J) 为形式背景且满足 $M \cap N = \emptyset$, 则五元组 (G, M, I, N, J) 称为决策形式背景, 其中 M 为条件属性集, N 为决策属性集. (G, M, I) 称为条件子背景, (G, N, J) 称为决策子背景.

2 属性导出三支面向属性概念格的规则提取

2.1 属性导出三支面向属性弱协调决策形式背景

先通过属性导出三支面向属性概念格之间的细于关系定义属性导出三支面向属性弱协调决策形式背景.

定义 6 设 $L_{\text{AEP}}(G, M_1, I_1)$ 和 $L_{\text{AEP}}(G, M_2, I_2)$ 为两个属性导出三支面向属性概念格, $((X_1, Y_1), B_1) \in L_{\text{AEP}}(G, M_1, I_1)$, $((X_2, Y_2), B_2) \in L_{\text{AEP}}(G, M_2, I_2)$. 若存在单射 $\alpha: L_{\text{AEP}}(G, M_2, I_2) \rightarrow L_{\text{AEP}}(G, M_1, I_1)$, 满足:

$$1) \alpha(((G, G), M_2)) = ((G, G), M_1), \alpha(((\emptyset, \emptyset), \emptyset)) = ((\emptyset, \emptyset), \emptyset);$$

2) 对任意的 $((X_2, Y_2), B_2) \in L_{\text{AEP}}(G, M_2, I_2)$, 有 $\alpha(((X_2, Y_2), B_2)) = ((X_1, Y_1), B_1)$, 且 $(X_1, Y_1) \subseteq (X_2, Y_2)$, 即 $X_1 \subseteq X_2, Y_1 \subseteq Y_2$.

则称 $L_{\text{AEP}}(G, M_1, I_1)$ 细于 $L_{\text{AEP}}(G, M_2, I_2)$, 记作 $L_{\text{AEP}}(G, M_1, I_1) \leq L_{\text{AEP}}(G, M_2, I_2)$, 并称映射 α 为蕴含映射.

基于概念格之间的细于关系, 属性导出三支面向属性弱协调决策形式背景定义如下.

定义 7 设 (G, M, I, N, J) 为决策形式背景, 若存在蕴含映射 α , 使得 $L_{\text{AEP}}(G, M, I) \leq L_{\text{AEP}}(G, N, J)$, 则称决策形式背景是属性导出三支面向属性弱协调的.

为方便后续表达, 本文将属性导出三支面向属性弱协调决策形式背景简称为三支面向属性弱协调决策形式背景.

例 1 表 1 为决策形式背景 (G, M, I, N, J) , 其中对象集 $G = \{1, 2, 3, 4\}$, 条件属性集 $M = \{a, b, c, d, e\}$, 决策属性集 $N = \{f, g, h\}$. 该决策形式背景的两个属性导出三支面向属性概念格 $L_{AEP}(G, M, I)$ 和 $L_{AEP}(G, N, J)$ 分别如图 1 和图 2 所示. 对于决策形式背景 (G, M, I, N, J) , 存在蕴含映射 α , 使得

$$\begin{aligned} \alpha(((14, 23), fg)) &= ((4, 2), abd), & \alpha(((3, 124), gh)) &= ((3, 124), abce), \\ \alpha(((23, 14), fh)) &= ((2, 1), cde), & \alpha(((\emptyset, 2), g)) &= ((\emptyset, 2), ab), & \alpha(((3, 14), h)) &= ((3, \emptyset), ac), \\ \alpha(((G, G), M)) &= ((G, G), N), & \alpha(((\emptyset, \emptyset), \emptyset)) &= ((\emptyset, \emptyset), \emptyset). \end{aligned}$$

由定义 6 可知, $L_{AEP}(G, M, I)$ 细于 $L_{AEP}(G, N, J)$, 即 $L_{AEP}(G, M, I) \leq L_{AEP}(G, N, J)$.

表 1 例 1 中的决策形式背景 (G, M, I, N, J)

Table 1 Formal decision context (G, M, I, N, J) in example 1

G	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	1	1	1	0	1	1	0
2	0	0	1	1	1	1	0	1
3	1	0	1	0	0	0	0	1
4	0	1	0	1	0	1	1	0

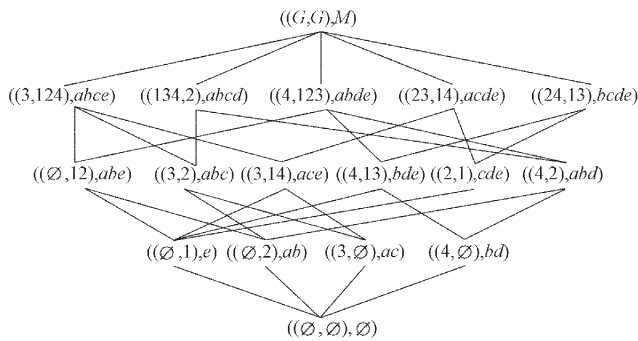


图 1 属性导出三支面向属性概念格 $L_{AEP}(G, M, I)$
Fig. 1 Attribute-induced three-way property-oriented concept lattice $L_{AEP}(G, M, I)$

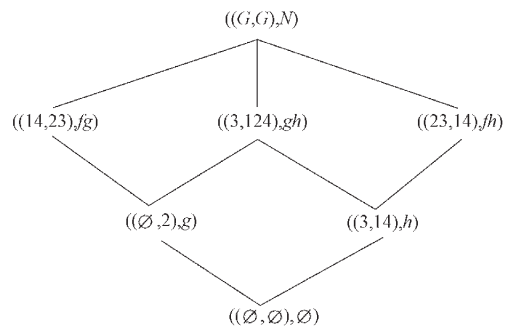


图 2 属性导出三支面向属性概念格 $L_{AEP}(G, N, J)$
Fig. 2 Attribute-induced three-way property-oriented concept lattice $L_{AEP}(G, N, J)$

下面进一步研究三支面向属性弱协调与面向属性弱协调之间的联系.

定义 8 设 (G, M, I, N, J) 为决策形式背景, 对任意的 $(Y, C) \in L_P(G, N, J)$, 若存在 $(X, B) \in L_P(G, M, I)$, 使得 $X \subseteq Y$, 则称 $L_P(G, M, I)$ 细于 $L_P(G, N, J)$, 记作 $L_P(G, M, I) \leq L_P(G, N, J)$, 并称决策形式背景 (G, M, I, N, J) 是面向属性弱协调的.

例 2 例 1 中决策形式背景 (G, M, I, N, J) 的两个面向属性概念格 $L_P(G, M, I)$ 和 $L_P(G, N, J)$ 分别如图 3 和图 4 所示. 在决策形式背景 (G, M, I, N, J) 中, 对 $(23, fh) \in L_P(G, N, J)$, 有 $(2, cde) \in L_P(G, M, I)$, 满足 $\{2\} \subseteq \{23\}$; 对 $(3, h) \in L_P(G, N, J)$, 有 $(3, ac) \in L_P(G, M, I)$, 满足 $\{3\} \subseteq \{3\}$; 对 $(14, fg) \in L_P(G, N, J)$, 有 $(4, bd) \in L_P(G, M, I)$, 满足 $\{4\} \subseteq \{14\}$; 对 $(G, N) \in L_P(G, N, J)$, 有

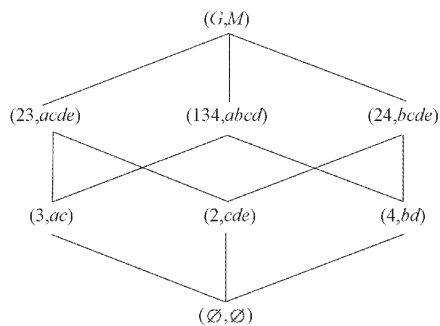


图 3 面向属性概念格 $L_P(G, M, I)$
Fig. 3 Property-oriented concept lattice $L_P(G, M, I)$

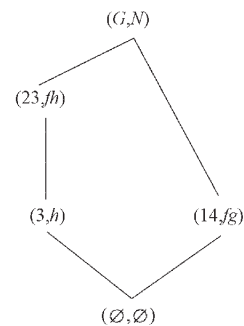


图 4 面向属性概念格 $L_P(G, N, J)$
Fig. 4 Property-oriented concept lattice $L_P(G, N, J)$

$(G, M) \in L_P(G, M, I)$, 满足 $G \subseteq G$; 对 $(\emptyset, \emptyset) \in L_P(G, N, J)$, 有 $(\emptyset, \emptyset) \in L_P(G, M, I)$, 满足 $\emptyset \subseteq \emptyset$. 由定义 8 可知, $L_P(G, M, I)$ 细于 $L_P(G, N, J)$, 即 $L_P(G, M, I) \leq L_P(G, N, J)$.

定理 1 设 (G, M, I, N, J) 为决策形式背景, 若 $L_{AEP}(G, M, I) \leq L_{AEP}(G, N, J)$, 则 $L_P(G, M, I) \leq L_P(G, N, J)$.

证明: 对任意的 $(Z, C) \in L_P(G, N, J)$, 由引理 3 可知, 存在保并序嵌入 $\gamma: L_P(G, N, J) \rightarrow L_{AEP}(G, N, J)$, 使得 $\gamma(Z, C) = ((Z, C^{\bar{\square}_J}), C) \in L_{AEP}(G, N, J)$. 又因为 $L_{AEP}(G, M, I) \leq L_{AEP}(G, N, J)$, 因此由定义 7 知, 对 $((Z, C^{\bar{\square}_J}), C) \in L_{AEP}(G, N, J)$, 存在 $((X, Y), B) \in L_{AEP}(G, M, I)$ 且 $X \subseteq Z, Y \subseteq C^{\bar{\square}_J}$. 又由引理 2 可知, 存在 $(X, X^\diamond) \in L_P(G, M, I)$. 对任意的 $(Z, C) \in L_P(G, N, J)$, 存在 $(X, X^\diamond) \in L_P(G, M, I)$ 且满足 $X \subseteq Z$, 由定义 8 知, $L_P(G, M, I) \leq L_P(G, N, J)$. 证毕.

根据定义 7 和定理 1, 以下推论成立.

推论 1 若决策形式背景 (G, M, I, N, J) 是三支面向属性弱协调的, 则其也是面向属性弱协调的.

2.2 规则获取与性质

下面研究三支面向属性弱协调决策形式背景 (G, M, I, N, J) 的规则提取.

定义 9 设 (G, M, I, N, J) 为三支面向属性弱协调决策形式背景, 若对任意的既非顶元、也非底元的 $((X, Y), B) \in L_{AEP}(G, M, I), ((Z, W), C) \in L_{AEP}(G, N, J)$, 满足 $(X, Y) \subseteq (Z, W)$, 即 $X \subseteq Z, Y \subseteq W$, 则称 $B \rightarrow C$ 是一个属性导出三支面向属性规则, 其中 B 称为 $B \rightarrow C$ 的前件, C 称为 $B \rightarrow C$ 的结论.

由 $B^\nabla = (X, Y) \subseteq (Z, W) = C^\nabla$ 知, 对任意的 $(x, y) \in (X, Y)$, 若对象 x 部分具有属性集 B , 则对象 x 部分也具有属性集 C , 且若对象 y 部分不具有属性集 B , 则对象 y 部分也不具有属性集 C .

为方便表达, 本文将属性导出三支面向属性规则简称为三支面向属性规则, 规则的全体记为 \mathcal{R}_{AEP} . 对于条件属性集的子集 $T \subseteq M, (G, T, I_T, N, J)$ 中的三支面向属性规则全体记为 \mathcal{R}_{AEP}^T .

性质 1 设 (G, M, I, N, J) 为三支面向属性弱协调决策形式背景. 若属性集 $T \subseteq M$, 则对任意的 $A \rightarrow B \in \mathcal{R}_{AEP}^T$, 存在 $C \rightarrow B \in \mathcal{R}_{AEP}$, 满足 $A \subseteq C$.

证明: 假设 $A \rightarrow B \in \mathcal{R}_{AEP}^T$, 由定义 9 知, 存在 $((X, Y), A) \in L_{AEP}(G, T, I_T), ((Z, W), B) \in L_{AEP}(G, N, J)$, 满足 $(X, Y) \subseteq (Z, W)$, 即 $X \subseteq Z, Y \subseteq W$. 又因为 $T \subseteq M$, 即 $L_{AEP}(G, T, I_T)$ 的外延集合包含于 $L_{AEP}(G, M, I)$, 因此 $((X, Y), X^{\diamond_I} \cup Y^{\bar{\square}_I}) \in L_{AEP}(G, M, I)$. 由定义 4 知, 有

$$A = X^{\diamond_I} \cup Y^{\bar{\square}_I} = T \cap (X^{\diamond_I} \cup Y^{\bar{\square}_I}) \subseteq X^{\diamond_I} \cup Y^{\bar{\square}_I},$$

令 $C = X^{\diamond_I} \cup Y^{\bar{\square}_I}$, 则 $C \rightarrow B \in \mathcal{R}_{AEP}$, 满足 $A \subseteq C$. 证毕.

性质 1 表明在 (G, T, I_T, N, J) 中若存在规则 $A \rightarrow B$, 则在 (G, M, I, N, J) 中一定可找到一个规则结论为 B , 且规则前件包含 A 的三支面向属性规则 $C \rightarrow B$.

非冗余规则不包含不必要的规则或重复规则, 能减少规则数量, 同时保留必要的信息. 文献[23]基于三支面向属性强协调性定义了三支面向属性非冗余决策规则, 本文借鉴文献[23], 给出非冗余属性导出三支面向属性规则.

定义 10 设 (G, M, I, N, J) 为三支面向属性弱协调决策形式背景, 对任意的两个三支面向属性规则 $B \rightarrow C$ 和 $B' \rightarrow C'$, 若满足 $B \supseteq B', C' \supseteq C$, 则称规则 $B \rightarrow C$ 蕴含规则 $B' \rightarrow C'$, 记为 $B \rightarrow C \Rightarrow B' \rightarrow C'$, 并称规则 $B' \rightarrow C'$ 是冗余的, $B \rightarrow C$ 是非冗余的.

为方便表达, 本文将非冗余属性导出三支面向属性规则简称为非冗余三支面向属性规则, 规则的全体记为 $\tilde{\mathcal{R}}_{AEP}$.

根据定义 10 可给出非冗余三支面向属性规则的等价刻画.

定理 2 设 (G, M, I, N, J) 为三支面向属性弱协调决策形式背景, 对任意的 $((X, Y), B) \in L_{AEP}(G, M, I), ((Z, W), C) \in L_{AEP}(G, N, J)$, $B \rightarrow C \in \mathcal{R}_{AEP}$, $B \rightarrow C$ 是非冗余三支面向属性规则, 当且仅当不存在 $((X_1, Y_1), B_1) \in L_{AEP}(G, M, I), ((Z_1, W_1), C_1) \in L_{AEP}(G, N, J)$, 使得 $(X, Y) \subset (X_1, Y_1) \subseteq (Z, W)$ 且 $(X, Y) \subseteq (Z_1, W_1) \subset (Z, W)$.

证明: 充分性. 用反证法. 假设存在 $((X_1, Y_1), B_1) \in L_{AEP}(G, M, I)$, 使得 $(X, Y) \subset (X_1, Y_1) \subseteq$

(Z, W) , 则 $B_1 \rightarrow C \in \mathcal{R}_{AEP}$. 又因为 $(X, Y)^\Delta \subseteq (X_1, Y_1)^\Delta$, 即 $B \subseteq B_1$, 因此由定义 10 知 $B_1 \rightarrow C \Rightarrow B \rightarrow C$, $B \rightarrow C$ 是冗余的. 同理, 若存在 $((Z_1, W_1), C_1) \in L_{AEP}(G, N, J)$, 使得 $(X, Y) \subseteq (Z_1, W_1) \subseteq (Z, W)$, 则 $B \rightarrow C_1 \Rightarrow B \rightarrow C$, 可知 $B \rightarrow C$ 也是冗余的. 因此, 当不存在 $((X_1, Y_1), B_1) \in L_{AEP}(G, M, I)$, $((Z_1, W_1), C_1) \in L_{AEP}(G, N, J)$, 使得 $(X, Y) \subset (X_1, Y_1) \subseteq (Z, W)$ 且 $(X, Y) \subseteq (Z_1, W_1) \subset (Z, W)$ 时, $B \rightarrow C$ 为非冗余三支面向属性规则.

必要性. 用反证法. 假设 $B \rightarrow C \in \mathcal{R}_{AEP}$ 是冗余的, 则由定义 10 知, 存在 $((X_1, Y_1), B_1) \in L_{AEP}(G, M, I)$ 和 $((Z_1, W_1), C_1) \in L_{AEP}(G, N, J)$, 使得 $B_1 \rightarrow C_1 \in \mathcal{R}_{AEP}$, 满足 $B_1 \rightarrow C_1 \Rightarrow B \rightarrow C$, 且 $B_1 \supseteq B, C \supseteq C_1$, 由定义 4 知 $B_1^\nabla \supseteq B^\nabla, C^\nabla \supseteq C_1^\nabla$, 即 $(X, Y) \subseteq (X_1, Y_1), (Z_1, W_1) \subseteq (Z, W)$. 又因为 $B \rightarrow C$ 与 $B_1 \rightarrow C_1$ 是不相同的, 则有 $(X, Y) \subset (X_1, Y_1) \subseteq (Z_1, W_1) \subseteq (Z, W)$ 或者 $(X, Y) \subseteq (X_1, Y_1) \subseteq (Z_1, W_1) \subset (Z, W)$.

综上所述, $B \rightarrow C$ 是非冗余三支面向属性规则当且仅当不存在 $((X_1, Y_1), B_1) \in L_{AEP}(G, M, I)$, $((Z_1, W_1), C_1) \in L_{AEP}(G, N, J)$, 使得 $(X, Y) \subset (X_1, Y_1) \subseteq (Z, W)$ 且 $(X, Y) \subseteq (Z_1, W_1) \subset (Z, W)$. 证毕.

根据定理 2, 可给出获取三支面向属性弱协调决策形式背景的非冗余三支面向属性规则的步骤如下:

1) 分别计算条件子背景和决策子背景下的属性导出三支面向属性概念 $L_{AEP}(G, M, I)$ 和 $L_{AEP}(G, N, J)$;

2) 判定决策形式背景是否为三支面向属性弱协调决策形式背景, 若满足则继续执行步骤 3), 否则终止运算;

3) 计算三支面向属性规则集 \mathcal{R}_{AEP} ;

4) 判定每个 $B \rightarrow C \in \mathcal{R}_{AEP}$ 是否冗余, 若满足定理 2 中条件, 则 $\tilde{\mathcal{R}}_{AEP} = \mathcal{R}_{AEP} \cap \{B \rightarrow C\}$;

5) 输出非冗余三支面向属性规则集 $\tilde{\mathcal{R}}_{AEP}$.

例 3 利用上述步骤获取非冗余三支面向属性规则, 则例 1 中决策形式背景 (G, M, I, N, J) 的三支面向属性规则集 \mathcal{R}_{AEP} 与非冗余三支面向属性规则集 $\tilde{\mathcal{R}}_{AEP}$ 如表 2 所示.

表 2 三支面向属性规则集 \mathcal{R}_{AEP} 与非冗余三支面向属性规则集 $\tilde{\mathcal{R}}_{AEP}$

\mathcal{R}_{AEP}	$\tilde{\mathcal{R}}_{AEP}$
$abd \rightarrow fg, ab \rightarrow fg, bd \rightarrow fg, abce \rightarrow gh, ace \rightarrow gh, abc \rightarrow gh, abe \rightarrow gh, ac \rightarrow gh, ab \rightarrow gh,$	$abd \rightarrow fg, abce \rightarrow gh$
$e \rightarrow gh, acde \rightarrow fh, ace \rightarrow fh, cde \rightarrow fh, ac \rightarrow fh, e \rightarrow fh, ace \rightarrow h, ac \rightarrow h, ab \rightarrow g, e \rightarrow h$	$acde \rightarrow fh, ace \rightarrow h, ab \rightarrow g$

3 三支面向属性规则与面向属性规则的关系

属性导出三支面向属性概念格相比传统的面向属性概念格, 从对象和属性间“部分不具有”关系对规则进一步补充, 丰富规则语义, 使规则更完整.

3.1 基于决策形式背景的两属性规则关系

先基于定义 8 给出面向属性规则的定义.

定义 11 设 (G, M, I, N, J) 为面向属性弱协调决策形式背景, 若对任意的既非顶元也非底元的 $(X, B) \in L_P(G, M, I), (Y, C) \in L_P(G, N, J)$, 有 $X \subseteq Y$, 则 $B \rightarrow C$ 称为一个面向属性规则, 其中 B 称为 $B \rightarrow C$ 的前件, C 称为 $B \rightarrow C$ 的结论.

用 \mathcal{R}_P 表示决策形式背景 (G, M, I, N, J) 上所有的面向属性规则, 用 \mathcal{R}_P^c 表示决策形式背景 (G, M, I^c, N, J^c) 上所有的面向属性规则. 下面研究三支面向属性规则与面向属性规则之间的内在联系.

定理 3 设 (G, M, I, N, J) 为三支面向属性弱协调决策形式背景, 则对任意的 $B_1 \rightarrow C \in \mathcal{R}_P$, 存在 B_2 , 使得 $B_2 \rightarrow C \in \mathcal{R}_{AEP}$.

证明: 对任意的 $B_1 \rightarrow C \in \mathcal{R}_P$, 由定义 11 知, 存在 $(X, B_1) \in L_P(G, M, I), (Y, C) \in L_P(G, N, J)$, 满足 $X \subseteq Y$. 由引理 3 知, 存在保并序嵌入 η , 使得 $\eta(Y, C) = ((Y, C^{\square_J}), C) \in L_{AEP}(G, N, J)$. 又因为

$L_{\text{AEP}}(G, M, I) \leq L_{\text{AEP}}(G, N, J)$, 故由定义 7 知, 存在 $((Z, W), B_2) \in L_{\text{AEP}}(G, M, I)$, 满足 $(Z, W) \subseteq (Y, C^{\square_J})$. 由定义 11 知 $B_2 \rightarrow C \in \mathcal{R}_{\text{AEP}}$. 证毕.

定理 4 设 (G, M, I, N, J) 为三支面向属性弱协调决策形式背景, 则对任意的 $B_1 \rightarrow C_1 \in \mathcal{R}_{\text{AEP}}$, 存在 $B_2 \rightarrow C_2 \in \mathcal{R}_P$, 满足 $B_2 \subseteq B_1, C_2 \subseteq C_1$.

证明: 对任意的 $B_1 \rightarrow C_1 \in \mathcal{R}_{\text{AEP}}$, 由定义 9 可知, 存在 $((X, Y), B_1) \in L_{\text{AEP}}(G, M, I), ((Z, W), C_1) \in L_{\text{AEP}}(G, N, J)$, 满足 $(X, Y) \subseteq (Z, W)$. 由引理 2 知, 存在面向属性概念 $(X, X^{\diamond_I}) \in L_P(G, M, I), (Z, Z^{\diamond_J}) \in L_P(G, N, J)$. 又因为 $X \subseteq Z$, 故由定义 11 可知, $X^{\diamond_I} \rightarrow Z^{\diamond_J} \in \mathcal{R}_P$, 令 $B_2 = X^{\diamond_I}, C_2 = Z^{\diamond_J}$, 即 $B_2 \rightarrow C_2 \in \mathcal{R}_P$. 由定义 4 知, $B_1 = X^{\diamond_I} \cup Y^{\overline{\diamond_I}} = B_2 \cup Y^{\overline{\diamond_I}}, C_1 = Z^{\diamond_J} \cup W^{\overline{\diamond_J}} = C_2 \cup W^{\overline{\diamond_J}}$, 则易知 $B_2 \subseteq B_1$ 且 $C_2 \subseteq C_1$. 即对任意的 $B_1 \rightarrow C_1 \in \mathcal{R}_{\text{AEP}}$, 存在 $B_2 \rightarrow C_2 \in \mathcal{R}_P$, 满足 $B_2 \subseteq B_1, C_2 \subseteq C_1$. 证毕.

定理 3 从面向属性规则角度出发, 对任意面向属性规则, 一定可找到一个三支面向属性规则, 其中规则结论与面向属性规则相同; 定理 4 从三支面向属性规则角度出发, 对任意三支面向属性规则, 一定可找到一个面向属性规则, 其中规则前件与结论都包含于三支面向属性规则. 这两个定理表明三支面向属性规则蕴含的信息更丰富, 保留了不确定性, 充分挖掘了潜在知识, 更有利于决策分析.

3.2 基于决策形式背景补背景的两属性规则关系

三支决策的引入使规则不仅可表达“肯定性信息”, 也能表达“否定性信息”. 下面从决策形式背景的补背景出发, 考虑属性导出三支面向属性概念中对象与属性间“部分不具有”部分, 进一步研究两种属性规则之间的内在联系.

定理 5 设 (G, M, I, N, J) 为决策形式背景, (G, M, I^c, N, J^c) 为其补背景. 若 $L_{\text{AEP}}(G, M, I) \leq L_{\text{AEP}}(G, N, J)$, 则 $L_P(G, M, I^c) \leq L_P(G, N, J^c)$.

证明: 对任意的 $(Z, C) \in L_P(G, N, J^c)$, 由引理 3 知, 存在保并序嵌入 $\lambda: L_P(G, N, J^c) \rightarrow L_{\text{AEP}}(G, N, J)$, 使得 $\lambda(Z, C) = ((C^{\square_J}, Z), C) \in L_{\text{AEP}}(G, N, J)$. 又因为 $L_{\text{AEP}}(G, M, I) \leq L_{\text{AEP}}(G, N, J)$, 故由定义 7 知, 对任意的 $((C^{\square_J}, Z), C) \in L_{\text{AEP}}(G, N, J)$, 存在 $((X, Y), B) \in L_{\text{AEP}}(G, M, I)$, 满足 $X \subseteq C^{\square_J}, Y \subseteq Z$, 又由引理 2 可知, 存在 $(Y, Y^{\diamond}) \in L_P(G, M, I^c)$. 即对任意的 $(Z, C) \in L_P(G, N, J^c)$, 存在 $(Y, Y^{\diamond}) \in L_P(G, M, I^c)$, 满足 $Y \subseteq Z$, 则 $L_P(G, M, I^c) \leq L_P(G, N, J^c)$. 证毕.

根据定义 7 和定理 5 知以下推论成立.

推论 2 若决策形式背景 (G, M, I, N, J) 是三支面向属性弱协调的, 则决策形式背景补背景是面向属性弱协调的.

定理 6 设 (G, M, I, N, J) 为三支面向属性弱协调决策形式背景, 则对任意的 $B_1 \rightarrow C \in \mathcal{R}_P^c$, 存在 B_2 , 使得 $B_2 \rightarrow C \in \mathcal{R}_{\text{AEP}}$.

证明: 对任意的 $B_1 \rightarrow C \in \mathcal{R}_P^c$, 由定义 11 知, 存在 $(X, B_1) \in L_P(G, M, I^c), (Y, C) \in L_P(G, N, J^c)$, 满足 $X \subseteq Y$. 由引理 3 知, 存在保并序嵌入 $\sigma: L_P(G, N, J^c) \rightarrow L_{\text{AEP}}(G, N, J)$, 使得 $\sigma(Y, C) = ((C^{\square_J}, Y), C) \in L_{\text{AEP}}(G, N, J)$, 又因为 $L_{\text{AEP}}(G, M, I) \leq L_{\text{AEP}}(G, N, J)$, 故由定义 7 知, 存在 $((Z, W), B_2) \in L_{\text{AEP}}(G, M, I)$, 满足 $(Z, W) \subseteq (C^{\square_J}, Y)$, 即 $B_2 \rightarrow C \in \mathcal{R}_{\text{AEP}}$. 证毕.

定理 7 设 (G, M, I, N, J) 为三支面向属性弱协调决策形式背景, 则对任意的 $B_1 \rightarrow C_1 \in \mathcal{R}_{\text{AEP}}$, 存在 $B_2 \rightarrow C_2 \in \mathcal{R}_P^c$, 满足 $B_2 \subseteq B_1, C_2 \subseteq C_1$.

证明: 对任意的 $B_1 \rightarrow C_1 \in \mathcal{R}_{\text{AEP}}$, 由定义 9 知, 有 $((X, Y), B_1) \in L_{\text{AEP}}(G, M, I), ((Z, W), C_1) \in L_{\text{AEP}}(G, N, J)$, 满足 $(X, Y) \subseteq (Z, W)$, 即 $X \subseteq Z, Y \subseteq W$. 由引理 2 知, 存在 $(Y, Y^{\overline{\diamond_I}}) \in L_P(G, M, I^c), (W, W^{\overline{\diamond_J}}) \in L_P(G, N, J^c)$. 因为 $Y \subseteq W$, 故由定义 11 知, $Y^{\overline{\diamond_I}} \rightarrow W^{\overline{\diamond_J}} \in \mathcal{R}_P^c$, 令 $B_2 = Y^{\overline{\diamond_I}}, C_2 = W^{\overline{\diamond_J}}$, 即 $B_2 \rightarrow C_2 \in \mathcal{R}_P^c$. 由定义 4 知, $B_1 = X^{\diamond_I} \cup Y^{\overline{\diamond_I}} = X^{\diamond_I} \cup B_2, C_1 = Z^{\diamond_J} \cup W^{\overline{\diamond_J}} = Z^{\diamond_J} \cup C_2$, 易知 $B_2 \subseteq B_1, C_2 \subseteq C_1$. 即对任意的 $B_1 \rightarrow C_1 \in \mathcal{R}_{\text{AEP}}$, 存在 $B_2 \rightarrow C_2 \in \mathcal{R}_P^c$, 满足 $B_2 \subseteq B_1, C_2 \subseteq C_1$. 证毕.

根据定理 4 和定理 7 可知以下推论成立.

推论 3 设 (G, M, I, N, J) 是决策形式背景, 若决策形式背景满足 $L_{\text{AEP}}(G, M, I) \leq L_{\text{AEP}}(G, N, J)$, 则对任意的 $A \rightarrow B \in \mathcal{R}_{\text{AEP}}$, 存在 $A_1 \rightarrow B_1 \in \mathcal{R}_P$ 或 $A_2 \rightarrow B_2 \in \mathcal{R}_P^c$, 使得 $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$ 或 $A_2 \subseteq A, B_2 \subseteq B$.

推论 3 表明, 对于任意三支面向属性规则, 总能在决策形式背景或者其补背景下提取的规则中找到一个更小的面向属性规则, 其规则前件和结论都包含于三支面向属性规则, 进一步说明了三支面向属性规则表达的全面性.

4 实例分析

为进一步验证本文提出的三支面向属性规则的有效性, 并更直观地展示其在实际应用中的优势, 下面利用文献[24]中国港口危险品实例进行分析, 考虑三支面向属性规则的实际应用效果, 以验证其合理性和适用性.

表 3 为中国港口危险品事故分析的决策形式背景 (G, M, I, N, J) , 其中: $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 表示 8 起港口危险品事故; $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, 表示危险品事故发生因素, a 为人员专业性, b 为操作规范, c 为仓库储存, d 为企业经营, e 为监督管理, f 为设施和设备, g 为应急管理, h 为货物登记, i 为自然因素; I 为对象和条件属性之间的二元关系, 0 表示港口事故的影响因素合格, 1 表示不合格; $N = \{l, m, n\}$ 表示事故类型, l 为火灾, m 为爆炸, n 为泄露; J 为对象与决策属性之间的二元关系, 0 表示未发生该事故, 1 表示发生该事故. 易知该决策形式背景 (G, M, I, N, J) 是三支面向属性弱协调的, 也是面向属性弱协调的, 补背景 (G, M, I^c, N, J^c) 是面向属性弱协调的. 因此本文提出的理论适用于该实际应用, 对决策形式背景进行规则提取, $\mathcal{R}_P, \mathcal{R}_P^c, \mathcal{R}_{AEP}$ 如表 4 所示, $\tilde{\mathcal{R}}_P, \tilde{\mathcal{R}}_P^c, \tilde{\mathcal{R}}_{AEP}$ 如表 5 所示. 利用文献[18]方法提取的非冗余决策规则集 $\tilde{\mathcal{R}}, \tilde{\mathcal{R}}^c$ 及三支非冗余决策规则集 $\tilde{\mathcal{R}}_{AE}$ 如表 6 所示.

表 3 决策形式背景 (G, M, I, N, J)

Table 3 Formal decision context (G, M, I, N, J)

G	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
4	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
5	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1
6	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1

表 4 三类决策规则集 $\mathcal{R}_P, \mathcal{R}_P^c, \mathcal{R}_{AEP}$

Table 4 Three types of decision rules set $\mathcal{R}_P, \mathcal{R}_P^c, \mathcal{R}_{AEP}$

\mathcal{R}_P	\mathcal{R}_P^c	\mathcal{R}_{AEP}
$g \rightarrow n, dg \rightarrow n,$ $cegh \rightarrow n, cdegh \rightarrow n,$ $abe \rightarrow lm, abd \rightarrow lm,$ $g \rightarrow mn, cegh \rightarrow mn,$ $dg \rightarrow mn, cdegh \rightarrow mn$	$ci \rightarrow l, h \rightarrow n, ci \rightarrow lm,$ $abdfi \rightarrow lm, ci \rightarrow ln,$ $h \rightarrow ln, cfi \rightarrow ln,$ $cfhi \rightarrow ln, cdfghi \rightarrow ln,$ $cefghi \rightarrow ln, cdefghi \rightarrow ln$	$ci \rightarrow l, dg \rightarrow n, h \rightarrow n, cegh \rightarrow n, cdegh \rightarrow n,$ $ci \rightarrow lm, abe \rightarrow lm, abd \rightarrow lm, abdfi \rightarrow lm, h \rightarrow mn,$ $dg \rightarrow mn, cegh \rightarrow mn, cdegh \rightarrow mn, dg \rightarrow ln,$ $cegh \rightarrow ln, cdegh \rightarrow ln, ci \rightarrow ln, h \rightarrow ln, cfi \rightarrow ln,$ $cfhi \rightarrow ln, cdfghi \rightarrow ln, cefghi \rightarrow ln, cdefghi \rightarrow ln$

表 5 三类非冗余决策规则集 $\tilde{\mathcal{R}}_P, \tilde{\mathcal{R}}_P^c, \tilde{\mathcal{R}}_{AEP}$

Table 5 Three types of non-redundant decision rules set $\tilde{\mathcal{R}}_P, \tilde{\mathcal{R}}_P^c, \tilde{\mathcal{R}}_{AEP}$

$\tilde{\mathcal{R}}_P$	$\tilde{\mathcal{R}}_P^c$	$\tilde{\mathcal{R}}_{AEP}$
$cdegh \rightarrow n, abe \rightarrow lm$ $abd \rightarrow lm$	$ci \rightarrow l, h \rightarrow n,$ $abdfi \rightarrow lm, cdefghi \rightarrow ln$	$ci \rightarrow l, cdegh \rightarrow n, abe \rightarrow lm,$ $abdfi \rightarrow lm, cdefghi \rightarrow ln, cdegh \rightarrow mn$

表 6 三类非冗余决策规则集 $\tilde{\mathcal{R}}, \tilde{\mathcal{R}}^c, \tilde{\mathcal{R}}_{AE}$

Table 6 Three types of non-redundant decision rules set $\tilde{\mathcal{R}}, \tilde{\mathcal{R}}^c, \tilde{\mathcal{R}}_{AE}$

$\tilde{\mathcal{R}}$	$\tilde{\mathcal{R}}^c$	$\tilde{\mathcal{R}}_{AE}$
$cdfghi \rightarrow n, cefghi \rightarrow n,$ $abcdefhi \rightarrow lm$	$abcdefgi \rightarrow lm, cegh \rightarrow n,$ $abdefgh \rightarrow mn$	$abcdefgi \rightarrow l, abcdefhi \rightarrow l, cdfghi \rightarrow n,$ $cefghi \rightarrow n, abcdefhi \rightarrow lm, abdefgh \rightarrow mn$

对表 5 和表 6 中的非冗余决策规则集进行逐类对比分析, 即将规则集 $\tilde{\mathcal{R}}_P$ 与规则集 $\tilde{\mathcal{R}}$ 进行比较, 规则集 $\tilde{\mathcal{R}}_P$ 与规则集 $\tilde{\mathcal{R}}^c$ 进行比较, 规则集 $\tilde{\mathcal{R}}_{AEP}$ 与规则集 $\tilde{\mathcal{R}}_{AF}$ 进行比较. 结果表明, 引入面向属性概念后, 提取得到的面向属性规则以及三支面向属性规则的规则前件更少, 且通过提取的规则能直接定位更重要的影响因素, 对相关因素进行排查, 进而节省排除事故因素所需时间. 下面进一步分析本文提出的面向属性规则以及三支面向属性规则在港口实例中的应用效果.

分析表 4 和表 5 可知, \mathcal{R}_P 中的规则能解释“正信息”. 例如, 规则 $abd \rightarrow lm \in \mathcal{R}_P$, 表示若人员专业性不合格或操作不规范或企业经营不合格, 则会导致火灾或爆炸, 即为避免火灾或爆炸, 需要保证人员的专业性、操作规范以及企业经营均合格. 条件子背景补背景取值为 1, 即影响因素不合格, 等价于条件子背景取值为 0, 即影响因素合格, 因此 \mathcal{R}_P 中规则能解释“负信息”. 例如, 规则 $ci \rightarrow ln \in \mathcal{R}_P$, 表示若仓库储存合格或自然因素不影响, 则火灾不会发生或危险品不会泄露, 因此为防止火灾和危险品泄露, 需保证仓库储存合格并预防自然因素造成的影响.

\mathcal{R}_{AEP} 中规则可以从“正信息”和“负信息”对实际场景进行考虑, 例如取 \mathcal{R}_{AEP} 中规则 $abd \rightarrow lm$, 即人员专业性不合格或操作不规范或企业经营不合格, 会导致火灾或爆炸; 同时, 若人员专业性合格或操作规范合格或企业经营合格, 则不会发生火灾或爆炸. 因此, 为预防发生火灾或爆炸事故, 需对人员的专业性、操作规范、企业经营进行严格控制.

对于 $abd \rightarrow lm, abdfi \rightarrow lm \in \mathcal{R}_{AEP}$, 由定义 10 知, $abd \rightarrow lm$ 是冗余的, $abdfi \rightarrow lm$ 是非冗余的, 即针对火灾和爆炸问题, 需对人员的专业性、操作规范、企业经营、设施与设备、自然因素都做好相应的预防措施. 因此, 通过非冗余三支面向属性规则, 知识表达更丰富、精准, 在决策时可找到所有可能的影响因素, 做好预防, 减少事故发生.

对于 \mathcal{R}_{AEP} 中规则, 可以在 \mathcal{R}_P 在 \mathcal{R}_P^c 中找到一个更小的规则, 并且 \mathcal{R}_{AEP} 中规则涵盖了 \mathcal{R}_P 和 \mathcal{R}_P^c 中规则的所有结果, 反之则不一定. 可见, 三支面向属性规则更全面, 语义更丰富, 能精细刻画数据中的信息, 从而更全面地表达决策知识. 并且三支面向属性规则在实际应用中适应性较强, 特别适用于类似港口危险品风险评估, 或者应急响应或医疗诊断等决策环境, 可以在多种数据场景下进行知识发现, 提高规则的可解释性和决策效率.

实例分析结果表明, 三支面向属性规则在实际应用中优势显著, 本文提出的三支面向属性决策规则合理且有效.

综上所述, 本文研究了属性导出三支面向属性概念格的规则提取问题. 首先, 针对实际应用中大部分决策形式背景为非强协调决策形式背景的情况, 定义了属性导出三支面向属性弱协调, 并将其与面向属性弱协调进行对比分析; 其次, 提出了基于属性导出三支面向属性概念格的规则提取方法, 并对非冗余规则进行了刻画; 再次, 从决策形式背景及其补背景两方面, 研究了属性导出三支面向属性规则与面向属性规则之间的联系; 最后通过实例分析验证了本文方法的有效性.

参 考 文 献

- [1] WILLE R. Restructuring Lattice Theory: An Approach Based on Hierarchies of Concepts [C]//Ordered Sets. Dordrecht: Reidel, 1982: 445-470.
- [2] GANTER B, WILLE R. Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations [M]. New York: Springer-Verlag, 1999: 1-281.
- [3] DÜNTSCH I, GEDIGA G. Modal-Style Operators in Qualitative Data Analysis [C]//Proceedings of the 2nd IEEE International Conference on Data Mining. Washington, D. C. : IEEE, 2002: 155-162.
- [4] YAO Y Y. A Comparative Study of Formal Concept Analysis and Rough Set Theory in Data Analysis [C]//Rough Sets and Current Trends in Computing. Berlin: Springer, 2004: 59-68.
- [5] YAO Y Y. Three-Way Decision: An Interpretation of Rules in Rough Set Theory [C]//Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Berlin: Springer, 2009: 642-649.
- [6] QI J J, WEI L, YAO Y Y. Three-Way Formal Concept Analysis [C]//International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Berlin: Springer, 2014: 732-741.

- [7] QIAN T, WEI L, QI J J. Constructing Three-Way Concept Lattices Based on Apposition and Subposition of Formal Contexts [J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 116(C): 39-48.
- [8] WEI L, QIAN T. The Three-Way Object Oriented Concept Lattice and the Three-Way Property Oriented Concept Lattice [C]//Proceeding of the 2015 International Conference on Machine Learning and Cybernetics. [S. l.]: IEEE, 2015: 854-859.
- [9] QIAN T, WEI L, QI J J. A Theoretical Study on the Object (Property) Oriented Concept Lattices Based on Three-Way Decisions [J]. Soft Computing, 2019, 23: 9477-9489.
- [10] 张文修, 魏玲, 祁建军. 概念格的属性约简理论与方法 [J]. 中国科学(E辑: 信息科学), 2005, 35(6): 628-639. (ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute Reduction Theory and Approach to Concept Lattice [J]. Science in China (Series E: Information Sciences), 2005, 35(6): 628-639.)
- [11] 魏玲, 祁建军, 张文修. 决策形式背景的概念格属性约简 [J]. 中国科学(E辑: 信息科学), 2008, 38(2): 195-208. (WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute Reduction Theory of Concept Lattice Based on Decision Formal Contexts [J]. Science in China (Series E: Information Sciences), 2008, 38(2): 195-208.)
- [12] MAO H, MIAO H R. Attribute Reduction Based on Directed Graph in Formal Fuzzy Contexts [J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2018, 34(6): 4139-4148.
- [13] 张文修, 仇国芳. 基于粗糙集的不确定决策 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 202-203. (ZHANG W X, QIU G F. Uncertain Decision Making Based on Rough Sets [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 202-203.)
- [14] 王一帆, 金铭, 张琴, 等. 基于概念约简的强协调决策形式背景的规则提取 [J]. 山东大学学报(理学版), 2025, 60(1): 83-90. (WANG Y F, JIN M, ZHANG Q, et al. Rule Acquisition Based on Concept Reduction in Strongly Consistent Formal Decision Context [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2025, 60(1): 83-90.)
- [15] 姜玉婷, 秦克云. 决策形式背景面向属性与面向对象的决策规则 [J]. 计算机科学, 2018, 45(10): 33-36. (JIANG Y T, QIN K Y. Property-Oriented and Object-Oriented Decision Rules in Decision Formal Contexts [J]. Computer Science, 2018, 45(10): 33-36.)
- [16] 刘琳, 魏玲, 钱婷. 决策形式背景中具有置信度的三支规则提取 [J]. 山东大学学报(理学版), 2017, 52(2): 101-110. (LIU L, WEI L, QIAN T. Three-Way Rules Extraction in Formal Decision Contexts with Confidence [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2017, 52(2): 101-110.)
- [17] WEI L, LIU L, QI J J, et al. Rules Acquisition of Formal Decision Contexts Based on Three-Way Concept Lattices [J]. Information Sciences, 2020, 516(C): 529-544.
- [18] 任睿思, 魏玲, 祁建军. 三支弱协调决策形式背景的规则获取 [J]. 山东大学学报(理学版), 2018, 53(6): 76-85. (REN R S, WEI L, QI J J. Rules Acquisition on Three-Way Weakly Consistent Formal Decision Contexts [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2018, 53(6): 76-85.)
- [19] 牛丽慧, 米据生, 白宇璋. 不完备形式背景中基于 $OE\text{-}cp$ -近似概念的规则提取 [J]. 计算机科学, 2023, 50(10): 7-17. (NIU L H, MI J S, BAI Y Z. Rule Extraction Based on $OE\text{-}cp$ -Approximation Concepts in Incomplete Formal Contexts [J]. Computer Science, 2023, 50(10): 7-17.)
- [20] HUANG J, LIN Y D, LI J J. Rule Reductions of Decision Formal Context Based on Mixed Information [J]. Applied Intelligence, 2023, 53: 15459-15475.
- [21] HU Z Y, SHAO M W, MI J S, et al. Mining Positive and Negative Rules via One-Sided Fuzzy Three-Way Concept Lattices [J/OL]. Fuzzy Sets and Systems, (2024-01-02)[2025-04-25]. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2023.108842>.
- [22] XIE J P, YANG J, LI J H, et al. Three-Way Concept Lattice Construction and Association Rule Acquisition [J/OL]. Information Sciences, (2025-01-08)[2025-03-18]. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2024.121867>.
- [23] 贺晓丽, 柳战英, 钱婷. 三支面向属性概念格的规则提取 [J]. 计算机工程与应用, 2022, 58(19): 152-157. (HE X L, LIU Z Y, QIAN T. Rule Acquisition of Property Oriented Concept Lattice Based on Three-Way Decision [J]. Computer Engineering and Applications, 2022, 58(19): 152-157.)
- [24] CHEN J H, ZHENG H Y, WEI L, et al. Factor Diagnosis and Future Governance of Dangerous Goods Accidents in China's Ports [J/OL]. Environmental Pollution, (2019-11-09)[2025-03-05]. <https://doi.org/10.1016/j.envpol.2019.113582>.

(责任编辑: 赵立芹)