doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2025187

四维复 Ginzburg-Landau 方程组解的渐近行为

颜　宇，邹　冉，张晓岭
(河海大学 数学学院，南京 211100)

摘要： 先用 Sobolev 不等式及能量估计等证明四维三次复 Ginzburg-Landau 方程组解的整体存在性；再用 Gronwall 引理和 Hölder 不等式等证明该方程组吸收集的存在性，并给出该方程组最大吸引子的存在性和紧连通性.

关键词： 复 Ginzburg-Landau 方程组；吸引子；Sobolev 不等式；Gronwall 引理
中图分类号： O175.29　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671-5489(2026)02-0227-09

Asymptotic Behavior of Solutions to Four-Dimensional Complex Ginzburg-Landau Equation

YAN Yu, ZOU Ran, ZHANG Xiaoling
(*School of Mathematics, Hohai University, Nanjing* 211100, *China*)

Abstract: We first used Sobolev inequalities and energy estimates to prove the global existence of solutions to the four-dimensional cubic complex Ginzburg-Landau equation. Then, we used the Gronwall lemma and Hölder's inequality to prove the existence of the absorption set of the equation and gave both the existence and compact connectedness of the maximal attractor of the equation.

Keywords: complex Ginzburg-Landau equation; attractor; Sobolev inequality; Gronwall lemma

0　引　言

Ginzburg-Landau 方程是描述超导现象的基本方程，也在流体力学、光学、量子场论等领域应用广泛[1]. 由于该方程具有重要的物理意义，因此备受关注[2-14]. Guo 等[2]研究了二阶 Ginzburg-Landau 方程的全局快速动力学，利用动力系统中半群的性质及 Lipschitz 连续性，证明了该方程的压缩性及有限维指数吸引子的存在性. Doering 等[3]利用惯性流形理论，对复 Ginzburg-Landau 方程的低维行为进行研究，确定了 Fourier 生成维数的严格上界，从而建立了吸引子的有限维数，并得到了流体湍流模型的新结果，以及复 Ginzburg-Landau 方程在低维领域中的相应结果，拓展了吸引子研究的实际价值边界. Kulikov 等[4]通过构造一类特殊的不变流形得到了具有周期性边界条件的广义非局部 Ginzburg-Landau 方程的全局吸引子，并研究了属于全局吸引子解的 Lyapunov 稳定性和轨道稳定性. Bekmaganbetov 等[5]聚焦于含局部周期微观结构的介质域，用弱拓扑分析与均质化方法，讨论了 Ginzburg-Landau 方程吸引子在亚临界、临界以及超临界情况下的行为差异. 考虑到实际应用中普遍存在随机噪声，Zeng 等[6]采用停时策略与均匀尾估计相结合的方法，证明了由超线性 Lévy 噪声驱动

收稿日期： 2025-06-23.
第一作者简介： 颜　宇(2001—)，男，汉族，硕士研究生，从事偏微分方程的研究，E-mail: 241319010004@hhu.edu.cn. **通信作者简介：** 张晓岭(1981—)，女，满族，博士，讲师，从事偏微分方程的研究，E-mail: xlzhang@hhu.edu.cn.
基金项目： 国家自然科学基金(批准号：U2340221)和江苏省自然科学基金(批准号：BK20230026；BK20221497).

的离散随机复 Ginzburg-Landau 方程弱拉回均值随机吸引子的存在性，并建立了不变概率测度的收敛性理论. Chen 等[7]通过对权重函数和耦合参数进行适当的假设，证明了随机离散复 Ginzburg-Landau 方程在加权空间中存在唯一的随机吸引子. Guo 等[8]利用变换、估计等方法证明了耦合 Burgers Ginzburg-Landau 方程全局解的存在性，并证明了全局吸引子的存在性，建立了 Hausdorff 上限和吸引子分形维数的估计. Shu 等[9]利用 Wong-Zakai 逼近、先验估计等方法，研究了在无界域上非自治分数阶随机 Ginzburg-Landau 方程的随机吸引子. Chen 等[10]基于有色噪声的性质和拖尾估计技巧，研究了无界薄域上的非自治随机系统，证明了拉回吸引子的存在唯一性及上半连续性. 上述研究总体都是从理论分析或数值模拟的角度，对 Ginzburg-Landau 方程做不同的假设，得到不同类型的方程在不同区域的吸引子及其渐进行为等结果.

基于此，本文考虑如下四维三次复 Ginzburg-Landau 方程组吸收集和吸引子的存在性：

$$\begin{cases} \partial_t u_1-(\lambda+\mathrm{i}\alpha)\Delta u_1-\gamma u_1=-(\kappa+\mathrm{i}\beta)(|u_1|^2u_1+|u_2|^2u_1), \\ \partial_t u_2-(\lambda+\mathrm{i}\alpha)\Delta u_2-\gamma u_2=-(\kappa+\mathrm{i}\beta)(|u_2|^2u_2+|u_1|^2u_2), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $u_1:=u_1(x,t)$，$u_2:=u_2(x,t)$，$(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+$，$\Omega$ 为 $\mathbb{R}^4$ 的有界开集，$\lambda>0$，$\kappa>0$.

为方便，将方程组(1)写成向量形式：

$$\partial_t \boldsymbol{u}-(\lambda+\mathrm{i}\alpha)\Delta\boldsymbol{u}-\gamma\boldsymbol{u}=-(\kappa+\mathrm{i}\beta)|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{u}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$，且 $|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}|u_1|^2u_1+|u_2|^2u_1\\ |u_2|^2u_2+|u_1|^2u_2\end{pmatrix}$.

相比于 Ginzburg-Landau 方程，复 Ginzburg-Landau 方程组中两个分量的相互作用和影响使得方程组的求解与证明更困难. 为解决该问题，本文利用向量表示方法简化解的表达. 因此下面将根据不同情况分别使用方程组形式和向量形式表示.

1 预备知识

由于本文研究的方程组是定义在复空间上的，因此先给出相应复化空间的符号表示. 记 $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ 为函数空间 X,Y 的复化空间，其中 $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ 中的元素只需将 X,Y 空间中的实函数变为复函数即可. 类似地，可定义 $\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)$ 是 $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 的复化空间，$\mathbb{H}^1(\Omega)\times\mathbb{H}^1(\Omega)$ 是 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 的复化空间. 记 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2\times L^2}$ 为 $\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)$ 或 $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 空间中的标量积，$\|\cdot\|_{L^2\times L^2}$ 为 $\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)$ 或 $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 空间中的范数；记 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1\times H^1}$ 为 $\mathbb{H}^1(\Omega)\times\mathbb{H}^1(\Omega)$ 或 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 上的标量积，$\|\cdot\|_{H^1\times H^1}$ 为 $\mathbb{H}^1(\Omega)\times\mathbb{H}^1(\Omega)$ 或 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 上的范数.

若 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)$，则 $\boldsymbol{u}=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$，其中 $\boldsymbol{u}_j\in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$，$j=1,2$，且

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{L}^2\times\mathbb{L}^2}=\{\|\boldsymbol{u}_1\|_{L^2\times L^2}^2+\|\boldsymbol{u}_2\|_{L^2\times L^2}^2\}^{1/2}.$$

若 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{v}_2$，且 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)$，则

$$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_{\mathbb{L}^2\times\mathbb{L}^2}=\{\langle\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_1\rangle_{L^2\times L^2}+\langle\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_2\rangle_{L^2\times L^2}\}+\mathrm{i}\{\langle\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_1\rangle_{L^2\times L^2}-\langle\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle_{L^2\times L^2}\}.$$

对于 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{H}^1(\Omega)\times\mathbb{H}^1(\Omega)$，定义

$$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\sum_{i=1}^{n}(D_i\boldsymbol{u},D_i\boldsymbol{v}),\qquad \|\boldsymbol{u}\|=\{\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle\}^{1/2},$$

因而有

$$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_{\mathbb{H}^1\times\mathbb{H}^1}=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_{\mathbb{L}^2\times\mathbb{L}^2}+\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle,\qquad \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}^1\times\mathbb{H}^1}=\{\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{L}^2\times\mathbb{L}^2}^2+\|\boldsymbol{u}\|^2\}^{1/2}.$$

此外，用 $B_{L^2\times L^2}(0,\rho)$ 表示在 $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 空间中，以 0 为中心、ρ 为半径的球；$B_{H^1\times H^1}(0,\rho_1)$ 表示在 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 空间中，以 0 为中心、ρ_1 为半径的球.

为讨论方便，下面利用同构关系引入对称双线性连续形式和双线性连续算子. 首先，给出两个 Hilbert 空间 $V\times V$ 和 $H\times H$，满足 $V\times V\subset H\times H$，且 $V\times V$ 在 $H\times H$ 中稠密，$V\times V$ 在 $H\times H$ 中的嵌入是紧的. $V\times V$ 和 $H\times H$ 上的标量积和范数分别用 $((\cdot,\cdot))$，$\|\cdot\|$，$(\cdot,\cdot)$，$|\cdot|$ 表示. 其次，记 $V'\times V'$ 为 $V\times V$ 的对偶空间，满足 $V\times V\subset H\times H\subset V'\times V'$，且 $H\times H$ 在 $V'\times V'$ 中是稠密的，$V\times V$ 在 $H\times H$ 中是稠密的，其嵌入是连续的.

下面考虑 $V\times V$ 空间上的一个对称双线性连续形式 $a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$，且它是强制的，

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\geqslant\alpha\|\boldsymbol{u}\|^2,\qquad\forall\,\boldsymbol{u}\in V\times V.$$

将 a 与线性算子 A 联系在一起，线性算子 A 是 $V\times V$ 到 $V'\times V'$ 的同构映射，并为 $H\times H$ 空间上一个线性无界自伴随算子，其定义域记为

$$D(A)=\{\boldsymbol{u}\in V\times V,\ A\boldsymbol{u}\in H\times H\},$$

且有

$$D(A)\subset V\times V\subset H\times H\subset V'\times V',$$

其中嵌入是连续的，且每个空间在后一个空间是稠密的.

定义一个从 $V\times V$ 映射到 $V'\times V'$ 的线性连续算子 R，该算子同时也从 $D(A)$ 映射到 $H\times H$，且存在 $\theta_1,\theta_2\in[0,1]$ 及两个正数 c_1,c_2，使得

$$|R\boldsymbol{u}|\leqslant c_1\|\boldsymbol{u}\|^{1-\theta_1}|A\boldsymbol{u}|^{\theta_1},\qquad\forall\,\boldsymbol{u}\in D(A),\tag{3}$$

$$|(R\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})|\leqslant c_2\|\boldsymbol{u}\|^{1+\theta_2}|\boldsymbol{u}|^{1-\theta_2},\qquad\forall\,\boldsymbol{u}\in V\times V.\tag{4}$$

假设 $A+R$ 在 $V\times V$ 上是强制的，即

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})+(R\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\geqslant\alpha'\|\boldsymbol{u}\|^2,\quad\forall\,\boldsymbol{u}\in V\times V,\quad\alpha'>0.$$

最后，给出一个从 $V^2\times V^2$ 映射到 $V'\times V'$，同时也从 $D(A)\times D(A)$ 映射到 $H\times H$ 的双线性连续算子 B，满足：

$$(B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v})=0,\qquad\forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V\times V,\tag{5}$$

$$|(B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{w})|\leqslant c_3|\boldsymbol{u}|^{\theta_3}\|\boldsymbol{u}\|^{1-\theta_3}\|\boldsymbol{v}\|\ \|\boldsymbol{w}\|^{\theta_3}|\boldsymbol{w}|^{1-\theta_3},\qquad\forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V\times V,\tag{6}$$

$$|B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|+|B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})|\leqslant c_4\|\boldsymbol{u}\|\ \|\boldsymbol{v}\|^{1-\theta_4}|A\boldsymbol{v}|^{\theta_4},\quad\forall\,\boldsymbol{u}\in V\times V,\quad\forall\,\boldsymbol{v}\in D(A),\tag{7}$$

$$|B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\leqslant c_5|\boldsymbol{u}|^{\theta_5}\|\boldsymbol{u}\|^{1-\theta_5}\|\boldsymbol{v}\|^{1-\theta_5}|A\boldsymbol{v}|^{\theta_5},\quad\forall\,\boldsymbol{u}\in V\times V,\quad\forall\,\boldsymbol{v}\in D(A),\tag{8}$$

其中 c_3,c_4,c_5 是适当的常数，且 $\theta_i\in[0,1]$，$i=3,4,5$. 为简便，设 $B(\boldsymbol{u})=B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$，且对于给定的 $\boldsymbol{f}\in H\times H$，考虑 $H\times H$ 中如下非线性发展方程：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+A\boldsymbol{u}+B(\boldsymbol{u})+R\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f},\qquad\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0.\tag{9}$$

下面给出常用的三类边界条件.

(i) Dirichlet 边界条件：在 $\Gamma\times\mathbb{R}_+$ 上 $u=0$；

(ii) Neumann 边界条件：在 $\Gamma\times\mathbb{R}_+$ 上 $\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{v}}=0$，其中 Γ 为 Ω 的边界，$\boldsymbol{v}$ 是 Γ 上的单位外方向导数；

(iii) u 以 Ω 为周期，其中 $\Omega=[0,L_1]\times[0,L_2]\times[0,L_3]\times[0,L_4]$.

对于边界条件(i)～(iii)，设 $H=\mathbb{L}^2(\Omega)$，且：

1) 在条件(i)下，$V=\mathbb{H}_0^1(\Omega)$，$D(A)=\mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega)\times\mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega)$；

2) 在条件(ii)下，$V=\mathbb{H}^1(\Omega)$，$D(A)=\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{H}^2(\Omega)\times\mathbb{H}^2(\Omega)，在边界\ \Gamma\ 上\dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\boldsymbol{v}}=0\right\}$；

3) 在条件(iii)下，$V=\mathbb{H}_{\mathrm{per}}^1(\Omega)$，$D(A)=\mathbb{H}_{\mathrm{per}}^2(\Omega)\times\mathbb{H}_{\mathrm{per}}^2(\Omega)$.

在上述 3 种情形下，$A\boldsymbol{u}=-\Delta\boldsymbol{u}$. 对于每个 $\eta>0$，$A+\eta I$ 是一个从 $V\times V$ 到其对偶空间 $V'\times V'$ 或从 $D(A)$ 到 $H\times H$ 的同构映射. 利用 Poincaré 不等式可知，对于条件(i)下的 $\eta=0$，结果也同样正确.

定义 1　设 $I=[0,T]$ 为时间区间，$\Omega\subset\mathbb{R}^4$ 为有界开域，初始条件 $\boldsymbol{u}_0\in H$，非线性项 $g\in C(V,V')$，且 g 在有界集上有界. 若函数 $\boldsymbol{u}\in C(I,V)$，且满足以下积分方程：

$$\boldsymbol{u}(t)=S(t)\boldsymbol{u}_0+\int_0^t S(t-s)g(\boldsymbol{u}(s))\mathrm{d}s,\qquad t\in I,$$

则称 $\boldsymbol{u}$ 是方程组(1)的一个强解，其中 $S(t)$ 为由算子 $(\lambda+\mathrm{i}\alpha)\Delta$ 生成的解析半群，

$$g(\boldsymbol{u})=\gamma\boldsymbol{u}-(\kappa+\mathrm{i}\beta)|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{u}.$$

定义 2　设 $\mathscr{B}$ 是 H 的一个子集，$\mathscr{U}$ 是一个包含 $\mathscr{B}$ 的开集. 如果 $\mathscr{U}$ 的任何有界集合的轨道在一段时间后都进入到 $\mathscr{B}$ 中，则 $\mathscr{B}$ 在 $\mathscr{U}$ 中是吸收的，即 $\forall\,\mathscr{B}_0\subset\mathscr{U}$，$\mathscr{B}_0$ 有界，$\exists\,t_1(\mathscr{B}_0)$，使得 $\forall\,t\geqslant t_1(\mathscr{B}_0)$，有 $S(t)\mathscr{B}_0\subset\mathscr{B}$，也称 $\mathscr{B}$ 吸收 $\mathscr{U}$ 的有界集，$\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{U}$ 的一个吸收集.

定义3 对于集合 $\mathscr{O}\subset H$，若其满足下列条件：

1) $\mathscr{O}$ 是一个不变集，即 $\forall t\geqslant 0$，$S(t)\mathscr{O}=\mathscr{O}$；

2) $\mathscr{O}$ 有一个开邻域 $\mathscr{U}$，使得对于 $u_0\in\mathscr{U}$，当 $t\to\infty$ 时，有 $S(t)u_0\to\mathscr{O}$，即当 $t\to\infty$ 时，有 $\operatorname{dist}(S(t)u_0,\mathscr{O})\to 0$.

则称 $\mathscr{O}$ 为吸引子.

引理1(Gronwall 引理)[15] 设 g,h,y 为3个在区间 $[t_0,+\infty]$ 上的正局部可积函数，y' 也是在区间 $[t_0,+\infty]$ 上的局部可积函数，且满足对于 $t\geqslant t_0$，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\leqslant gy+h,\quad \int_t^{t+r}g(s)\mathrm{d}s\leqslant a_1,\quad \int_t^{t+r}h(s)\mathrm{d}s\leqslant a_2,\quad \int_t^{t+r}y(s)\mathrm{d}s\leqslant a_3,$$

其中 r,a_1,a_2,a_3 均为正数. 则对任意的 $t\geqslant t_0$，有

$$y(t+r)\leqslant\left(\frac{a_3}{r}+a_2\right)\exp\{a_1\}.$$

定理1[15] 假设式(3)~(8)成立，若 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}_0\in H\times H$，则存在方程(9)的一个唯一解 $\boldsymbol{u}$，使得

$$\boldsymbol{u}\in C([0,T];H)\cap\mathbb{L}^2(0,T;V)\times C([0,T];H)\cap\mathbb{L}^2(0,T;V),\qquad \forall T>0.$$

此外，对于 $t>0$，$\boldsymbol{u}$ 关于 t 在 $D(A)$ 上是解析的，且从 $H\times H$ 到 $D(A)$ 的映射 $\boldsymbol{u}_0\to\boldsymbol{u}(t)$ 是连续的.

如果 $\boldsymbol{u}_0\in V\times V$，则

$$\boldsymbol{u}\in C([0,T];V)\cap\mathbb{L}^2(0,T;D(A))\times C([0,T];V)\cap\mathbb{L}^2(0,T;D(A)),\qquad \forall T>0.$$

定理2[15] 假设 $H\times H$ 是一个度量空间，C 是 $H\times H$ 中的一个开集，B 是 C 中的一个有界集且满足 B 在 C 中是吸收的，若定义在 $H\times H$ 上的算子 $S(t)$ 给定，且满足以下条件：

1) $\begin{cases} S(t+s)=S(t)\cdot S(s),\ \forall s,t\geqslant 0, \\ S(0)=I(\text{单位映射}); \end{cases}$

2) $\forall t\geqslant 0$，$S(t)$ 是一个从 $H\times H$ 映射到自身的连续(非线性)算子；

3) 当 t 足够大时，算子 $S(t)$ 是一致紧的，即对每个有界集 $\mathscr{B}$，存在取决于 $\mathscr{B}$ 的 t_0，使得 $\bigcup\limits_{t\geqslant t_0}S(t)\mathscr{B}$ 在 $H\times H$ 上是相对紧的.

则 B 的 ω-极限集，即 $A=\omega(B)$ 是一个紧的吸引子，它吸收 C 的有界集，且它是 C 中最大的有界吸引子(对于包含关系).

此外，若 $H\times H$ 是一个 Banach 空间，C 是凸的，则对任意的 $\boldsymbol{u}_0\in H\times H$，从 $\mathbb{R}_+$ 到 $H\times H$ 的映射 $t\to S(t)\boldsymbol{u}_0$ 是连续映射，且 A 也是连通的.

2 主要结果

定理3 假设方程组(1)中的 $\lambda>0$，$\kappa>0$，则对任意给定的初值 $\boldsymbol{u}_0\in H\times H$，存在唯一解 $\boldsymbol{u}$ 满足 $\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0$，使得对 $\forall T<\infty$，有

$$\boldsymbol{u}\in C([0,T];H)\cap L^2(0,T;V)\times C([0,T];H)\cap L^2(0,T;V).$$

此外，对 $\forall t>0$，映射 $\boldsymbol{u}_0\to\boldsymbol{u}(t)$ 是从 $H\times H$ 到 $H\times H$ 的连续映射. 如果 $\boldsymbol{u}_0\in V\times V$，则对 $\forall T<\infty$，有

$$\boldsymbol{u}\in C([0,T];V)\cap L^2(0,T;D(A))\times C([0,T];V)\cap L^2(0,T;D(A)).$$

证明：记 $\boldsymbol{u}^{(1)},\boldsymbol{u}^{(2)}$ 分别为 $\boldsymbol{u}$ 的实部和虚部. 令 $H=\mathbb{L}^2(\Omega)$，$V=\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ 或 $\mathbb{H}^1(\Omega)$ 或 $\mathbb{H}_{\mathrm{per}}^1(\Omega)$. 令

$$R\boldsymbol{u}=-(\gamma+1)\boldsymbol{u}=-(\gamma+1)\{\boldsymbol{u}^{(1)},\boldsymbol{u}^{(2)}\},\qquad A=(\lambda+\mathrm{i}\alpha)(-\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}),$$

即对于 $\boldsymbol{u}=\{\boldsymbol{u}^{(1)},\boldsymbol{u}^{(2)}\}$，有

$$A\boldsymbol{u}=\begin{cases}\lambda(-\Delta\boldsymbol{u}^{(1)}+\boldsymbol{u}^{(1)})-\alpha(-\Delta\boldsymbol{u}^{(2)}+\boldsymbol{u}^{(2)}),\\ \alpha(-\Delta\boldsymbol{u}^{(1)}+\boldsymbol{u}^{(1)})+\lambda(-\Delta\boldsymbol{u}^{(2)}+\boldsymbol{u}^{(2)});\end{cases}$$

对于 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in D(A)$ 或 $V\times V$，有

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\lambda\{\langle\boldsymbol{u}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(1)}\rangle_{V\times V}+\langle\boldsymbol{u}^{(2)},\boldsymbol{v}^{(2)}\rangle_{V\times V}\}-\alpha\{\langle\boldsymbol{u}^{(2)},\boldsymbol{v}^{(1)}\rangle-\langle\boldsymbol{u}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(2)}\rangle\}.$$

由于 $B(\boldsymbol{u})=B(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u})$，因此有

$$(B(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}),\boldsymbol{w})=\int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2\{(\kappa v^{(1)}-\beta v^{(2)})w^{(1)}+(\beta v^{(1)}+\kappa v^{(2)})w^{(2)}\}\mathrm{d}x,\qquad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V\times V,$$

也可写为

$$B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\begin{cases}|\boldsymbol{u}|^2(\kappa v^{(1)}-\beta v^{(2)}),\\ |\boldsymbol{u}|^2(\beta v^{(1)}+\kappa v^{(2)}).\end{cases}$$

利用 Sobolev 嵌入定理可知，$\forall s<\infty$，$H^1(\Omega)\subset L^s(\Omega)$. 算子 B 将空间 $V^2\times V^2$ 映射到 $V'\times V'$ 甚至到 $H\times H$，算子 $B(\cdot,\cdot)$ 是非线性的，且满足：

$$(B(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v})=\kappa\int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2\mathrm{d}x\geqslant 0,\qquad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V\times V.$$

此外，有

$$\|B(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\|^2_{L^2\times L^2}\leqslant 2(\kappa^2+\beta^2)\int_\Omega|\boldsymbol{u}|^4|\boldsymbol{v}|^2\mathrm{d}x\leqslant 2(\kappa^2+\beta^2)\left(\int_\Omega|\boldsymbol{u}|^8\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_\Omega|\boldsymbol{v}|^4\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant$$

$$c_1'(\kappa^2+\beta^2)\|\boldsymbol{u}\|^4_{\mathrm{H}^{3/4}\times\mathrm{H}^{3/4}}\|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathrm{H}^{1/2}\times\mathrm{H}^{1/2}}.$$

最后利用插值可得

$$\|B(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\|^2_{L^2\times L^2}\leqslant(\kappa^2+\beta^2)\|\boldsymbol{u}\|_{L^2\times L^2}\|\boldsymbol{u}\|^3_{H^1\times H^1}\|\boldsymbol{v}\|^{1/2}_{L^2\times L^2}\|\boldsymbol{v}\|^{1/2}_{H^1\times H^1}.$$

因此，双线性连续算子 B 满足定理 1 的条件，从而定理 1 成立. 该定理可定义半群 $S(t)$. 对于每个 $t\geqslant 0$，定义从 $H\times H$ 映射到自身的算子 $S(t)$ 为

$$S(t):\boldsymbol{u}_0\to\boldsymbol{u}(t).$$

显然该算子满足定理 2 的条件 1)，且是从 $H\times H$ 到自身甚至从 $H\times H$ 到 $D(A)$ 的连续映射，因此定理 2 的条件 2)也满足. 证毕.

定理 4　假设方程组(1)也满足边界条件(10)，(11)或(12)，则在复空间 $\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)$ 中存在一个紧连通的最大吸引子 σ，使得 σ 吸引复空间 $\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)$ 中的有界集，同时 σ 也是 $\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)$ 中有界函数不变集合中的最大集.

证明：要验证吸引子的存在性，需先说明方程组在空间 $H\times H$ 和 $V\times V$ 中存在吸收集.

1) $H\times H$ 空间中方程组吸收集的存在性.

在式(2)左右两端同乘 $\overline{\boldsymbol{u}}=(\overline{u}_1,\overline{u}_2)$，得

$$\partial_t\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}-(\lambda+\mathrm{i}\alpha)\Delta\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}-\gamma\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}=-(\kappa+\mathrm{i}\beta)|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{u}},$$

分别计算各项得

$$\partial_t\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}=(\partial_t u_1,\partial_t u_2)\cdot(\overline{u}_1,\overline{u}_2)=\partial_t u_1\cdot\overline{u}_1+\partial_t u_2\cdot\overline{u}_2,$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}=(u_1,u_2)\cdot(\overline{u}_1,\overline{u}_2)=u_1\overline{u}_1+u_2\overline{u}_2=|u_1|^2+|u_2|^2,$$

$$|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}=(|u_1|^2u_1+|u_2|^2u_1,|u_2|^2u_2+|u_1|^2u_2)\cdot(\overline{u}_1,\overline{u}_2)=$$

$$|u_1|^2u_1\overline{u}_1+|u_2|^2u_1\overline{u}_1+|u_2|^2u_2\overline{u}_2+|u_1|^2u_2\overline{u}_2=|u_1|^4+|u_2|^4.\tag{10}$$

对式(10)在 Ω 上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega(|u_1|^2+|u_2|^2)\mathrm{d}x-(\lambda+\mathrm{i}\alpha)\int_\Omega(\Delta u_1\cdot\overline{u}_1+\Delta u_2\cdot\overline{u}_2)\mathrm{d}x-\gamma\int_\Omega(|u_1|^2+|u_2|^2)\mathrm{d}x=$$

$$-(\kappa+\mathrm{i}\beta)\int_\Omega(|u_1|^4+|u_2|^4)\mathrm{d}x.$$

对 $\int_\Omega\Delta u_1\cdot\overline{u}_1\mathrm{d}x$ 使用 Green 公式，得

$$-\int_\Omega\Delta u_1\cdot\overline{u}_1\mathrm{d}x=-\int_\Gamma\frac{\partial u_1}{\partial\boldsymbol{\nu}}\overline{u}_1\mathrm{d}\Gamma+\int_\Omega\nabla u_1\cdot\nabla\overline{u}_1\mathrm{d}x.$$

由于 $\int_\Gamma\frac{\partial u_1}{\partial\boldsymbol{\nu}}u_1\mathrm{d}\Gamma=0$，因此 $-\int_\Omega\Delta u_1\cdot\overline{u}_1\mathrm{d}x=\int_\Omega\nabla u_1\cdot\nabla\overline{u}_1\mathrm{d}x=\|u_1\|_{H^1}$. 同理可得

$$-\int_\Omega\Delta u_2\cdot\overline{u}_2\mathrm{d}x=\int_\Omega\nabla u_2\cdot\nabla\overline{u}_2\mathrm{d}x=\|u_2\|_{H^1}.\tag{11}$$

由 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$，$|\boldsymbol{u}|^2=|u_1|^2+|u_2|^2$，取方程(11)的实部并简化为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2\times L^2}^2+\lambda\{\|u_1\|_{H^1}^2+\|u_2\|_{H^1}^2\}+\kappa\{\|u_1\|_{L^4}^4+\|u_2\|_{L^4}^4\}-\gamma\|\boldsymbol{u}\|_{L^2\times L^2}^2=0,$$

即

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2\times L^2}^2+\lambda\|\boldsymbol{u}\|_{H^1\times H^1}^2+\kappa\|\boldsymbol{u}\|_{L^4\times L^4}^4-\gamma\|\boldsymbol{u}\|_{L^2\times L^2}^2=0. \tag{12}$$

下面对 γ 的取值进行讨论. 当 $\gamma\leqslant 0$ 时, 为平凡的动力学. 当 $\gamma<0$ 时, 由式(12)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2\times L^2}^2-\gamma\|\boldsymbol{u}\|_{L^2\times L^2}^2\leqslant 0. \tag{13}$$

对式(13)积分得

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|_{L^2\times L^2}^2\leqslant\|\boldsymbol{u}(0)\|_{L^2\times L^2}^2\mathrm{e}^{\gamma t}.$$

因此, 当 $t\to\infty$ 时, 对任意的 $\boldsymbol{u}_0\in\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)$, 有

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|_{L^2\times L^2}^2\to 0. \tag{14}$$

当 $\gamma=0$ 时, 由 Hölder 不等式有

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2\times L^2}^2\leqslant|\Omega|^{1/2}\|\boldsymbol{u}\|_{L^4\times L^4}^2.$$

令 $y(t)=\|\boldsymbol{u}(t)\|_{L^2\times L^2}^2$, 结合式(12)得

$$y'+\frac{2\kappa}{|\Omega|}y^2\leqslant 0,$$

积分得

$$\frac{1}{y(0)}+\frac{2\kappa}{|\Omega|}t\leqslant\frac{1}{y(t)}.$$

可见式(14)仍然成立.

当 $\gamma>0$ 时, 有以下不等式:

$$\frac{\kappa}{2}s^4-2\gamma s^2\geqslant-\frac{2}{\kappa}\gamma^2,\qquad\forall s\in\mathbb{R}. \tag{15}$$

对式(15), 取 $s=|\varphi|$(其中 $\varphi\in L^4(\Omega)$), 并在 Ω 上积分得

$$\frac{\kappa}{2}\int_\Omega|\varphi|^4\mathrm{d}x-2\gamma\int_\Omega|\varphi|^2\mathrm{d}x\geqslant-\frac{2}{\kappa}\gamma^2|\Omega|,\qquad\forall\varphi\in\mathbb{L}^4(\Omega), \tag{16}$$

结合式(13),(16)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2\times L^2}^2+2\lambda\|\boldsymbol{u}\|_{H^1\times H^1}^2+\kappa\|\boldsymbol{u}\|_{L^4\times L^4}^4+2\gamma\|\boldsymbol{u}\|_{L^2\times L^2}^2\leqslant\frac{2\gamma^2}{\kappa}|\Omega|, \tag{17}$$

利用引理1可得

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|_{L^2\times L^2}^2\leqslant\|\boldsymbol{u}(0)\|_{L^2\times L^2}^2\mathrm{e}^{-\gamma t}+\frac{\gamma}{\kappa}|\Omega|(1-\mathrm{e}^{-\gamma t}),\qquad\forall t\geqslant 0,$$

从而有

$$\lim_{t\to\infty}\sup\|\boldsymbol{u}(t)\|_{L^2\times L^2}^2\leqslant\rho_0^2,$$

其中 $\rho_0^2=\dfrac{\gamma}{\kappa}|\Omega|$. 因此, 对于 $\rho_0'\geqslant\rho_0$, $B_{L^2\times L^2}(0,\rho_0')$ 相对于半群 $S(t)$ 是正不变的. 记 $B_0=B_{L^2\times L^2}(0,\rho_0')$, 取 $B\subset B_{L^2\times L^2}(0,R)$ 为有界集, 取 $\boldsymbol{u}_0\in B$ 且 $t>t_0(B,B_0)$, 对式(17)从 t 到 $t+r(r>0)$ 关于 s 积分, 对任意的 $t\geqslant t_0$, $r>0$, 有

$$\int_t^{t+r}(2\lambda\|\boldsymbol{u}\|_{H^1\times H^1}^2+\kappa\|\boldsymbol{u}\|_{L^4\times L^4}^4+2\gamma\|\boldsymbol{u}\|_{L^2\times L^2}^2)\mathrm{d}s\leqslant(\rho_0')^2+\frac{2r\gamma^2}{\kappa}|\Omega|. \tag{18}$$

因此, 对于 $t\geqslant t_0=t_0(B,B_0)$, 有 $S(t)B\subset B_0$, 即 B_0 吸收 $B_{L^2\times L^2}(0,R)$ 的有界集, 其中

$$t_0=\frac{1}{\gamma}\log\frac{R^2}{(\rho_0')^2-\rho_0^2}. \tag{19}$$

2) $V\times V$ 空间中方程组吸收集的存在性.

先在式(2)左右两端同乘 $-\Delta\bar{\boldsymbol{u}}=(-\Delta\bar{u}_1,-\Delta\bar{u}_2)$, 得

$$\partial_t \boldsymbol{u}\cdot(-\Delta\bar{\boldsymbol{u}})-(\lambda+\mathrm{i}\alpha)\Delta\boldsymbol{u}\cdot(-\Delta\bar{\boldsymbol{u}})-\gamma\boldsymbol{u}\cdot(-\Delta\bar{\boldsymbol{u}})=-(\kappa+\mathrm{i}\beta)|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{u}\cdot(-\Delta\bar{\boldsymbol{u}}),$$

分别计算各项，得

$$\begin{aligned}
&\partial_t\boldsymbol{u}\cdot(-\Delta\bar{\boldsymbol{u}})=(\partial_t u_1,\partial_t u_2)\cdot(-\Delta\bar{u}_1,-\Delta\bar{u}_2)=-(\partial_t u_1\cdot\Delta\bar{u}_1+\partial_t u_2\cdot\Delta\bar{u}_2),\\
&\Delta\boldsymbol{u}\cdot\Delta\bar{\boldsymbol{u}}=(\Delta u_1,\Delta u_2)\cdot(\Delta\bar{u}_1,\Delta\bar{u}_2)=\Delta u_1\Delta\bar{u}_1+\Delta u_2\Delta\bar{u}_2=|\Delta u_1|^2+|\Delta u_2|^2,\\
&|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{u}\cdot\Delta\bar{\boldsymbol{u}}=(|u_1|^2u_1+|u_2|^2u_1,|u_2|^2u_2+|u_1|^2u_2)\cdot(\Delta\bar{u}_1,\Delta\bar{u}_2)=\\
&\quad|u_1|^2u_1\Delta\bar{u}_1+|u_2|^2u_1\Delta\bar{u}_1+|u_2|^2u_2\Delta\bar{u}_2+|u_1|^2u_2\Delta\bar{u}_2=\\
&\quad(|u_1|^2+|u_2|^2)(u_1\Delta\bar{u}_1+u_2\Delta\bar{u}_2).
\end{aligned}\tag{20}$$

对式(20)在 Ω 上关于 x 积分，利用 Green 公式，并取实部可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega(|\nabla u_1|^2+|\nabla u_2|^2)\mathrm{d}x+\lambda\|\Delta\boldsymbol{u}\|^2_{L^2\times L^2}-\gamma\int_\Omega(|\nabla u_1|^2+|\nabla u_2|^2)\mathrm{d}x=\\
&\mathrm{Re}(\kappa+\mathrm{i}\beta)\int_\Omega|\boldsymbol{u}|^2(u_1\Delta\bar{u}_1+u_2\Delta\bar{u}_2)\mathrm{d}x=\mathrm{Re}(\kappa+\mathrm{i}\beta)\int_\Omega|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{u}\Delta\bar{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}x=\\
&\mathrm{Re}(\kappa+\mathrm{i}\beta)\int_\Omega(\nabla|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{u})\cdot\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}x\leqslant 3(\kappa^2+\beta^2)^{1/2}\int_\Omega|\boldsymbol{u}|^2|\nabla\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}x+\lambda\|\Delta\boldsymbol{u}\|^2_{L^2\times L^2}-\gamma\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}x\leqslant 3(\kappa^2+\beta^2)^{1/2}\int_\Omega|\boldsymbol{u}|^2|\nabla\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}x.\tag{21}$$

利用 Schwarz 不等式，式(21)可继续放缩为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|^2_{\dot{H}^1\times\dot{H}^1}+\lambda\|\Delta\boldsymbol{u}\|^2_{L^2\times L^2}-\gamma\|\boldsymbol{u}\|^2_{\dot{H}^1\times\dot{H}^1}\leqslant 3(\kappa^2+\beta^2)^{1/2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^4\times L^4}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2_{L^4\times L^4}.\tag{22}$$

利用 Sobolev 嵌入和插值不等式，有 $H^{1/2}(\Omega)\times H^{1/2}(\Omega)\subset L^4(\Omega)\times L^4(\Omega)$，以及

$$\|\varphi\|_{L^4\times L^4}\leqslant c_1'\|\varphi\|^2_{L^2\times L^2}(\|\varphi\|^2_{\dot{H}^1\times\dot{H}^1}+\|\varphi\|^2_{L^2\times L^2})^{1/4},\qquad\forall\varphi\in H^1(\Omega)\times H^1(\Omega).\tag{23}$$

同理，$(\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2\times L^2}+\|\Delta\boldsymbol{u}\|^2_{L^2\times L^2})$的范数在 $H^2\times H^2$ 空间上是与自然范数等效的范数. 因此由式(23)可知，存在一个依赖于 Ω 的常数 c_2'，使得

$$\|\nabla\varphi\|_{L^4\times L^4}\leqslant c_2'\|\varphi\|^{1/2}_{\dot{H}^1\times\dot{H}^1}(\|\varphi\|^2_{L^2\times L^2}+\|\Delta\varphi\|^2_{L^2\times L^2})^{1/4}.\tag{24}$$

于是，对式(22)有

$$\begin{aligned}
&3(\kappa^2+\beta^2)^{1/2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^4\times L^4}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2_{L^4\times L^4}\leqslant\\
&\quad 3(c_2')^2(\kappa^2+\beta^2)^{1/2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^4\times L^4}\|\boldsymbol{u}\|^2_{\dot{H}^1\times\dot{H}^1}(\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2\times L^2}+\|\Delta\boldsymbol{u}\|^2_{L^2\times L^2})^{1/2}\leqslant\\
&\quad\frac{[\sqrt{\lambda}(\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2\times L^2}+\|\Delta\boldsymbol{u}\|^2_{L^2\times L^2})^{1/2}]^2}{2}+\frac{[3(c_2')^2(\kappa^2+\beta^2)^{1/2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^4\times L^4}\|\boldsymbol{u}\|_{\dot{H}^1\times\dot{H}^1}]^2}{2(\sqrt{\lambda})^2}\leqslant\\
&\quad\frac{\lambda}{2}\|\Delta\boldsymbol{u}\|^2_{L^2\times L^2}+\frac{\lambda}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2\times L^2}+c_3'\|\boldsymbol{u}\|^4_{L^4\times L^4}\|\boldsymbol{u}\|^2_{\dot{H}^1\times\dot{H}^1},
\end{aligned}\tag{25}$$

其中 $c_3'=\dfrac{9}{2\lambda}(c_2')^4(\kappa^2+\beta^2)$. 综合式(23)～(25)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|^2_{\dot{H}^1\times\dot{H}^1}+\lambda\|\Delta\boldsymbol{u}\|^2_{L^2\times L^2}\leqslant 2(\gamma+c_3'\|\boldsymbol{u}\|^4_{L^4\times L^4})\|\boldsymbol{u}\|^2_{\dot{H}^1\times\dot{H}^1}+\lambda\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2\times L^2}.\tag{26}$$

令 $y=\|\boldsymbol{u}\|^2_{\dot{H}^1\times\dot{H}^1}$，$g=2(\gamma+c_3'\|\boldsymbol{u}\|^4_{L^4\times L^4})$，$h=\lambda\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2\times L^2}$，则式(26)变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\leqslant\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\lambda\|\Delta\boldsymbol{u}\|^2_{L^2\times L^2}\leqslant gy+h.$$

又由式(18)得

$$\int_t^{t+r}2(\gamma+c_3'\|\boldsymbol{u}\|^4_{L^4\times L^4})\mathrm{d}s\leqslant 2\gamma r+2c_3'\left((\rho_0')^2+\frac{2r\gamma^2}{\kappa}|\Omega|\right):=a_1,$$

$$\int_t^{t+r}\lambda\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2\times L^2}\mathrm{d}s\leqslant\lambda(\rho_0')^2:=a_2,$$

$$\int_t^{t+r}\|\boldsymbol{u}\|^2_{\dot{H}^1\times\dot{H}^1}\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{2\lambda}\left((\rho_0')^2+\frac{2r\gamma^2}{\kappa}|\Omega|\right):=a_3.$$

利用引理1，对 $t\geqslant t_0+r$，有

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|_{H^1\times H^1}^2\leqslant\left(\frac{a_3}{r}+a_2\right)\exp\{a_1\},$$

其中 $r>0$ 是任意选定的正数，而 $\boldsymbol{u}_0\in B$，$t_0=t_0(B)$ 与式(19)中相同.

若 B 是 $H^1\times H^1$ 上的一个有界集，则它也是 $L^2\times L^2$ 上的一个有界集，故令 $B_1=B_{H^1\times H^1}(0,\rho_1)$，其中 $\rho_1^2=(\rho_0')^2+\left(\frac{a_3}{r}+a_2\right)\exp\{a_1\}$. 从而对任意的 $\boldsymbol{u}_0\in B$，$t\geqslant t_0(B,B_0)$，有 $S(t)\boldsymbol{u}_0\in B_1$，即 $S(t)B\subset B_1$，因此 $H^1\times H^1$ 空间中以0为中心、ρ_1 为半径的球 B_1 对于 $S(t)$ 是吸收的，即证明了 $V\times V$ 空间上吸收集的存在性.

若 $\boldsymbol{u}_0\in B$，其中 B 只在 $L^2\times L^2$ 空间中有界，则上述分析仍适用，且对于 $t\geqslant t_0(B)+r$，有 $S(t)B\subset B_1$. 由于 B_1 在 $H^1\times H^1$ 上有界且 $H^1\times H^1$ 在 $L^2\times L^2$ 中的嵌入是紧的，因此可得 $\bigcup_{t\geqslant t_0+r}S(t)B$ 在 $L^2\times L^2$ 中相对紧，即定理2中条件3)成立. 从而定理2中所有条件均成立.

利用 $\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)$ 空间中吸收集的存在性可得该空间上 Ginzburg-Landau 方程组全局吸引子的存在性，并由边界条件(i)～(iii)确定的 Ginzburg-Landau 方程组的动力系统在 $\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)$ 上存在一个紧连通的最大吸引子 σ，且 σ 吸引复空间 $\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)$ 中的有界集，同时也是 $\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)$ 中有界函数不变集合中的最大集. 证毕.

注1 四维三次复 Ginzburg-Landau 方程组因其高维性与非线性耦合特性，在数学分析与物理建模中呈现出显著的理论挑战. 相较于低维情形，四维系统中非线性相互作用更复杂，时空动力学行为更丰富，这对系统渐近行为的分析提出了更高要求. 目前，该方程组吸引子的研究仍处于初步探索阶段，其分析面临以下困难.

1) 高维空间中的非线性分析难题：在四维情形下，非线性项具有更复杂的结构特征，传统能量方法难以直接使用，需结合 Sobolev 嵌入定理与精细插值技术的估计方法.

2) 复系数引起的耦合效应：系统中实部与虚部之间存在强耦合作用，需要建立适用于复值函数空间的分析框架，并处理由此产生的特殊非线性结构.

3) 吸引子存在性证明的理论障碍：现有理论框架主要针对低维情形建立，四维情形下吸收集的存在性证明和吸引子的紧性分析需要发展新的先验估计和紧性论证方法.

针对上述问题，本文在以下几方面给出了创新性结果.

1) 建立了四维情形的系统分析框架：通过引入复化 Sobolev 空间与向量表示法，将方程组转化为向量形式，简化了非线性项的处理，为高维复系统的分析提供了新途径.

2) 建立了适应四维情形的先验估计技术：结合 Gronwall 引理、Sobolev 不等式和精细能量估计方法，证明了方程组在 $\mathbb{L}^2(\Omega)\times\mathbb{L}^2(\Omega)$ 和 $\mathbb{H}^1(\Omega)\times\mathbb{H}^1(\Omega)$ 空间中的吸收集存在性，为吸引子的存在性奠定了基础.

3) 完善了吸引子性质的理论证明：在3种典型边界(Dirichlet，Neumann，周期性)条件下，利用一致紧性定理和动力系统理论，证明了四维三次复 Ginzburg-Landau 方程组存在紧连通的最大吸引子.

本文研究深化了对高维复 Ginzburg-Landau 方程组解渐近行为的理解，发展了处理高维非线性耦合系统的分析方法，为相关领域的理论研究提供了新工具，在超导模型、湍流模拟等物理问题的研究方面具有潜在应用价值.

参 考 文 献

[1] GUO B L, JIANG M R, LI Y S. Ginzburg-Landau Equations [M]. Beijing: Science Press, 2020: 10-82.

[2] GUO B L, WANG B X. Exponential Attractors for the Generalized Ginzburg-Landau Equation [J]. Acta Mathematica Sinica, 2000, 16(3): 515-526.

[3] DOERING C R, GIBBON J D, HOLM D D, et al. Low-Dimensional Behaviour in the Complex Ginzburg-Landau

Equation [J]. Nonlinearity, 1988, 1(2): 279-309.

[4] KULIKOV A N, KULIKOV D A. Invariant Manifolds. Global Attractor of a Generalized Version of the Nonlocal Ginzburg-Landau Equation [J]. Journal of Mathematical Sciences, 2023, 270(5): 693-713.

[5] BEKMAGANBETOV K A, TOLEMYS A A, CHEPYZHOV V V, et al. On Attractors of Ginzburg-Landau Equations in Domain with Locally Periodic Microstructure: Subcritical, Critical, and Supercritical Cases [J]. Doklady Mathematics, 2023, 108(2): 346-351.

[6] ZENG S G, YANG X L, LONG J R. On Discrete Stochastic p-Laplacian Complex-Valued Ginzburg-Landau Equations Driven by Superlinear Lévy Noise [J]. Applied Mathematics and Computation, 2025, 493: 129267-1-129267-29.

[7] CHEN Y J, WANG X H. Random Attractors for Stochastic Discrete Complex Ginzburg-Landau Equations with Long-Range Interactions [J]. Journal of Mathematical Physics, 2022, 63(3): 032701-1-032701-14.

[8] GUO C H, FANG S M, GUO B L. Long Time Behavior of Solutions to Coupled Burgers-Complex Ginzburg-Landau (Burgers-CGL) Equations for Flames Governed by Sequential Reaction [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2014, 35(4): 515-534.

[9] SHU J, ZHANG J. Random Attractors for Non-autonomous Fractional Stochastic Ginzburg-Landau Equations on Unbounded Domains [J]. Journal of Applied Analysis and Computation, 2020, 10(6): 2592-2618.

[10] CHEN Z, LI L Y. Asymptotic Behavior of Non-autonomous Random Ginzburg-Landau Equations with Colored Noise on Unbounded thin Domains [J]. Frontiers of Mathematics, 2024, 19(6): 1123-1151.

[11] KULIKOV A N, KULIKOV D A. Local Bifurcations and a Global Attractor for Two Versions of the Weakly Dissipative Ginzburg-Landau Equation [J]. Theoretical and Mathematical Physics, 2022, 212(1): 925-943.

[12] NAKAMURA M, SATO Y. Existence and Non-existence of Global Solutions for the Semilinear Complex Ginzburg-Landau Type Equation in Homogeneous and Isotropic Spacetime [J]. Kyushu Journal of Mathematics, 2021, 75(2): 169-209.

[13] TONE C, TONE F. Approximation of the Long-Time Dynamics of the Dynamical System Generated by the Ginzburg-Landau Equation [J]. Communications in Mathematical Research, 2023, 39(4): 501-522.

[14] SHU J, MA D D, HUANG X, et al. Wong-Zakai Approximations and Limiting Dynamics of Stochastic Ginzburg-Landau Equations [J]. Stochastics and Dynamics, 2022, 22(4): 2250006-1-2250006-18.

[15] TEMAM R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics [M]. 2nd ed. New York: Springer, 1997: 15-234.

（责任编辑：李　琦）