

# 黏弹性流动问题的若干稳定化求解方案

胡小林, 高普阳

(长安大学 理学院, 西安 710064)

**摘要:** 基于对数构象表示(log-conformation-representation, LCR), 针对黏弹性 Oldroyd-B 流动问题给出两种全耦合数值方法, 并对两种方法进行对比研究. 第一种方法是在动量方程中引入离散弹性-黏性分裂应力梯度(discrete elastic-viscous split-stress gradient, DEVSS-G)法, 增强动量方程的椭圆性, 从而得到 LCR-DEVSS-G 稳定化格式; 第二种方法是结合流线迎风 Petrov-Galerkin(streamline upwind Petrov-Galerkin, SUPG)方法, 得到 LCR-SUPG 稳定化格式. 最后通过 Poiseuille 流和圆柱绕流数值算例验证. 结果表明, 采用 LCR-DEVSS-G 稳定化格式处理黏弹性 Oldroyd-B 流动问题时收敛性更好, 计算效率更高.

**关键词:** 黏弹性流体; Oldroyd-B 模型; 对数构象表示; 离散弹性-黏性分裂应力梯度法; 流线迎风 Petrov-Galerkin

**中图分类号:** O242.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2026)02-0275-09

## Several Stabilized Solution Schemes for Viscoelastic Flow Problems

HU Xiaolin, GAO Puyang

(School of Sciences, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

**Abstract:** Based on the log-conformation representation (LCR), we gave two fully coupled numerical methods for viscoelastic Oldroyd-B flow problems, and conducted a comparative study on two methods. The first method was to introduce the discrete elastic-viscous split-stress gradient (DEVSS-G) method into the momentum equation, which enhanced the ellipticity of the momentum equation and obtained the LCR-DEVSS-G stabilization scheme. The second method was to combine the streamline upwind Petrov-Galerkin (SUPG) method, we obtained the LCR-SUPG stabilization scheme. Finally, the verification results of numerical examples of Poiseuille flow and flow around a circular cylinder show that using LCR-DEVSS-G stabilization scheme to handle viscoelastic Oldroyd-B flow problems has better convergence and higher computational efficiency.

**Keywords:** viscoelastic fluid; Oldroyd-B model; log-conformation-representation; discrete elastic-viscous split-stress gradient method; streamline upwind Petrov-Galerkin

## 0 引言

黏弹性流体在物料加工和生物医学等领域应用广泛<sup>[1]</sup>. 这种流体主要由溶剂和聚合物混合而成,

收稿日期: 2025-06-10. 网络首发日期: 2026-01-20.

**第一作者简介:** 胡小林(1996—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事偏微分方程数值解的研究, E-mail: 13269840304@163.com. **通信作者简介:** 高普阳(1991—), 男, 汉族, 博士, 副教授, 从事偏微分方程数值解的研究, E-mail: gaopuyang@chd.edu.cn.

**基金项目:** 陕西数理基础科学研究项目(批准号: 23JSQ040)、陕西省自然科学基金面上项目(批准号: 2025JC-YBMS-029)、陕西省自然科学基金青年项目(批准号: 2025JC-YBQN-069)和国家自然科学基金天元基金天元数学西北中心项目.

**网络首发地址:** <https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20260119.1325.001>.

而聚合物使流体具有储存和恢复剪切能的能力,从而赋予流体黏弹性. Oldroyd-B 模型是描述复杂不可压缩黏弹性流体流动问题的经典本构模型之一,一般情况下,由于方程的非线性以及强耦合性等,很难求得其解析解<sup>[2]</sup>. 因此,研究该模型的数值解尤为重要.

针对黏弹性流动问题,研究人员已提出了多种稳定化方法,如间断有限元<sup>[3]</sup>、流线迎风 Petrov-Galerkin(streamline upwind Petrov-Galerkin, SUPG)方法和离散弹性-黏性分裂应力梯度(discrete elastic-viscous split-stress gradient, DEVSS-G)法等<sup>[4]</sup>. 目前较广泛使用的数值方法是由 Fattal 等<sup>[5]</sup>提出的对数构象表示(log-conformation-representation, LCR)法. 基于文献<sup>[5]</sup>的思想, Balci 等<sup>[6]</sup>提出了平方根分解法(square root conformation reconstruction, SRCR); Jaensson 等<sup>[7]</sup>基于逆变变形张量并结合稳定化方法提出了新的数值算法; Doherty 等<sup>[8]</sup>将 LCR 与投影法相结合用于解决黏弹性流体流动问题等; Kwon<sup>[9]</sup>在采用 LCR 和 DEVSS-G 方法的基础上,对是否引入 SUPG 方法能进一步增加数值求解过程中的稳定性进行了研究.

上述研究既有对模型的稳定化,也有对数值算法的稳定化. 但关于不同稳定化方案的横向对比目前研究较少. 基于此,本文首先给出两种稳定化方案,即将 LCR 分别与 SUPG 和 DEVSS-G 方法结合,得到 LCR-DEVSS-G 和 LCR-SUPG 的稳定化格式;其次,对这两种数值格式的精度和计算效率进行对比研究. 数值算法的基本思路是先用向后差分 and 有限元方法分别对时间和空间进行离散,再用 Newton-Raphson 迭代求解非线性方程组,最后基于一些算例讨论对比这些稳定化算法的计算效率.

## 1 数学模型

### 1.1 Oldroyd-B 模型

在时间间隔 $[0, T]$ 上,黏弹性流体在二维或三维区域 $\Omega$ 中流动,区域 $\Omega$ 的边界记为 $\partial\Omega$ . 假设流动是不可压缩和等温的,则动量守恒和连续性条件为

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{T} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

其中 $\rho$ 表示流体的密度, $p$ 表示压力, $\mathbf{u}$ 是速度场, $\mathbf{f}$ 是右侧力矢量. 对于黏弹性流体, $\mathbf{T}$ 可定义为黏性和弹性之和,即 $\mathbf{T} = 2\eta_s D(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\tau}$ , $D(\mathbf{u})$ 是形变率张量,即 $D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ , $\beta \in [0, 1]$ 是用于定义流体中黏性或溶剂黏度的实参数, $\eta_0$ 是运动黏度,则溶剂黏度和聚合物黏度可分别表示为 $\eta_s = \beta \eta_0$ , $\eta_p = (1 - \beta) \eta_0$ . 引入描述应力张量 $\mathbf{T}$ 的弹性部分 $\boldsymbol{\tau}$ 行为的本构方程,本文选取经典的 Oldroyd-B 微分本构模型<sup>[1]</sup>,公式如下:

$$\frac{1}{2\eta_p} \boldsymbol{\tau} - D(\mathbf{u}) + \frac{\lambda}{2\eta_p} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\tau} \right) = \mathbf{0}. \quad (3)$$

### 1.2 对数构象表示

在 Oldroyd-B 模型中,构象张量 $\mathbf{C}$ 与弹性应力 $\boldsymbol{\tau}$ 有如下关系<sup>[10]</sup>:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\eta_p}{\lambda} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (4)$$

其中 $\mathbf{I}$ 表示单位张量. 结合式(3),(4),用新变量 $\mathbf{C}$ 表示 Oldroyd-B 本构方程为

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{C} - \frac{1}{\lambda} (\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (5)$$

定义 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ , $\mathbf{L} = \nabla \mathbf{u}$ ,将该定义代入式(5)可得

$$\frac{D\mathbf{C}}{Dt} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{C} - \frac{1}{\lambda} (\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (6)$$

由于 $\mathbf{C}$ 具有对称正定性,因此它总可以对角化,即存在构象张量 $\mathbf{C}$ 的特征值矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和旋转矩阵 $\mathbf{R}$ ,使得

$$\mathbf{C} = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{R}^T, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\psi} = \log \mathbf{C} = \mathbf{R} \cdot \log \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{R}^T. \quad (8)$$

首先将式(7)代入式(6), 得到各个分量的导数. 对于旋转矩阵  $\mathbf{R}$ , 有  $\frac{D\mathbf{R}}{Dt} = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{R}$ , 其中  $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{R}^T \cdot \frac{D\mathbf{R}}{Dt}$ , 而  $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$ . 其次对  $\boldsymbol{\psi}$  求时间导数, 使用乘积法则展开时间导数, 再结合旋转矩阵  $\mathbf{R}$  的时间导数性质以及  $\frac{D(\log \mathbf{A})}{Dt} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \frac{D\mathbf{A}}{Dt}$ , 可得

$$\tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{A} + \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{S}}^T = \tilde{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{L}}^T - \frac{1}{\lambda}(\mathbf{A} - \mathbf{I}), \tag{9}$$

$$\frac{D\boldsymbol{\psi}}{Dt} = \mathbf{R} \cdot \left( \tilde{\mathbf{S}} \cdot \log \mathbf{A} + \frac{D\mathbf{A}}{Dt} \cdot \mathbf{A}^{-1} + \log \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{S}}^T \right) \cdot \mathbf{R}^T, \tag{10}$$

结合式(9)和式(10), 使用  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{A}$  的性质可得

$$\frac{D\boldsymbol{\psi}}{Dt} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{S} + 2\mathbf{B} + \frac{1}{\lambda}(\mathbf{e}^{-\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{I}), \tag{11}$$

其中  $\mathbf{B}$  是在推导过程中为保证对称性和保形性而引入的修正项, 而  $\mathbf{e}^{-\boldsymbol{\psi}}$  描述了形变张量  $\mathbf{C}$  从对数空间回到原始空间的非线性恢复过程. 本文采用耦合求解的方式, 所以需将动量方程(1)也用对数构象表示, 即

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \mathbf{f} = -\nabla p + 2\eta_s \nabla \cdot D(\mathbf{u}) + \frac{\eta_p}{\lambda} \nabla \cdot (\mathbf{e}^{\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{I}). \tag{12}$$

则式(2), (11), (12)即为 Oldroyd-B 模型的对数构象表示公式.

## 2 数值算法

用有限元法对控制方程(2), (11), (12)进行空间离散, 时间采取向后差分(BDF)<sup>[11]</sup>给出全离散格式.

### 2.1 有限元近似

对于定义在区域  $\Omega$  上的初边值问题,  $dV$  表示在区域  $\Omega$  上的积分微元,  $dS$  表示在  $\partial\Omega$  上的积分微元. 定义相应空间: 速度空间记为  $\mathbf{V}_0 = H_0^1(\Omega)^d$ , 压力空间记为  $Q = L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ ,

$$\boldsymbol{\Gamma} := \{ \boldsymbol{\tau} \mid \boldsymbol{\tau} \in (L^2(\Omega))_{\text{sym}}^{d \times d}, \mathbf{w} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} \in (L^2(\Omega))_{\text{sym}}^{d \times d}, \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}_0 \}$$

表示应力空间, 对新的未知张量  $\boldsymbol{\psi}$  可定义空间  $\boldsymbol{\Gamma}_\boldsymbol{\psi} = \log(\boldsymbol{\Gamma})$ , 记  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\tau}]: (0, T) \rightarrow \mathbf{X} := \mathbf{V}_0 \times Q \times \boldsymbol{\Gamma}$ , 其中下标 sym 表示对称张量.

利用标准 Galerkin 近似<sup>[12]</sup>,  $\mathcal{T}_h$  为区域  $\Omega$  上的有限元划分,  $h_K$  表示单元的直径,  $h = \max\{h_K \mid K \in \mathcal{T}_h\}$  表示剖分的直径. 因此可构造有限元空间

$$\mathbf{V}_{0,h} = \{ \mathbf{v}_h \in [C^0(\bar{\Omega})]^d \cap H_0^1(\Omega)^d \mid \mathbf{v}_h|_K \in [P_2(K)]^d, \forall K \in \mathcal{T}_h \} \subseteq \mathbf{V}_0,$$

$$Q_h = \{ q_h \in C^0(\bar{\Omega}) \cap L_0^2(\Omega) \mid q_h|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \},$$

且  $Q_h \subseteq Q$ , 其中  $L_0^2(\Omega)$  表示零均值空间,

$$\boldsymbol{\Gamma}_h = \{ \boldsymbol{\chi}_h \in [C^0(\bar{\Omega})]_{\text{sym}}^{d \times d} \mid \boldsymbol{\chi}_h|_K \in [P_2(K)]_{\text{sym}}^{d \times d}, \forall K \in \mathcal{T}_h \} \subseteq \boldsymbol{\Gamma}_\boldsymbol{\psi},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_C = \{ \mathbf{R}_h \in [C^0(\bar{\Omega})]^{d \times d} \mid \mathbf{R}_h|_K \in [P_1(K)]^{d \times d}, \forall K \in \mathcal{T}_h \}.$$

然后采取向后差分(BDF)对时间离散,

$$\int_{\Omega_h} \left( \rho \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} \cdot \mathbf{v}_h + \rho(\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h + 2\eta_s D(\mathbf{u}_h^{n+1}) : D(\mathbf{v}_h) \right) dV - \int_{\Omega_h} p_h^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v}_h dV = \int_{\Omega_h} \mathbf{f}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h dV - \frac{\eta_p}{\lambda} \int_{\Omega_h} (\mathbf{e}^{\boldsymbol{\psi}_h^{n+1}} - \mathbf{I}) : \nabla \mathbf{v}_h dV, \tag{13}$$

$$\int_{\Omega_h} q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} dV = 0, \tag{14}$$

$$\int_{\Omega_h} \left( \frac{\boldsymbol{\psi}_h^{n+1} - \boldsymbol{\psi}_h^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla) \boldsymbol{\psi}_h^{n+1} - (\mathbf{S}_h^{n+1} \boldsymbol{\psi}_h^{n-1} - \boldsymbol{\psi}_h^{n+1} \mathbf{S}_h^{n+1}) - 2\mathbf{B}_h^{n+1} \right) : \boldsymbol{\chi}_h dV = \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_h} (\mathbf{e}^{-\boldsymbol{\psi}_h^{n+1}} - \mathbf{I}) : \boldsymbol{\chi}_h dV. \tag{15}$$

则式(2), (11), (12)的全离散格式可由式(13)~(15)给出. 若记

$$\mathbf{X}_h = \mathbf{V}_{0,h} \times \mathbf{Q}_h \times \mathbf{\Gamma}_h, \quad \mathbf{U}_h^{n+1} = (\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h^{n+1}),$$

则在 LCR 情形下, Galerkin 有限元近似可表述为: 已知  $\mathbf{U}_h^n \rightarrow \mathbf{X}_h$ , 找到  $\mathbf{U}_h^{n+1} \rightarrow \mathbf{X}_h$ , 使得离散形式(13)~(15)对所有测试函数  $\mathbf{V}_h = (\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\chi}_h) \in \mathbf{X}_h$  成立.

## 2.2 稳定化方法

### 2.2.1 LCR-SUPG 稳定化方法

SUPG 方法通过对测试函数沿流线方向引入一个稳定化项进行修正, 以增强沿流动方向的数值稳定性<sup>[3]</sup>. 相应地, 对对数构象张量表示后的 Oldroyd-B 模型应用 SUPG 方法时, 只需在式(11)两边同时乘以修正的测试函数  $\boldsymbol{\chi} + \eta \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\chi}$ , 并在区域  $\Omega$  上积分, 可得 LCR-SUPG 格式下的本构方程, 连续性方程和动量方程可由式(2), (12)给出. 其中稳定化参数取  $\eta = \frac{\max h}{\|\mathbf{u}\|}$ . 从而 LCR-SUPG 稳定化方案的全离散格式可由下列方程给出:

$$\int_{\Omega_h} \left( \rho \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} \cdot \mathbf{v}_h + \rho (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h + 2\eta D(\mathbf{u}_h^{n+1}) : D(\mathbf{v}_h) \right) dV - \int_{\Omega_h} p_h^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v}_h dV = \int_{\Omega_h} \mathbf{f}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h dV - \frac{\eta p}{\lambda} \int_{\Omega_h} (e^{\boldsymbol{\psi}_h^{n+1}} - \mathbf{I}) : \nabla \mathbf{v}_h dV, \quad (16)$$

$$\int_{\Omega_h} q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} dV = 0, \quad (17)$$

$$\int_{\Omega_h} \left( \frac{\boldsymbol{\psi}_h^{n+1} - \boldsymbol{\psi}_h^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla) \boldsymbol{\psi}_h^{n+1} - (\mathbf{S}_h^{n+1} \boldsymbol{\psi}_h^{n+1} - \boldsymbol{\psi}_h^{n-1} \mathbf{S}_h^{n+1}) - 2\mathbf{B}_h^{n+1} \right) : (\boldsymbol{\chi}_h + \eta_h^n \mathbf{u}_h^n \nabla \boldsymbol{\chi}_h) dV = \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_h} (e^{-\boldsymbol{\psi}_h^{n+1}} - \mathbf{I}) : (\boldsymbol{\chi}_h + \eta_h^n \mathbf{u}_h^n \nabla \boldsymbol{\chi}_h) dV. \quad (18)$$

### 2.2.2 LCR-DEVSS-G 稳定化方法

该方法是离散 EVSS 梯度(discrete EVSS gradient)方法<sup>[4]</sup>. 为增强 Oldroyd-B 模型中牛顿应力的贡献, 为动量方程的离散形式引入一个稳定化的椭圆算子  $\mathbf{G}$ , 如果精确解恢复, 则该椭圆算子自动消失, 因此速度梯度的  $L^2$  投影满足

$$\mathbf{G} - \nabla \mathbf{u} = 0, \quad (19)$$

将式(19)与对数构象表示后的动量方程(12)相结合, 可得引入椭圆算子后的格式为

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) = -\nabla p + (\beta + \theta) \nabla^2 \mathbf{u} - \theta \nabla \cdot \mathbf{G} + \frac{\eta p}{\lambda} \nabla \cdot (e^{\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{I}), \quad (20)$$

其中  $\beta$  是黏度比, 稳定化参数  $\theta = 1 - \beta$ . 从而 LCR-DEVSS-G 格式可由式(2), (11), (19), (20)给出. 进而类似 LCR 问题的变分过程可得到该格式对应的弱形式. 相应地, LCR-DEVSS-G 稳定化方案的全离散格式可由下列方程给出(空间定义均与 2.1 节一致, 椭圆算子及其测试函数均属于空间  $\mathbf{\Gamma}_c$ ):

$$\int_{\Omega_h} \left( \rho \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} \cdot \mathbf{v}_h + \rho (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h + (\theta + \beta) \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} : \nabla \mathbf{v}_h \right) dV - \int_{\Omega_h} p_h^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v}_h dV = \int_{\Omega_h} \mathbf{f}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h dV - \theta \int_{\Omega_h} \nabla \cdot \mathbf{G}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h dV - \frac{\eta p}{\lambda} \int_{\Omega_h} (e^{\boldsymbol{\psi}_h^{n+1}} - \mathbf{I}) : \nabla \mathbf{v}_h dV, \quad (21)$$

$$\int_{\Omega_h} (\mathbf{G}_h^{n+1} - \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}) \cdot \mathbf{R}_h dV = 0, \quad (22)$$

$$\int_{\Omega_h} q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} dV = 0, \quad (23)$$

$$\int_{\Omega_h} \left( \frac{\boldsymbol{\psi}_h^{n+1} - \boldsymbol{\psi}_h^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla) \boldsymbol{\psi}_h^{n+1} - (\mathbf{S}_h^{n+1} \boldsymbol{\psi}_h^{n+1} - \boldsymbol{\psi}_h^{n-1} \mathbf{S}_h^{n+1}) - 2\mathbf{B}_h^{n+1} \right) : \boldsymbol{\chi}_h dV = \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_h} (e^{-\boldsymbol{\psi}_h^{n+1}} - \mathbf{I}) : \boldsymbol{\chi}_h dV. \quad (24)$$

## 3 数值算例

下面基于 FEniCS 平台对平面 Poiseuille 流和经典的圆柱绕流算例进行模拟, 对两种算法的准确

性、稳定性及计算效率进行对比分析. 图 1 为求解算法流程框图.

### 3.1 Poiseuille 流

平面 Poiseuille 流是一个有精确解<sup>[13]</sup>的基准问题, 可用来验证及对比求解器的准确性, 其精确解由式(25)给出. 设计算域是一个长为 6、宽为 1 的二维通道, 以水平方向为  $x$  轴, 流体在  $x=0$  处流入, 在  $x=6$  处流出, 时间步长设为  $\Delta t=0.001$ , 无量纲数  $Wi=\lambda U/L$ ,  $Re=0.1$ , 溶剂黏度  $\eta_s=0.1$ , 聚合物黏度  $\eta_p=0.9$ . 图 2(A)给出了该算例的区域以及边界条件设置, 入口处速度设为  $u_x=0.4y(1-y)$ ,  $u_y=0$ , 上下壁面采取无滑移边界条件, 出口处压力为  $p=0$ , 应力设为 Neumann 边界条件. 图 2(B)为该区域的网格剖分. 设  $\mathbf{u}$  表示速度,  $\boldsymbol{\tau}$  表示应力, 则

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.4y(1-y) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} 2Wi(1-\eta_s)\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)^2 & (1-\eta_s)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \\ (1-\eta_s)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

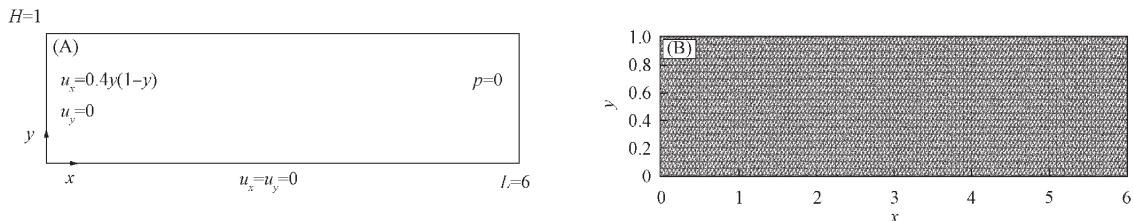


图 2 计算域和边界条件(A)及其网格剖分(B)

Fig. 2 Computational domain and boundary conditions (A) and mesh partitioning (B)

#### 3.1.1 算法验证

为验证耦合算法的准确性, 分别用 LCR-SUPG 和 LCR-DEVSS-G 两种数值算法模拟速度的水平分量  $v_x$  及弹性应力的两个分量  $\tau_{xx}$  和  $\tau_{xy}$ , 数值结果和解析解的对比如图 3 所示. 由图 3 可见,  $Wi=5$  时, 数值解与解析解的结果相吻合, 从而验证了 LCR-SUPG 和 LCR-DEVSS-G 算法的准确性和稳定性(本文 SUPG 稳定化参数的选取在 1.3.1 节给出).

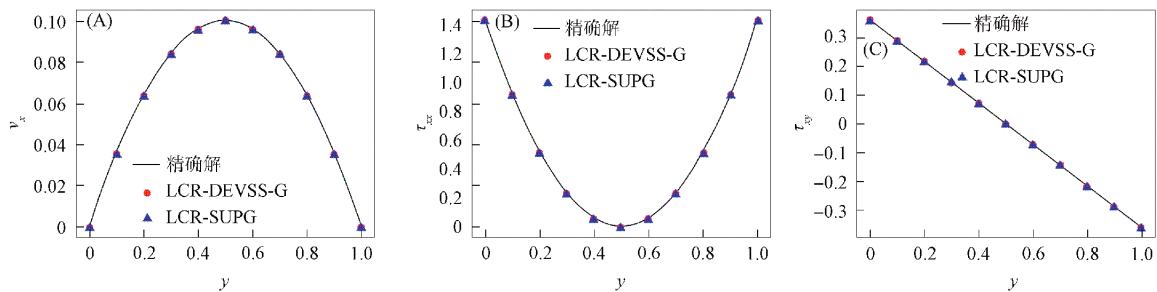


图 3 当  $Wi=5$  时,  $v_x$ (A),  $\tau_{xx}$ (B),  $\tau_{xy}$ (C)与精确解的对比结果

Fig. 3 Comparison results between  $v_x$  (A),  $\tau_{xx}$  (B),  $\tau_{xy}$  (C) and exact solution when  $Wi=5$

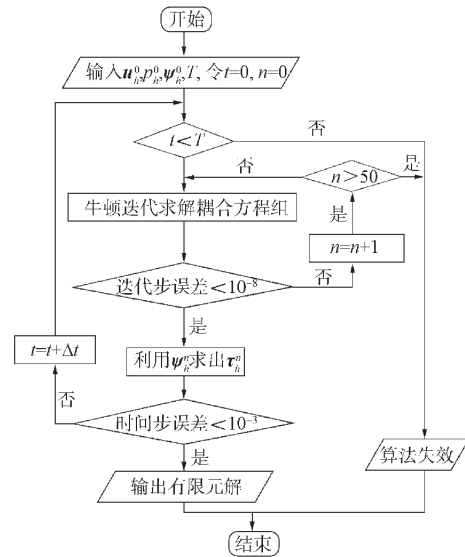


图 1 求解算法流程框图

Fig. 1 Process flow chart of solving algorithm

此外,选取表 1 中的 4 种网格,分别用 LCR-DEVSS-G 和 LCR-SUPG 两种算法计算速度的水平分量、正应力和偏应力的  $L^2$  范数误差估计,结果列于表 2. 由表 2 可见,用 LCR-DEVSS-G 方法求解时,  $v_x$  和  $\tau_{xy}$  的误差相对较小. 虽然在网格较粗时,用 LCR-DEVSS-G 方法求解  $\tau_{xx}$  的误差比用 LCR-SUPG 方法求解时稍大,但随着网格细化,在网格取 M4 时,用 LCR-DEVSS-G 方法求解的误差比用 LCR-SUPG 方法求解时小,因此 LCR-DEVSS-G 方法表现出较快的收敛速度.

表 1 Poiseuille 流问题的网格信息

Table 1 Grid information for Poiseuille flow problem

网格	单元数	$\Delta x = \Delta y$
M1	192	$2.5 \times 10^{-1}$
M2	768	$1.25 \times 10^{-1}$
M3	3 072	$6.25 \times 10^{-2}$
M4	12 288	$3.125 \times 10^{-2}$

表 2 不同方法下  $L^2$  误差估计

Table 2 Error estimation of  $L^2$  under different methods

误差	方法	M1	M2	M3	M4
$e_r(v_x)$	LCR-SUPG	$2.83 \times 10^{-4}$	$2.37 \times 10^{-4}$	$2.46 \times 10^{-4}$	$2.41 \times 10^{-4}$
	LCR-DEVSS-G	$2.52 \times 10^{-4}$	$2.24 \times 10^{-4}$	$2.20 \times 10^{-4}$	$2.01 \times 10^{-4}$
$e_r(\tau_{xx})$	LCR-SUPG	$2.28 \times 10^{-5}$	$1.89 \times 10^{-5}$	$1.69 \times 10^{-5}$	$1.59 \times 10^{-5}$
	LCR-DEVSS-G	$4.91 \times 10^{-5}$	$4.21 \times 10^{-5}$	$3.07 \times 10^{-5}$	$1.47 \times 10^{-5}$
$e_r(\tau_{xy})$	LCR-SUPG	$5.85 \times 10^{-4}$	$4.34 \times 10^{-4}$	$3.51 \times 10^{-4}$	$3.12 \times 10^{-4}$
	LCR-DEVSS-G	$2.53 \times 10^{-4}$	$1.90 \times 10^{-4}$	$9.62 \times 10^{-5}$	$1.08 \times 10^{-5}$

### 3.1.2 计算效率对比

下面对比 LCR-SUPG 和 LCR-DEVSS-G 方法的计算效率,并与 LCR 方法本身的计算效率进行对比. 在  $Wi=5$  时,分别采用表 1 中的 4 种网格,用上述两种方法求解 Poiseuille 流问题,计算每种方法在不同网格下所需的 CPU 时间,结果列于表 3. 由表 3 可见,LCR-SUPG 方法所需的 CPU 时间在不同网格下始终最高,并随网格细化增长的较快. 而 LCR-DEVSS-G 方法所需的 CPU 时间始终最少,且网格越细,LCR-DEVSS-G 方法计算效率的优势越明显.

表 3 不同方法求解 Poiseuille 流问题所需 CPU 时间

Table 3 CPU time required for solving Poiseuille flow problem by different methods

方法	M1	M2	M3	M4
LCR-SUPG	14.58	62.92	185.30	657.23
LCR	9.84	47.16	159.13	645.87
LCR-DEVSS-G	9.52	44.58	135.70	600.32

### 3.2 圆柱绕流

下面模拟经典的圆柱绕流算例,即 Oldroyd-B 流体在通道内绕过半径为 1 的圆柱体的流动. 通道高  $H=4$ , 由于问题的对称性,本文考虑上半部分的计算区域,如图 4 所示. 入口处的速度设为抛物型速度  $u=1.5(1-y^2/4)$ ,  $v=0$ . 应力在入口处设为 Oldroyd-B 模型的 Poiseuille 流问题的稳态解,即式(25). 为对结果进行比较,其他边界条件与文献[14]一致,在左侧强制流入和右侧强制流出的条件下,上壁和圆柱表面采取无滑移边界条件,在对称面取  $v=0, \tau_{xy}=0$ . 总黏度  $\eta_0 = \eta_p + \eta_s$ , 定义 Reynolds 数和 Weissenberg 数分别为  $Re = \rho UR / \eta_0, Wi = \lambda U / R, U$  为抛物型速度剖面的平均速度. 该算例参数选择为  $\eta_s = 0.59, Re = 1, \rho = 1$ , 时间步长取  $\Delta t = 0.001$ , 所采用的网格信息列于表 4, 其中 VM1, VM2 和 VM3 只在计算 CPU 时间时参与运算,这里采用 VM4. 图 5 给出了网格剖分情况.

在取不同的  $Wi$  值时,分别用 LCR-SUPG 和 LCR-DEVSS-G 方法求解该问题,根据

$$C_D = \int_{\Gamma_S} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_C \cdot \mathbf{e}_1 dS \tag{26}$$

计算圆柱表面的阻力系数,其中  $\mathbf{n}_C$  是垂直于圆柱表面的单位向量. 并与已有方法做比较,结果如表 5

和图 6 所示. 由表 5 和图 6 可见, 使用上述方法的计算结果与文献结果吻合较好, LCR-DEVSS-G 模拟的结果更接近文献[14]和文献[15]的结果. 在模拟过程中, 采用 LCR-DEVSS-G 方法计算时, 选取相对较大的时间步长也能得到与其他两种方法相同的阻力系数.

表 4 网格信息及每个变量的自由度

Table 4 Grid information and degrees of freedom for each variable

网格	节点数	单元数	最小网格尺寸	$p$	$u$	$\tau$
VM1	3 345	6 189	0.033 009 50	3 345	12 878	25 756
VM2	4 675	8 583	0.028 346 30	4 675	17 932	35 864
VM3	11 115	21 262	0.017 269 40	11 115	43 491	86 982
VM4	64 606	126 181	0.007 432 66	64 606	255 392	510 784

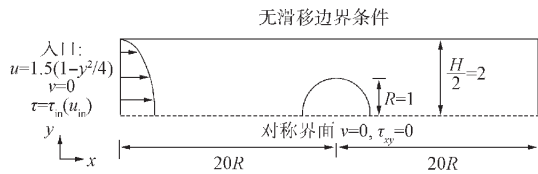


图 4 圆柱绕流示意图

Fig. 4 Schematic diagram of flow around circular cylinder

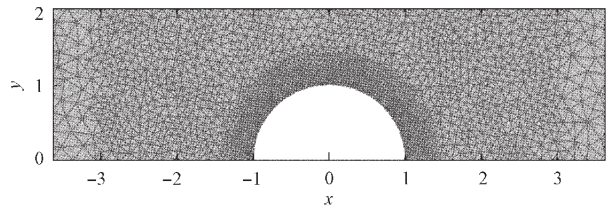


图 5 圆柱绕流问题表 4 中 VM4 所述网格的剖分图

Fig. 5 Subdivision graph of grid described by VM4 in Table 4 for problem of flow around circular cylinder

表 5  $Wi = 0 \sim 1$  时, 不同方法得到的圆柱表面阻力系数

Table 5 Drag coefficients on surface of cylinder obtained by different methods when  $Wi = 0 \sim 1$

$Wi$	LCR-SUPG	LCR-DEVSS-G	文献[14]	文献[15]	文献[16]
0.1	130.352 6	130.357 5	130.364	130.355	130.358
0.2	126.621 6	126.622 4	126.626	126.32	126.622
0.3	123.191 0	123.197 5	123.192	123.210	123.190
0.4	120.594 1	120.596 4	120.593	120.607	120.595
0.5	118.832 1	118.835 8	118.826	118.838	118.829
0.6	117.802 7	117.779 5	117.776	117.787	117.794
0.7	117.334 3	117.319 0	117.316	117.323	117.331
0.8	117.436 8	117.355 1	117.360*	117.357	117.404
0.9	117.889 2	117.784 6	117.810*	117.851	117.897*
1.0	118.572 1	118.502 0	118.550*	118.518	118.636*

注: \* 表示解未必始终收敛, 而是在发散前收敛到一个表观值.

### 3.2.1 计算效率比较

表 6 列出了当  $Wi = 0.1$ , 分别用 LCR-SUPG, LCR-DEVSS-G 和 LCR 方法求解上述圆柱绕流问题时的计算效率. 由表 6 可见: LCR-SUPG 方法的计算时间始终最高, 说明其计算效率较低; LCR-DEVSS-G 方法在所有网格单元数下的 CPU 时间最低; LCR 方法所需的计算时间介于两者之间. 随着网格单元数增加, LCR-SUPG 方法的增长速率更快, 表明其计算复杂度对网格数更敏感. LCR-DEVSS-G 方法在不同网格下均表现出更好的计算效率, 因此, 在大规模计算中, 推荐使用 LCR-DEVSS-G 方法.

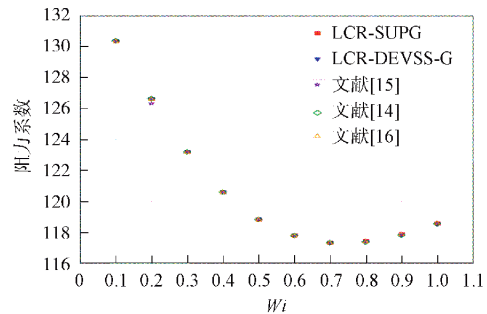


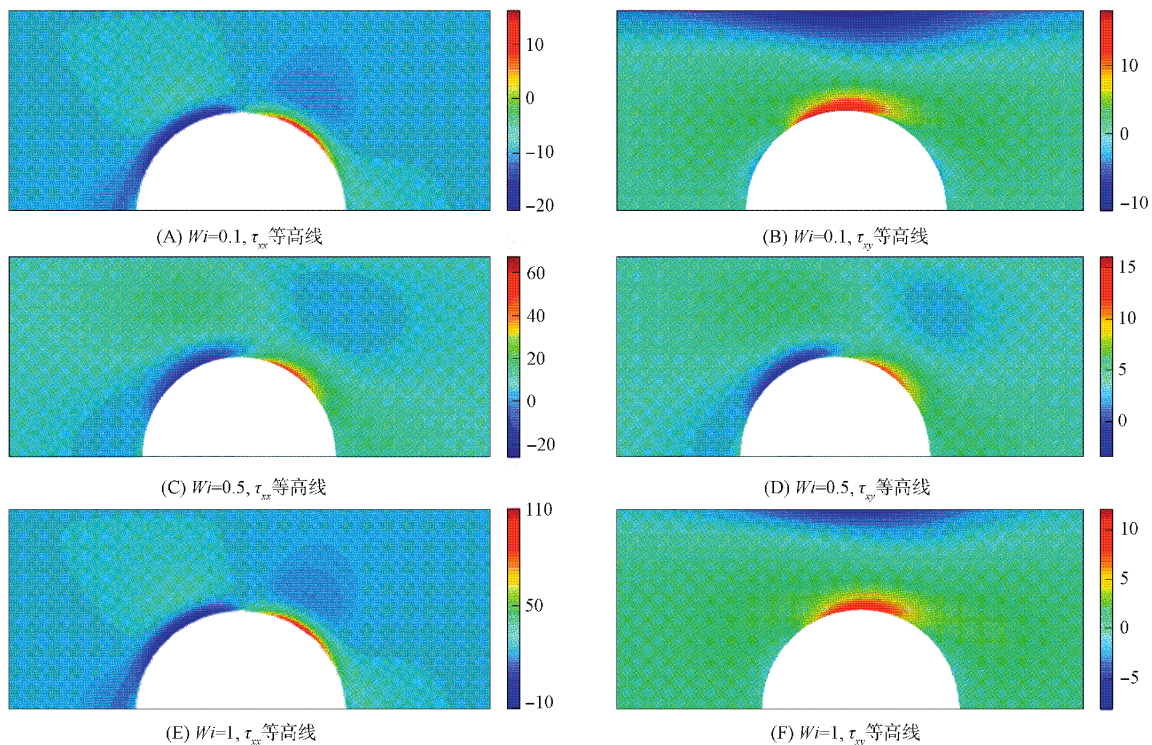
图 6 不同方法计算圆柱表面阻力系数的对比结果  
Fig. 6 Comparison results of different methods for calculating drag coefficients on surface of cylinder

表 6 不同方法求解圆柱绕流问题所需的 CPU 时间

方法	M1	M2	M3	M4
LCR-SUPG	644.94	3 306.89	7 154.35	11 666.78
LCR	413.94	2 814.30	6 816.15	11 183.35
LCR-DEVSS-G	396.25	2 240.38	6 138.28	10 487.36

## 3.2.2 等高线图

图 7 展示了用 LCR-DEVSS-G 方法求解  $Wi$  值分别为 0.1, 0.5, 1 时圆柱附近的法向力  $\tau_{xx}$  和剪切力  $\tau_{xy}$  的等高线图(参数值的选取与 2.2 节一致). 由图 7 可见, 圆柱体周围边界层中的法向力  $\tau_{xx}$  随  $Wi$  值增加而增加, 且圆柱后方尾部值也随之增加, 而剪切力  $\tau_{xy}$  在圆柱周围及顶部随  $Wi$  值增加反而略有下降. 剪应力的降低主要是因为圆柱体顶部  $\partial u / \partial y$  的小幅减小所致, 与流量相关的法向力对总应力的贡献远高于与流量相关的剪切力, 这与文献[14]中的结果基本一致.

图 7 LCR-DEVSS-G 方法求解圆柱附近法向力  $\tau_{xx}$  和剪切力  $\tau_{xy}$  的等高线图Fig. 7 Contour plots of normal force  $\tau_{xx}$  and shear force  $\tau_{xy}$  near cylinder solved by LCR-DEVSS-G method

综上所述, 本文针对黏弹性 Oldroyd-B 流体流动问题, 基于 LCR-SUPG 和 LCR-DEVSS-G 稳定化方法对 Poiseuille 流和圆柱绕流进行了模拟. 模拟结果表明, LCR-DEVSS-G 稳定化方法更具优势, 主要表现在: 1) LCR-DEVSS-G 方法计算效率明显高于 LCR 和 LCR-SUPG 方法; 2) 在模拟过程中相对于 LCR-SUPG 方法, LCR-DEVSS-G 方法稳定化参数的选取较容易, 物理意义较明确; 3) 继承 LCR 方法本身优势的同时能弱化相容性条件, 有助于避免数值计算中可能出现的不稳定现象.

## 参 考 文 献

- [1] SUN H G, JIANG Y H, ZHANG Y, et al. A Review of Constitutive Models for Non-Newtonian Fluids [J]. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2024, 27(4): 1483-1526.
- [2] RENARDY M, THOMASES B. A Mathematician's Perspective on the Oldroyd B Model: Progress and Future Challenges [J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2021, 293(1): 104573-1-104573-12.
- [3] KAVITHA M, ABHANG L B, VINODKUMAR, et al. Advanced Finite Element Methods for Solving Fluid

- Dynamics Problems in Engineering Applications [J]. *Metallurgical and Materials Engineering*, 2025, 31(3): 201-209.
- [4] HE T. A Brief Review on Partitioned Semi-implicit Coupling Methods in Computational Fluid-Structure Interaction [J]. *Progress in Computational Fluid Dynamics*, 2025, 25(2): 109-122.
- [5] FATTAL R, KUPFERMAN R. Time-Dependent Simulation of Viscoelastic Flows at High Weissenberg Number Using the Log-Conformation Representation [J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2005, 126(1): 23-37.
- [6] BALCI N, THOMASES B, RENARDY M, et al. Symmetric Factorization of the Conformation Tensor in Viscoelastic Fluid Models [J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2011, 166(11): 546-553.
- [7] JAENSSON N O, HULSEN M A. A Fully-Coupled Implementation of the Contravariant Deformation Tensor Formulation for Viscoelastic Flows [J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2024, 334: 105345-1-105345-16.
- [8] DOHERTY W, PHILLIPS T N, XIE Z H. The Log-Conformation Formulation for Single- and Multi-phase Axisymmetric Viscoelastic Flows [J]. *Journal of Computational Physics*, 2024, 508: 113014-1-113014-23.
- [9] KWON Y. Numerical Aspects in Modeling High Deborah Number Flow and Elastic Instability [J]. *Journal of Computational Physics*, 2014, 265: 128-144.
- [10] KE L J, WANG Q K. Numerical Simulation of the Stability of Low Viscosity Ratio Viscoelastic Lid-Driven Cavity Flow Based on the Log-Conformation Representation (LCR) Algorithm [J]. *Mathematics*, 2024, 12(3): 430-1-430-17.
- [11] 郭媛, 王旦霞, 张建文. 黏性 Cahn-Hilliard 方程的二阶 BDF 数值格式 [J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2023, 61(5): 1063-1072. (GUO Y, WANG D X, ZHANG J W. Second-Order BDF Numerical Scheme for Viscous Cahn-Hilliard Equation [J]. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2023, 61(5): 1063-1072.)
- [12] 朱弘泽, 林莉, 周晨光, 等. 弱 Galerkin 有限元法的稳定性 [J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2018, 56(6): 1427-1430. (ZHU H Z, LIN L, ZHOU C G, et al. Stability of Weak Galerkin Finite Element Method [J]. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2018, 56(6): 1427-1430.)
- [13] GAO P, OUYANG J, ZHOU W. Coupling of Finite Element Method and Discontinuous Galerkin Method to Simulate Viscoelastic Flows [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2018, 86(6): 414-432.
- [14] CLAUS S, PHILLIPS T N. Viscoelastic Flow around a Confined Cylinder Using Spectral/hp Element Methods [J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2013, 200: 131-146.
- [15] ALVES M A, PINHO F T, OLIVEIRA P J. The Flow of Viscoelastic Fluids Past a Cylinder: Finite-Volume High-Resolution Methods [J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2001, 97: 207-232.
- [16] DOHERTY W, PHILLIPS T N, XIE Z. A Stabilised Finite Element Framework for Viscoelastic Multiphase Flows Using a Conservative Level-Set Method [J]. *Journal of Computational Physics*, 2023, 477: 111936-1-111936-26.

(责任编辑: 李琦)