第 64 卷　第 2 期　　吉林大学学报(理学版)　　Vol. 64　No. 2
2026 年 3 月　　Journal of Jilin University (Science Edition)　　Mar　2026

doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2025173

# $n$-Gorenstein FC-投射模及相关的模型结构

仇松林，张翠萍
(西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070)

**摘要**：设 $R$ 是环，$m,n$ 是非负整数，$m\leqslant n$. 证明$(\mathscr{GFC}_m,\mathscr{P}_n,\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{GFC}_n)$是范畴 $\mathscr{GFC}_n$ 中的遗传Hovey 三元组，其对应的同伦范畴是$(\mathscr{GFC}_m\cap\mathscr{P}_m^{\perp})/(\mathscr{P}_m\cap\mathscr{P}_m^{\perp})\simeq\mathscr{GFC}/\mathscr{P}$，其中 $\mathscr{P}_n,\mathscr{GFC}_n$ 分别表示投射维数不超过 $n$ 和 Gorenstein FC 投射维数不超过 $n$ 的模类.

**关键词**：Gorenstein FC-投射模；正合模型结构；余挠对

**中图分类号**：O153.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2026)02-0243-08

# $n$-Gorenstein FC-Projective Modules and Related Model Structures

QIU Songlin, ZHANG Cuiping
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*)

**Abstract**: Let $R$ be a ring, $m$ and $n$ be non-negative integers with $m\leqslant n$. We prove that the triple $(\mathscr{GFC}_m,\mathscr{P}_n,\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{GFC}_n)$ is a hereditary Hovey triple in category $\mathscr{GFC}_n$, the corresponding homotopy category is $(\mathscr{GFC}_m\cap\mathscr{P}_m^{\perp})/(\mathscr{P}_m\cap\mathscr{P}_m^{\perp})\simeq\mathscr{GFC}/\mathscr{P}$, where $\mathscr{P}_n$ is the class of modules of projective dimension $\leqslant n$ and $\mathscr{GFC}_n$ is the class of modules of Gorenstein FC projective dimension $\leqslant n$.

**Keywords**: Gorenstein FC-projective module; exact model structure; cotorsion pair

文献[1]引入了范畴 $\mathscr{A}$ 的模型结构，文献[2]引入了 Hovey 三元组. 设 $\mathscr{A}$ 是正合范畴，$\mathscr{C},\mathscr{W},\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的对象类. 如果$(\mathscr{C}\cap\mathscr{W},\mathscr{F})$，$(\mathscr{C},\mathscr{F}\cap\mathscr{W})$是完备余挠对，$\mathscr{W}$ 是厚的(即 $\mathscr{W}$ 对直和项封闭，在 Admissible 正合序列中，若有两项在 $\mathscr{W}$ 中，则第三项也在 $\mathscr{W}$ 中)，则称$(\mathscr{C},\mathscr{W},\mathscr{F})$是一个 Hovey 三元组. 如果$(\mathscr{C}\cap\mathscr{W},\mathscr{F})$，$(\mathscr{C},\mathscr{F}\cap\mathscr{W})$是遗传的，则$(\mathscr{C},\mathscr{W},\mathscr{F})$是遗传的. 在 Abelian 范畴中，Abelian 模型结构和 Hovey 三元组之间存在一一对应关系[1-2]. Quillen[3]引入了正合范畴. 如果每个可裂单同态有余核或每个可裂满同态有核，则称正合范畴是弱幂等完备的[4]. Gillespie[5]证明了在弱幂等完备正合范畴中，正合模型结构和 Hovey 三元组之间存在一一对应关系.

设 $R$ 是环，$M$ 是左 $R$-模. 如果存在投射模的正合序列 $\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$，且对任意投射左 $R$-模 $P$，$\mathrm{Hom}_R(-,P)$保持序列正合，则称 $M$ 是 Gorenstein 投射的. 如果存在平坦左 $R$-模的正合序列$\cdots\to F_1\to F_0\to F^0\to F^1\to\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(F^0\to F^1)$，且对任意内射右 $R$-模 $E$，$E\otimes_R-$保持序列正合，则称 $M$ 是 Gorenstein 平坦的. 如果存在投射模的正合序列$\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$，且对任意内射右 $R$-模 $E$，$E\otimes_R-$保持序列正合，则称 $M$ 是 PGF 模. 用 $\mathscr{GP},\mathscr{GF},\mathscr{PGF}$ 分别表示上述 3 种模构成的类，$\mathscr{GP}_n$($\mathscr{GP}_n$，$\mathscr{PGF}_n$)表示 Gorenstein 投射(Gorenstein 平坦，$\mathscr{PGF}$)维数不超过 $n$ 的模类. 文献[6]证明了$(\mathscr{GF}_n,\mathscr{PGF}^{\perp},\mathscr{F}_n^{\perp})$是 $R$-模范畴中的遗传 Hovey 三元组. 文献[7]证明了$(\mathscr{GP}_m,\mathscr{P}_n,\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{GP}_n)$是范畴 $\mathscr{GP}_n$ 中的遗传 Hovey 三元组.

**收稿日期**：2025-05-29.

**第一作者简介**：仇松林(1997—)，男，汉族，硕士研究生，从事环的同调理论的研究，E-mail: 2991667391@qq.com. **通信作者简介**：张翠萍(1974—)，女，汉族，博士，副教授，从事环的同调理论的研究，E-mail: zhangcp@nwnu.edu.cn.

**基金项目**：国家自然科学基金(批准号：12361007).

受上述研究启发，本文构造范畴 $\mathcal{GFC}_n$ 中的遗传 Hovey 三元组. 本文中 $R$ 表示有单位元的环，模均指左 $R$-模，$\mathcal{P}(\mathcal{I})$表示投射(内射)模类，$\mathcal{P}_n(\mathcal{F}_n)$表示投射(平坦)维数不超过 $n$ 的模类.

## 1 Gorenstein FC-投射模

设 $\mathcal{C}$ 是模类，则

$$\mathcal{C}^{\perp}=\{A \mid \mathrm{Ext}_R^1(X,A)=0,\ \forall X\in\mathcal{C}\},$$
$$^{\perp}\mathcal{C}=\{A \mid \mathrm{Ext}_R^1(A,X)=0,\ \forall X\in\mathcal{C}\}.$$

设 $\mathcal{F},\mathcal{C}$ 是两个模类，如果 $\mathcal{F}^{\perp}=\mathcal{C}$ 且 $\mathcal{F}={}^{\perp}\mathcal{C}$，则称$(\mathcal{F},\mathcal{C})$是余挠对，$\mathcal{F}\cap\mathcal{C}$ 称为该余挠对的核. 如果对任意模 $X$，存在正合序列 $0\to C\to F\to X\to 0$ 和 $0\to X\to C'\to F'\to 0$，则称余挠对$(\mathcal{F},\mathcal{C})$是完备的，其中 $C,C'\in\mathcal{C}$，$F,F'\in\mathcal{F}$. 如果$(\mathcal{F},\mathcal{C})$满足下列等价条件之一：

1) $\mathcal{F}$ 是可解的(即 $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{F}$，并且 $\mathcal{F}$ 关于扩张和满同态的核封闭)；

2) $\mathcal{C}$ 是余可解的(即 $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{C}$，并且 $\mathcal{C}$ 关于扩张和单同态的余核封闭)；

3) $\forall F\in\mathcal{F}$，$C\in\mathcal{C}$，$i\geqslant 1$，$\mathrm{Ext}_R^i(F,C)=0$.

则称余挠对$(\mathcal{F},\mathcal{C})$是遗传的.

**定义 1**[8] 设 $R$ 是环，如果对任意的有限余表示模 $F$，$\mathrm{Ext}_R^1(M,F)=0$，则称 $R$-模 $M$ 是 FC-投射模.

显然，投射模是 FC-投射的.

**定义 2**[9] 设 $R$ 是环，如果存在投射模的正合列

$$\mathbb{P}=\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots,$$

使得：

1) $M\cong\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$；

2) 对任意的 FC-投射模 $L$，用 $\mathrm{Hom}_R(-,L)$作用上述正合列后仍保持正合.

则称 $R$-模 $M$ 是 Gorenstein FC-投射模.

记 $\mathcal{GFC}$ 为所有 Gorenstein FC-投射模作成的类.

**注 1** 1) 定义 2 中，序列 $\mathbb{P}$ 的每个循环是 Gorenstein FC-投射模；

2) $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{GFC}\subseteq\mathcal{GP}$；

3) 若 $M$ 是 Gorenstein FC-投射模，则对任意的 FC-投射模 $L$，有 $\mathrm{Ext}_R^{\geqslant 1}(M,L)=0$；

4) 若 $M$ 是 Gorenstein FC-投射模，则对任意的投射维数有限的模 $Q$，有 $\mathrm{Ext}_R^{\geqslant 1}(M,Q)=0$.

**定理 1** 设 $R$ 是环，$M$ 是 $R$-模，则下列结论等价：

1) $M\in\mathcal{GFC}$；

2) 对任意的 FC-投射模 $L$，有 $\mathrm{Ext}_R^{\geqslant 1}(M,L)=0$，并且存在正合列 $0\to M\to P^0\to P^1\to P^2\to\cdots$，其中 $P^i\in\mathcal{P}\,(i=0,1,\cdots)$，使得 $\mathrm{Hom}_R(-,L)$保持正合.

3) 存在短正合列 $0\to M\to P\to G\to 0$，其中 $P\in\mathcal{P}$，$G\in\mathcal{GFC}$.

证明：1)$\Leftrightarrow$2). 由定义 2 和注 1 可得.

3)$\Rightarrow$2). 设 $0\to M\to P\to G\to 0$ 是短正合列，其中 $P\in\mathcal{P}$，$G\in\mathcal{GFC}$. 令 $L$ 是 FC-投射模，则有 $\mathrm{Ext}_R^{\geqslant 1}(G,L)=0$，并且存在正合列

$$0\to G\to P^0\to P^1\to P^2\to\cdots,$$

使得 $\mathrm{Hom}_R(-,L)$保持正合，其中 $P^i\in\mathcal{P}\,(i=0,1,\cdots)$. 用 $\mathrm{Hom}_R(-,L)$作用短正合列，得正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_R(G,L)\to\mathrm{Hom}_R(P,L)\to\mathrm{Hom}_R(M,L)\to\mathrm{Ext}_R^1(G,L)=0,$$

对任意的 $i\geqslant 1$，

$$0=\mathrm{Ext}_R^i(P,L)\to\mathrm{Ext}_R^i(M,L)\to\mathrm{Ext}_R^{i+1}(G,L)=0.$$

从而有正合列 $0\to M\to P\to P^0\to P^1\to P^2\to\cdots$，其中 $P,P^i\in\mathcal{P}\,(i=0,1,\cdots)$，并且 $\mathrm{Hom}_R(-,L)$保持正合，$\mathrm{Ext}_R^{\geqslant 1}(M,L)=0$.

1)$\Rightarrow$3). 由定义 2 可得.

**命题 1**　设 $R$ 是环，则 $\mathscr{GFC}$ 关于扩张封闭.

证明：设 $0\to G_1\to G\to G_2\to 0$ 是短正合列，其中 $G_1\in\mathscr{GFC}$，$G_2\in\mathscr{GFC}$. 下证 $G\in\mathscr{GFC}$. 因为 $G_1\in\mathscr{GFC}$，$G_2\in\mathscr{GFC}$，所以由定理 1 中 2)知，存在正合列 $0\to G_1\to P^0\to P^1\to P^2\to\cdots$ 和 $0\to G_2\to Q^0\to Q^1\to Q^2\to\cdots$，其中 $P^i,Q^i\in\mathscr{P}$ $(i=0,1,\cdots)$，并且对任意的 FC-投射模 $L$，都有 $\mathrm{Hom}_R(-,L)$ 正合. 由文献[10]中引理 8.2.1 知，存在正合列

$$0\to G\to P^0\oplus Q^0\to P^1\oplus Q^1\to P^2\oplus Q^2\to\cdots,$$

其中 $P^i\oplus Q^i\in\mathscr{P}$，并且 $\mathrm{Hom}_R(-,L)$ 正合. 因为 $\mathrm{Ext}_R^{\geqslant 1}(G_1,L)=0=\mathrm{Ext}_R^{\geqslant 1}(G_2,L)$，所以 $\mathrm{Ext}_R^{\geqslant 1}(G,L)=0$. 故由定理 1 知，$G\in\mathscr{GFC}$.

**命题 2**　设 $R$ 是环，则 $\mathscr{GFC}$ 关于满同态的核封闭.

证明：设 $0\to G\to G_1\to G_2\to 0$ 是短正合列，其中 $G_1\in\mathscr{GFC}$，$G_2\in\mathscr{GFC}$. 下证 $G\in\mathscr{GFC}$. 因为 $G_1\in\mathscr{GFC}$，所以由定理 1 知，存在短正合列 $0\to G_1\to P\to H\to 0$，其中 $P\in\mathscr{P}$，$H\in\mathscr{GFC}$. 因此有下列推出图：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & H \arrow[r, equal] \arrow[d] & H \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

由命题 1 和上图第三列知，$X\in\mathscr{GFC}$. 所以由定理 1 知，$G\in\mathscr{GFC}$.

**命题 3**　设 $R$ 是环，则 $\mathscr{GFC}$ 关于直和封闭.

证明：设 $\{M_i\}_{i\in I}$ 是一簇 Gorenstein FC-投射模，则存在投射模的正合列

$$\mathbb{X}_i=\cdots\to P_{i1}\to P_{i0}\to P^{i0}\to P^{i1}\to\cdots,$$

使得 $M_i\cong\mathrm{Ker}(P_{i0}\to P^{i0})$，进而有投射模的正合列

$$\oplus\mathbb{X}_i=\cdots\to\oplus P_{i1}\to\oplus P_{i0}\to\oplus P^{i0}\to\oplus P^{i1}\to\cdots,$$

使得 $\oplus M_i\cong\mathrm{Ker}(\oplus P_{i0}\to\oplus P^{i0})$. 考虑下列交换图：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\oplus P_{i1},L) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_R(\oplus P_{i0},L) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_R(\oplus P^{i0},L) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \prod\mathrm{Hom}_R(P_{i1},L) \arrow[r] & \prod\mathrm{Hom}_R(P_{i0},L) \arrow[r] & \prod\mathrm{Hom}_R(P^{i0},L) \arrow[r] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

因为交换图的下行是正合的，所以上行也是正合的. 从而 $\oplus M_i\in\mathscr{GFC}$.

**命题 4**　设 $R$ 是环，则 $\mathscr{GFC}$ 关于直和项封闭.

证明：根据注 1 中 2)、命题 1 和命题 2 知，$\mathscr{GFC}$ 是投射可解的，并且关于直和是封闭的，所以由文献[11]中命题 1.4 可知结论成立.

由文献[7]可知，$\mathscr{GFC}$ 是弱幂等完备正合范畴.

## 2　$\mathscr{GFC}_n$ 及其模型结构

**定义 3**　设 $R$ 是环，$M$ 是 $R$-模，则 $M$ 的 Gorenstein FC-投射维数定义为 $\mathrm{GFC\text{-}pd}_R(M)=\inf\{n\in\mathbb{N}\mid$ 存在正合列 $0\to C_n\to C_{n-1}\cdots\to C_1\to C_0\to M\to 0$，其中 $C_i\in\mathscr{GFC}$，$i=0,1,\cdots,n\}$. 若这样的 $n$ 不存在，则记 $\mathrm{GFC\text{-}pd}_R(M)=\infty$.

由上述结论和文献[12]中引理 3.12 可得以下引理.

**引理 1**　设 $R$ 是环，$M$ 是 $R$-模. 若 $\mathrm{GFC\text{-}pd}_R(M)=n$，则对任意的正合列 $0\to K\to G_{n-1}\to\cdots\to G_0\to$

$M \to 0$，有 $K \in \mathscr{GFC}$，其中 $G_i \in \mathscr{GFC}$，$i=0,1,\cdots,n-1$.

**命题 5**　设 $R$ 是环，$M$ 是 $R$-模. 若 $\mathrm{GFC}\text{-}\mathrm{pd}_R(M)=n$，则存在短正合列 $0\to K\to G\to M\to 0$，其中 $G\in\mathscr{GFC}$，$\mathrm{pd}_R(K)=n-1$(若 $n=0$，则 $K=0$).

证明：当 $n=0$ 时，显然. 当 $n\geqslant 1$ 时，因为 $\mathrm{GFC}\text{-}\mathrm{pd}_R(M)=n$，故由引理 1 知，存在正合列

$$0 \to N \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0,$$

其中 $P_i \in \mathscr{P}\,(0\leqslant i\leqslant n-1)$，$N\in\mathscr{GFC}$. 进而有正合列

$$0 \to N \to Q_0 \to \cdots \to Q_{-n+1} \to W \to 0,$$

其中 $Q_i\in\mathscr{P}\,(-n+1\leqslant i\leqslant 0)$，$W\in\mathscr{GFC}$. 于是可得下列行正合的交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Q_{-n+1} \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

从而有正合列

$$0 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow Q_{-1}\oplus P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0,$$

其中 $G=W\oplus P_0$. 进而由命题 3 知，$G\in\mathscr{GFC}$. 令 $K=\mathrm{Ker}\ f$，则 $\mathrm{pd}_R(K)\leqslant n-1$. 又因为 $\mathrm{GFC}\text{-}\mathrm{pd}_R(M)=n$，所以 $\mathrm{pd}_R(K)=n-1$.

**命题 6**　设 $R$ 是环，则 $\mathscr{GFC}_n$ 关于扩张和满同态的核封闭.

证明：设 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是短正合列，其中 $M'\in\mathscr{GFC}_n$，$M''\in\mathscr{GFC}_n$. 下证 $M\in\mathscr{GFC}_n$. 取 $M',M''$ 的投射分解分别为 $\cdots\to P_1'\to P_0'\to M'\to 0$ 和 $\cdots\to P_1''\to P_0''\to M''\to 0$. 由文献[10]中引理 8.2.1 知，$M$ 的投射分解 $\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0$，其中 $P_i=P_i'\oplus P_i''\,(i=0,1,\cdots)$，并且有短正合列 $0\to\Omega_i M'\to\Omega_i M\to\Omega_i M''\to 0$，其中 $\Omega_i M',\Omega_i M,\Omega_i M''$ 分别是 $M',M,M''$ 的第 $i$ 个合冲. 因为 $M'\in\mathscr{GFC}_n$，$M''\in\mathscr{GFC}_n$，所以由引理 1 知，$\Omega_n M'\in\mathscr{GFC}$，$\Omega_n M''\in\mathscr{GFC}$. 由命题 1 知，$\Omega_n M\in\mathscr{GFC}$. 因此 $M\in\mathscr{GFC}_n$. 同理可证 $\mathscr{GFC}_n$ 关于满同态的核封闭.

**命题 7**　设 $R$ 是环，$\{M_i\}_{i\in I}$ 是一簇 $R$-模，则 $\mathrm{GFC}\text{-}\mathrm{pd}_R(\bigoplus\limits_{i\in I}M_i)=\sup\{\mathrm{GFC}\text{-}\mathrm{pd}_R(M_i)\mid i\in I\}$. 特别地，$\mathscr{GFC}_n$ 关于直和项封闭.

证明：一方面，设 $\sup\{\mathrm{GFC}\text{-}\mathrm{pd}_R(M_i)\mid i\in I\}=n<\infty$，则 $\mathrm{GFC}\text{-}\mathrm{pd}_R(M_i)\leqslant n$. 由命题 3 知，$\mathrm{GFC}\text{-}\mathrm{pd}_R(\bigoplus\limits_{i\in I}M_i)\leqslant n$.

另一方面，设 $\mathrm{GFC}\text{-}\mathrm{pd}_R(\bigoplus\limits_{i\in I}M_i)=n<\infty$. 取正合列

$$0 \to K_i \to G_{n-1,i} \to \cdots \to G_{0,i} \to M_i \to 0,$$

其中 $G_{j,i}\in\mathscr{GFC}(0\leqslant j\leqslant n-1)$. 从而有正合列

$$0 \to \bigoplus K_i \to \bigoplus G_{n-1,i} \to \cdots \to \bigoplus G_{0,i} \to \bigoplus M_i \to 0.$$

由命题 3 知，$\bigoplus G_{j,i}\in\mathscr{GFC}(0\leqslant j\leqslant n-1)$. 因为 $\mathrm{GFC}\text{-}\mathrm{pd}_R(t\bigoplus\limits_{i\in I}M_i)=n$，故由引理 1 知，$\bigoplus K_i\in\mathscr{GFC}$，由命题 4 知，$K_i\in\mathscr{GFC}$. 所以 $\mathrm{GFC}\text{-}\mathrm{pd}_R(M_i)\leqslant n$.

由文献[7]可知 $\mathscr{GFC}_n$ 是弱幂等完备正合范畴.

**定理 2**　设 $R$ 是环，$M$ 是 $R$-模，$n$ 是非负整数，则 $\mathscr{GFC}^{\perp}\cap\mathscr{GFC}_n=\mathscr{P}_n$，并且有关系 1)$\Leftrightarrow$2)$\Leftrightarrow$4)$\Rightarrow$3)，其中：

1) $M\in\mathscr{GFC}_n$；

2) 存在短正合列 $0\to K\to G\to M\to 0$，$G\in\mathscr{GFC}$，$K\in\mathscr{P}_{n-1}$，并且对任意的 $X\in\mathscr{P}_n^{\perp}$，用 $\mathrm{Hom}_R(-,X)$ 作用后仍保持正合(若 $n=0$，则 $K=0$)；

3) 对任意的 $C\in\mathscr{P}_n^{\perp}\cap\mathscr{GFC}^{\perp}$，有 $\mathrm{Ext}_R^1(M,C)=0$；

4) 存在短正合列 $0\to M\to L\to N\to 0$，$L\in\mathscr{P}_n$，$N\in\mathscr{GFC}$.

证明：1)$\Rightarrow$2). 设 $M\in\mathscr{GFC}_n$. 当 $n=0$ 时，显然. 当 $n\geqslant 1$ 时，由命题 5 知，存在短正合列 $0\to K\to G\to M\to 0$，其中 $G\in\mathscr{GFC}$，$K\in\mathscr{P}_{n-1}$. 因为 $G\in\mathscr{GFC}$，所以存在短正合列 $0\to G\to P\to G'\to 0$，其中 $P\in\mathscr{P}$，

$G'\in\mathcal{GFC}$. 因此有下列推出图：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & G' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

由上图第二行知，$H\in\mathcal{P}_n$. 对任意的 $X\in\mathcal{P}_n^{\perp}$，用 $\mathrm{Hom}_R(-,X)$作用在上图中第一、二两行可得下列行正合的交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(H,X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(P,X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(K,X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}_R^1(H,X)=0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,X) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(G,X) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(K,X), &
\end{tikzcd}$$

所以 $\mathrm{Hom}_R(G,X)\to\mathrm{Hom}_R(K,X)$是满态射.

2)⇒4). 当 $n=0$ 时，结论显然成立. 当 $n\geqslant 1$ 时，因为 $G\in\mathcal{GFC}$，所以存在短正合列 $0\to G\to P\to N\to 0$，其中 $N\in\mathcal{GFC}$，$P\in\mathcal{P}$. 因此可得下列推出图：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

因为 $K\in\mathcal{P}_{n-1}$，$P\in\mathcal{P}$，所以 $L\in\mathcal{P}_n$. 故上图第三列为所需正合列.

4)⇒1). 设 $0\to M\to L\to N\to 0$ 是短正合列，其中 $L\in\mathcal{P}_n$，$N\in\mathcal{GFC}$. 因为 $L\in\mathcal{P}_n\subseteq\mathcal{GFC}_n$，$N\in\mathcal{GFC}\subseteq\mathcal{GFC}_n$，故由命题 6 知，$M\in\mathcal{GFC}_n$.

2)⇒3). 设 $0\to K\to G\to M\to 0$ 是短正合列，其中 $G\in\mathcal{GFC}$，$K\in\mathcal{P}_{n-1}$，并且对任意的 $X\in\mathcal{P}_n^{\perp}$，用 $\mathrm{Hom}_R(-,X)$作用后仍保持正合. 对任意的 $C\in\mathcal{P}_n^{\perp}\cap\mathcal{GFC}^{\perp}$，有 $\mathrm{Ext}_R^1(G,C)=0$，于是有下列行正合交换图：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(M,C) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_R(G,C) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_R(K,C) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}_R^1(M,C) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & 0 \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Hom}_R(M,C) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(G,C) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(K,C) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

由五引理[13]知，$\mathrm{Ext}_R^1(M,C)=0$.

一方面，因为 $\mathcal{GFC}\subseteq\mathcal{GP}$，所以 $\mathcal{P}_n\subseteq\mathcal{GP}^{\perp}\subseteq\mathcal{GFC}^{\perp}$，进而 $\mathcal{P}_n\subseteq\mathcal{GFC}^{\perp}\cap\mathcal{GFC}_n$. 另一方面，对任意的 $Y\in\mathcal{GFC}^{\perp}\cap\mathcal{GFC}_n$，由 4)知，存在可裂的短正合列 $0\to Y\to T\to N\to 0$，其中 $N\in\mathcal{GFC}$，$T\in\mathcal{P}_n$，所以 $Y\in\mathcal{P}_n$，即 $\mathcal{GFC}^{\perp}\cap\mathcal{GFC}_n\subseteq\mathcal{P}_n$.

由文献[14]中推论 3 可知，如果任意有限表示模具有有限的 Gorenstein 投射维数，则$(\mathcal{GP},\mathcal{GP}^{\perp})$是完备的遗传余挠对. 由文献[9]中定理 4.15 可知，如果$(\mathcal{GP},\mathcal{GP}^{\perp})$是完备的余挠对，则$(\mathcal{GFC},\mathcal{GFC}^{\perp})$是遗传的余挠对. 根据文献[14]中定理 1 可得类似结论如下：

**推论1** 如果任意有限表示模都有有限的Gorenstein投射维数，则$(\mathscr{GFC},\mathscr{GFC}^{\perp})$是完备的遗传余挠对.

下面给出$\mathscr{GP}=\mathscr{GFC}$的充要条件.

**推论2** 设$R$是环，则有关系1)⇒2)⇒3)，其中：

1) $\mathscr{GP}=\mathscr{GFC}$;

2) 对任意的非负整数$n$，有$\mathscr{GFC}^{\perp}\cap\mathscr{GP}_n=\mathscr{P}_n$;

3) 存在非负整数$n$，使得$\mathscr{GFC}^{\perp}\cap\mathscr{GP}_n=\mathscr{P}_n$.

如果任意有限表示模都有有限的Gorenstein投射维数，则3)⇒1)，此时1),2),3)等价.

证明：1)⇒2). 由定理3知，对任意的非负整数$n$，有$\mathscr{GFC}^{\perp}\cap\mathscr{GP}_n=\mathscr{GFC}^{\perp}\cap\mathscr{GFC}_n=\mathscr{P}_n$.

2)⇒3)显然成立.

3)⇒1). 由推论1可知，$(\mathscr{GFC},\mathscr{GFC}^{\perp})$是完备的余挠对. 因为$\mathscr{GFC}\subseteq\mathscr{GP}_n$，所以由文献[7]中定理5.1中(1)可知，$(\mathscr{GFC},\mathscr{GFC}^{\perp}\cap\mathscr{GP}_n)$是$\mathscr{GP}_n$中的余挠对. 因为$\mathscr{GFC}^{\perp}\cap\mathscr{GP}_n=\mathscr{P}_n$，所以$(\mathscr{GFC},\mathscr{P}_n)$是$\mathscr{GP}_n$中的余挠对. 由文献[7]中定理6.3中(1)知，$(\mathscr{GP},\mathscr{P}_n)$是$\mathscr{GP}_n$中的余挠对，所以$\mathscr{GFC}=\mathscr{GP}$.

**引理2** 设$R$是环，$n$和$m$是非负整数且$m\leqslant n$，则$(\mathscr{P}_m,\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{GFC}_n)$是$\mathscr{GFC}_n$中完备的遗传余挠对.

证明：由文献[10]中定理7.4.6、命题6和文献[7]中定理5.1可得结论.

文献[7]证明了$(\mathscr{GP}_m,\mathscr{P}_n,\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{GP}_n)$是范畴$\mathscr{GP}_n$中的遗传Hovey三元组，其对应的同伦范畴是$(\mathscr{GP}_m\cap\mathscr{P}_m^{\perp})/(\mathscr{P}_m\cap\mathscr{P}_m^{\perp})\cong\mathscr{GP}/\mathscr{P}$. 下面给出范畴$\mathscr{GFC}_n$中的遗传Hovey三元组.

**定理3** 设$R$是环，$n$和$m$是非负整数且$m\leqslant n$，则有下列结论：

1) $(\mathscr{GFC}_m,\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n)$是$\mathscr{GFC}_n$中完备的遗传余挠对，其核为$\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_m$;

2) $(\mathscr{GFC}_m,\mathscr{P}_n,\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{GFC}_n)$是$\mathscr{GFC}_n$中遗传的Hovey三元组，其对应的同伦范畴是$(\mathscr{GFC}_m\cap\mathscr{P}_m^{\perp})/(\mathscr{P}_m\cap\mathscr{P}_m^{\perp})\cong\mathscr{GFC}/\mathscr{P}$.

证明：1) 先证明$(\mathscr{GFC}_m,\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n)$是$\mathscr{GFC}_n$中的余挠对. 只需证明$\mathscr{GFC}_m^{\perp}\cap\mathscr{GFC}_n=\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n$和${}^{\perp}(\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n)\cap\mathscr{GFC}_n=\mathscr{GFC}_m$. 由注1知，$\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n\subseteq\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{GFC}^{\perp}$，由定理3可知，

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{GFC}_n}(\mathscr{GFC}_m,\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n)=\mathrm{Ext}^1_R(\mathscr{GFC}_m,\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n)=0.$$

因此

$$\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n\subseteq\mathscr{GFC}_m^{\perp}\cap\mathscr{GFC}_n,\qquad \mathscr{GFC}_m\subseteq{}^{\perp}(\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n)\cap\mathscr{GFC}_n.$$

又因为$\mathscr{GFC}_m^{\perp}\subseteq\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{GFC}^{\perp}$，$\mathscr{GFC}^{\perp}\cap\mathscr{GFC}_n=\mathscr{P}_n$(定理3)，所以

$$\mathscr{GFC}_m^{\perp}\cap\mathscr{GFC}_n\subseteq\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{GFC}^{\perp}\cap\mathscr{GFC}_n=\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n.$$

因此$\mathscr{GFC}_m^{\perp}\cap\mathscr{GFC}_n=\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n$.

下面证明${}^{\perp}(\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n)\cap\mathscr{GFC}_n\subseteq\mathscr{GFC}_m$. 假设当$n\geqslant 1$时，令$M\in{}^{\perp}(\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n)\cap\mathscr{GFC}_n$，则由命题5知，存在短正合列$0\to K\to G\to M\to 0$，其中$G\in\mathscr{GFC}$，$K\in\mathscr{P}_{n-1}$. 因为$G\in\mathscr{GFC}$，所以存在短正合列$0\to G\to P\to G'\to 0$，其中$P\in\mathscr{P}$，$G'\in\mathscr{GFC}$. 因此可得下列推出图：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & G' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

由上图第二行知，$H\in\mathscr{P}_n$. 因为$G'\in\mathscr{GFC}\subseteq{}^{\perp}(\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n)$，并且${}^{\perp}(\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n)$关于扩张封闭，所以$H\in{}^{\perp}(\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n)$. 因此由文献[7]中引理6.2知，$H\in{}^{\perp}(\mathscr{P}_m^{\perp}\cap\mathscr{P}_n)\cap\mathscr{P}_n=\mathscr{P}_m$. 由定理2和上图第三列

知，$M\in\mathcal{GFC}_m$.

下面证明余挠对$(\mathcal{GFC}_m,\mathcal{P}_m^{\perp}\cap\mathcal{P}_n)$在 $\mathcal{GFC}_n$ 中是完备的．设 $M\in\mathcal{GFC}_n$，根据命题 5 知，存在短正合列 $0\to N\to H\to M\to 0$，其中 $H\in\mathcal{GFC}$，$N\in\mathcal{P}_{n-1}$．由引理 2 知，存在短正合列 $0\to N\to L\to C\to 0$，其中 $L\in\mathcal{P}_m^{\perp}\cap\mathcal{GFC}_n$，$C\in\mathcal{P}_m$．于是有下列推出图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & C \arrow[r, equal] \arrow[d] & C \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

由于 $N\in\mathcal{P}_{n-1}$，$C\in\mathcal{P}_m$，所以 $L\in\mathcal{P}_n$，从而 $L\in\mathcal{P}_m^{\perp}\cap\mathcal{P}_n$．因为 $H\in\mathcal{GFC}\subseteq\mathcal{GFC}_m$，$C\in\mathcal{P}_m\subseteq\mathcal{GFC}_m$，所以由上图第二列和命题 6 知，$G\in\mathcal{GFC}_m$．于是存在短正合列 $0\to L\to G\to M\to 0$，其中 $G\in\mathcal{GFC}_m$，$L\in\mathcal{P}_m^{\perp}\cap\mathcal{P}_n$.

由定理 3 知，存在短正合列 $0\to M\to N\to H\to 0$，其中 $N\in\mathcal{P}_n$，$H\in\mathcal{GFC}$. 由引理 2 知，存在短正合列 $0\to N\to L\to C\to 0$，其中 $L\in\mathcal{P}_m^{\perp}\cap\mathcal{GFC}_n$，$C\in\mathcal{P}_m$．于是有下列推出图：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & N \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & C \arrow[r, equal] \arrow[d] & C \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

因为 $N\in\mathcal{P}_n$，$C\in\mathcal{P}_m$，由上图第二列知，$L\in\mathcal{P}_n$，所以有 $L\in\mathcal{P}_m^{\perp}\cap\mathcal{P}_n$．因为 $H\in\mathcal{GFC}\subseteq\mathcal{GFC}_m$，$C\in\mathcal{P}_m\subseteq\mathcal{GFC}_m$，故由上图第三列和命题 6 知，$G\in\mathcal{GFC}_m$．由上图第二行可得短正合列 $0\to M\to L\to G\to 0$. 因此$(\mathcal{GFC}_m,\mathcal{P}_m^{\perp}\cap\mathcal{P}_n)$是 $\mathcal{GFC}_n$ 中完备余挠对.

由于 $\mathcal{GFC}_m$ 关于满同态的核是封闭的，因此该余挠对是遗传的．由定理 3 可知，$\mathcal{GFC}^{\perp}\cap\mathcal{GFC}_n=\mathcal{P}_n$，所以

$$\mathcal{GFC}_m\cap\mathcal{P}_n=\mathcal{GFC}_m\cap\mathcal{GFC}_n\cap\mathcal{GFC}^{\perp}=\mathcal{GFC}_m\cap\mathcal{GFC}^{\perp}=\mathcal{P}_m,$$

故该余挠对的核为 $\mathcal{P}_m^{\perp}\cap\mathcal{P}_m$.

2）只需证明 $\mathcal{P}_n$ 在 $\mathcal{GFC}_n$ 中是厚的．令 $0\to X\to Y\to Z\to 0$ 是 $\mathcal{GFC}_n$ 中的短正合列．若 $X\in\mathcal{P}_n$，$Y\in\mathcal{P}_n$，则 $Z\in\mathcal{P}_n$．由定理 3 知，$\mathcal{GFC}^{\perp}\cap\mathcal{GFC}_n=\mathcal{P}_n$，所以

$$Z\in\mathcal{P}_{n+1}\cap\mathcal{GFC}_n=\mathcal{GFC}^{\perp}\cap\mathcal{GFC}_{n-1}\cap\mathcal{GFC}_n=\mathcal{GFC}^{\perp}\cap\mathcal{GFC}_n=\mathcal{P}_n.$$

由引理 2 和结论 1)知，$(\mathcal{GFC}_m,\mathcal{P}_n,\mathcal{P}_m^{\perp}\cap\mathcal{GFC}_n)$是 $\mathcal{GFC}_n$ 中遗传的 Hovey 三元组，由文献[7]中定理 1.3 知，其对应的同伦范畴是

$$(\mathcal{GFC}_m\cap\mathcal{P}_m^{\perp}\cap\mathcal{GFC}_n)/(\mathcal{GFC}_m\cap\mathcal{P}_n\cap\mathcal{P}_m^{\perp}\cap\mathcal{GFC}_n)=(\mathcal{GFC}_m\cap\mathcal{P}_m^{\perp})/(\mathcal{GFC}_m\cap\mathcal{P}_n\cap\mathcal{P}_m^{\perp})=$$
$$(\mathcal{GFC}_m\cap\mathcal{P}_m^{\perp})/(\mathcal{P}_m\cap\mathcal{P}_m^{\perp}).$$

又因为$(\mathcal{GFC},\mathcal{P}_n,\mathcal{GFC}_n)$也是 $\mathcal{GFC}_n$ 中遗传的 Hovey 三元组，故由文献[7]中定理 1.3 知，其对应的同伦范畴是

$$(\mathcal{GFC}\cap\mathcal{GFC}_n)/(\mathcal{GFC}\cap\mathcal{P}_n\cap\mathcal{GFC}_n)=\mathcal{GFC}/(\mathcal{GFC}\cap\mathcal{GFC}^{\perp}\cap\mathcal{GFC}_n\cap\mathcal{GFC}_n)=$$

$$\mathscr{GFC}/(\mathscr{GFC}\cap\mathscr{GFC}^{\perp})=\mathscr{GFC}/\mathscr{P}.$$

由文献[8]中推论1.4知，$(\mathscr{GFC}_m\cap\mathscr{P}_m^{\perp})/(\mathscr{P}_m\cap\mathscr{P}_m^{\perp})\simeq\mathscr{GFC}/\mathscr{P}$.

## 参考文献


[1] HOVEY M. Model Categories [M]//Mathematical Surveys and Monographs. Providence，RI：American Mathematical Society，1999：1-213.

[2] HOVEY M. Cotorsion Pairs，Model Category Structures，and Representation Theory [J]. Mathematische Zeitschrift，2002，241(3)：553-592.

[3] QUILLEN D. Higher Algebraic K-Theory：Ⅰ [J]. Lecture Notes in Mathematics，1973，341(1)：85-147.

[4] BÜHLER T. Exact Categories [J]. Expositions Mathematicae，2010，28(1)：1-69.

[5] GILLESPIE J. Model Structures on Exact Categories [J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2011，215(12)：2892-2902.

[6] EL MAAOUY R. Model Structures，n-Gorenstein Flat Modules and PGF Dimensions [J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series Ⅱ)，2024，67(4)：1241-1264.

[7] GAO N，LU X S，ZHANG P. Chains of Model Structures Arising from Modules of Finite Gorenstein Dimension [EB/OL]. (2024-03-08)[2024-11-08]. https://doi.org/10.48550/arxiv.2403.05232.

[8] WANG Y，ZHOU D X. Gorenstein FC-Projective Modules [J]. Journal of Algebra and Its Applications，2020，19(4)：2050066-1-2050066-26.

[9] 付家慧. FC-投射模和Gorenstein FC-投射模 [D]. 兰州：兰州理工大学，2022. (FU J H. FC-Projective Modules and Gorenstein FC-Projective Modules [D]. Lanzhou：Lanzhou University of Technology，2022.)

[10] ENOCHS E E，JENDA O M G. Relative Homological Algebra [M]. Berlin：Walter De Gruyter & Co.，2000：168-182.

[11] HOLM H. Gorenstein Homological Dimensions [J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2024，189(1/2/3)：167-193.

[12] AUSLANDER M，BRIDGER M. Stable Module Theory [M]//Memoirs of the American Mathematical Society，No.94. Providence，RI：American Mathematical Society，1969：92-105.

[13] CARTAN H，EILENBERG S. Homological Algebra [M]. New Jersey：Princeton University Press，1956：10-15.

[14] ESTRADA S，IACOB A. Gorenstein Projective Precovers and Finitely Presented Modules [J]. The Rocky Mountain Journal of Mathematics，2024，54(3)：715-721.


(责任编辑：赵立芹)