doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2025193

联图 $P_m \vee P_n$ 的点被多重集可区别的一般全染色

赵 潜[1], 李 婷[2]
(1. 石河子大学 水利建筑工程学院, 新疆 石河子 832003; 2. 石河子大学 理学院, 新疆 石河子 832003)

摘要: 利用反证法、构造染色法和色集合事先分配法, 讨论联图 $P_m \vee P_n$ 的点被多重集可区别的一般全染色, 并确定它们的点被多重集可区别的一般全色数.

关键词: 路; 联图; 染色; 多重集; 一般全染色; 一般全色数
中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2026)02-0258-07

General Total Coloring of Join Graph $P_m \vee P_n$ Vertex-Distinguished by Multisets

ZHAO Qian[1], LI Ting[2]
(1. *College of Water Conservancy and Architectural Engineering*, *Shihezi University*, *Shihezi* 832003, *Xinjiang Uygur Autonomous Region*, *China*;
2. *College of Science*, *Shihezi University*, *Shihezi* 832003, *Xinjiang Uygur Autonomous Region*, *China*)

Abstract: We discussed the general total coloring of the join graph $P_m \vee P_n$ that was vertex-distinguished by multisets by using the methods of proof by contradiction, explicit coloring construction, and pre-assigned color set method, and determined general total chromatic number of its corresponding vertex-distinguished by multisets.

Keywords: path; join graph; coloring; multisets; general total coloring; general total chromatic number

点被多重集可区别的一般边染色的研究目前已取得了许多结果[1-4]. 文献[5-7]解决了完全 t 部图的点被多重集可区别的一般全染色, 其中 $t=2,3,4$. 本文利用反证法与构造具体染色的方法, 讨论联图 $P_m \vee P_n$ 的点被多重集可区别的一般全染色, 并给出联图 $P_m \vee P_n$ 的点被多重集可区别的一般全色数的确切值.

1 预备知识

联图 $G \vee H$ 是指图 G 的每个顶点与图 H 的每个顶点相连构成的新图. 一般地, n 阶路用 P_n 表示. 图 G 的一个一般全染色是指若干种颜色对图 G 的全体顶点及边的一个分配. 使用 k 种颜色的一般全染色称为 k-一般全染色. 设 f 为图 G 的一个一般全染色, 多重色集合是指图 G 中的任意一点 x 的颜色以及与 x 关联的边的颜色所构成的多重集, 记为 $\widetilde{C}_f(x)$. 设 f 为图 G 的一个一般全染色, 若对图 G 中任意两点 x 和 y, 有 $\widetilde{C}_f(x) \neq \widetilde{C}_f(y)$, 则称 f 是图 G 的点被多重集可区别的一般全染色. 图 G 的点被多重集可区别的一般全色数是指对图 G 进行点被多重集可区别的一般全染色所需的最少颜色数目, 用

收稿日期: 2025-06-23.
第一作者简介: 赵 潜(2000—), 男, 汉族, 硕士研究生, 从事水力学及河流动力学、图论及其应用的研究, E-mail: qian_zhao_1@163.com. **通信作者简介:** 李 婷(1993—), 女, 汉族, 博士, 副教授, 从事图论及其应用的研究, E-mail: tingli@shzu.edu.cn.
基金项目: 新疆维吾尔自治区"天池英才"引进计划项目(批准号: CZ001313)和石河子大学高层次人才科研启动项目(批准号: RCZK202416).

$\tilde{\chi}_{\rm gvt}(G)$表示．$r$-组合是指在 n 个互不相同的元素中可以重复选取 r 个元素所构成的集合，也称为 r-多重子集或 r-子集．

本文未介绍的术语可参考文献[8]．本文约定：$V(P_m \vee P_n)=X\cup Y$，$X=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，$Y=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$；$E(P_m\vee P_n)=L\cup M\cup N$，$L=\{u_iv_j\,|\,1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$，$M=\{u_iu_{i+1}\,|\,1\leqslant i\leqslant m-1\}$，$N=\{v_iv_{i+1}\,|\,1\leqslant i\leqslant n-1\}$．如果使用 k 种颜色染色，则这 k 种颜色用 $1,2,3,\cdots,k$ 表示．下面 r-组合内的元素总按递增形式排列．

引理1（重复组合公式）[9]　从 n 个互不相同的元素中可放回地选取 r 个元素构成的集合个数为 $\binom{n+r-1}{r}$．

2　主要结果

易知，$\tilde{\chi}_{\rm gvt}(P_1\vee P_n)=2$，$n=1,2,3$．

定理1　当 $k\in\mathbb{Z}$，$n\geqslant 4$，$\binom{k+2}{4}+1\leqslant n-2\leqslant\binom{k+3}{4}$时，$\tilde{\chi}_{\rm gvt}(P_1\vee P_n)=k$．

证明：首先证明 $\tilde{\chi}_{\rm gvt}(P_1\vee P_n)\geqslant k$．假设$(k-1)$种颜色是可以对联图 $P_1\vee P_n$ 进行点被多重集可区别的一般全染色．由引理1可知$\binom{k-1+4-1}{4}=\binom{k+2}{4}$，即4-组合共有$\binom{k+2}{4}<(n-2)$种，矛盾．

下面证明 $\tilde{\chi}_{\rm gvt}(P_1\vee P_n)\leqslant k$．只需构造 $P_1\vee P_n$ 的一个点被多重集可区别的 k-一般全染色即可．当$\binom{k+2}{4}+1\leqslant n-2<\binom{k+3}{4}$时，$n+2=\binom{k+3}{4}$情形的染色方案仍然可用其上，故只需证明 $n+2=\binom{k+3}{4}$的情形．将这 k 种颜色构成的所有4-组合用若干子序列 $\mathscr{A}(i,j)$ $(1\leqslant i\leqslant j\leqslant k)$给出，其中 $\mathscr{A}(i,j)=(\{i,j,j,j\},\{i,j,j,j+1\},\cdots,\{i,j,j,k\},\{i,j,j+1,j+1\},\cdots,\{i,j,j+1,k\},\cdots,\{i,j,k-1,k-1\},\{i,j,k-1,k\},\{i,j,k,k\})$．

下面构造一般染色规则：从若干子序列中任意选取一个集合$\{a,b,c,d\}$对 Y 中的点 v_i $(i=2,3,\cdots,n-1)$及其关联边进行染色，用颜色 a 染 $v_{i-1}v_i$，用颜色 b 染 v_iv_{i+1}，用颜色 c 染点 v_i，用颜色 d 染 u_1v_i；进一步，对于点 v_{i+1}，用集合$\{a,b,c,d\}$相邻的下一个集合$\{e,f,g,h\}$中的 f 染边 v_iv_{i+1}，用颜色 e 染边 $v_{i+1}v_{i+2}$，用颜色 g 染点 v_{i+1}，用颜色 h 染边 u_1v_{i+1}．注意此处 $b=f$．当 $b\neq f$ 时，需分以下3种情形讨论．情形1)中所有4-组合中部分特殊集合列于表1，用于情形2)的4-组合$\{x,x+1,x+1,k\}$的集合为

$$\{1,2,2,k\},\{2,3,3,k\},\cdots,\{k-2,k-1,k-1,k\}. \tag{1}$$

后续将其用于 $b\neq f$ 的特殊情形的染色过程中．对点 v_2 到 v_{n-1}进行染色，从所有4-组合中的第1个集合$\{1,1,1,1\}$开始跳过表1和式(1)中的集合，按照一般染色规则依次对点 $v_2,v_3,v_4,\cdots$进行染色．

表1　用于情形1)的集合

Table 1　Sets used in case 1)

$\{1,1,x_1,x_1\}$	$\{2,2,x_2,x_2\}$	$\cdots$	$\{k-2,k-2,x_{k-2},x_{k-2}\}$
$\{1,1,2,2\}$	0	$\cdots$	0
$\{1,1,3,3\}$	$\{2,2,3,3\}$	$\cdots$	0
$\{1,1,4,4\}$	$\{2,2,4,4\}$	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\{1,1,k-1,k-1\}$	$\{2,2,k-1,k-1\}$	$\cdots$	$\{k-2,k-2,k-1,k-1\}$

情形1）某个点被分配集合$\{a,b,k,k\}$．不妨设该点为 v_{i-1} $(i\in\{3,4,\cdots,n-2\})$．若 $a=b$，即 v_{i-1}的色集合为$\{a,a,k,k\}$，则边 $v_{i-1}v_i$ 已被 a 染色，由所有4-组合的排列顺序可知，集合$\{a,a,k,k\}$的下一个集合为$\{a,a+1,a+1,a+1\}$，其中恰好含有元素 a，于是点 v_i、边 u_1v_i 及 v_iv_{i-1}都用 $a+1$ 染色，之后的点 v_{i+1}可采用一般染色规则．若 $a\neq b$，则选取表1中的集合作为点 v_i 的色集合，所选集合为

$\{a,a,b,b\}$. 如图1(A)所示，若边 $v_{i-1}v_i$ 被 b 染色，则边 v_iv_{i+1} 用 a 染色，点 v_i 用 a 染色，边 u_1v_i 用 b 染色；如图1(B)所示，若边 $v_{i-1}v_i$ 被 a 染色，则边 v_iv_{i+1} 用 a 染色，点 v_i 用 b 染色，边 u_1v_i 用 b 染色.

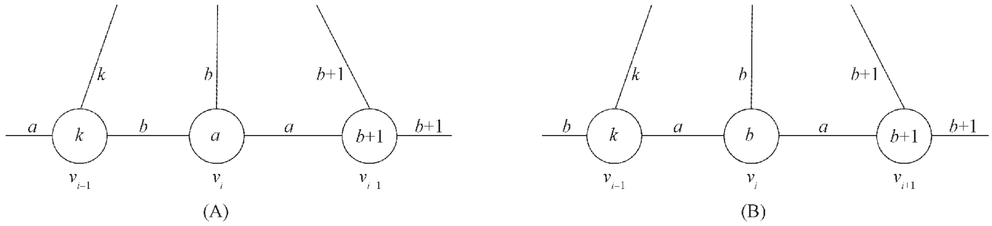

图1 当 $a\neq b$ 时情形1)中的染色

Fig. 1 Coloring of case 1) with $a\neq b$

情形2) 某个点被分配集合$\{a,k,k,k\}$. 不妨设该点为 $v_{i-1}(i\in\{3,4,\cdots,n-2\})$，则选取式(1)中的集合对点 v_i 进行多重集可区别的一般全染色，所选集合可为$\{a,a+1,a+1,k\}$. 如图2(A)所示，若边 $v_{i-1}v_i$ 被 k 染色，则边 v_iv_{i-1} 用 $a+1$ 染色，点 v_i 用 a 染色，边 u_1v_i 用 $a+1$ 染色；如图2(B)所示，若边 $v_{i-1}v_i$ 被 a 染色，则边 v_iv_{i+1} 用 $a+1$ 染色，点 v_i 用 k 染色，边 u_1v_i 用 $a+1$ 染色.

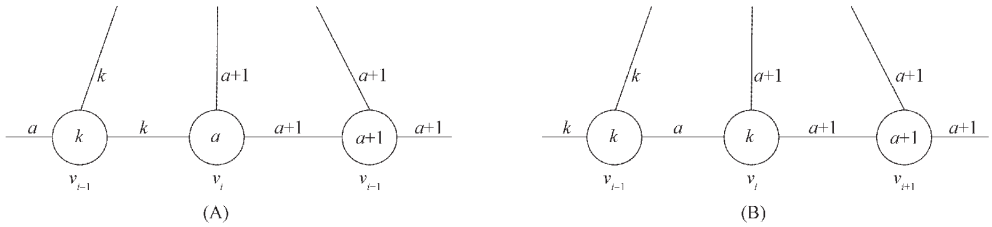

图2 情形2)的染色

Fig. 2 Coloring of case 2)

情形3) 分配到式(1)最后一个集合$\{k-2,k-1,k-1,k\}$. 此时，所有4-组合中还剩$\{k-1,k-1,k-1,k-1\}$到$\{k,k,k,k\}$共5个集合没有被分配，下面用一个5行4列的矩阵展示它们的染色方案：

$$\begin{pmatrix} k-1 & k-1 & k-1 & k-1 \\ k-1 & k-1 & k-1 & k \\ k-1 & k-1 & k & k \\ k-1 & k & k & k \\ k & k & k & k \end{pmatrix}.$$

该矩阵的5行分别表示所有4-组合中的最后5个集合，每一列都表示染色. 若对 v_i 进行点被多重集可区别的一般全染色($i\in\{n-5,n-4,\cdots,n-1\}$)，则第1列都表示边 $v_{i-1}v_i$ 的颜色分配，第2列都表示边 v_iv_{i+1} 的颜色分配，第3列都表示点 v_i 的颜色分配，第4列都表示边 u_1v_i 的颜色分配.

现已将所有4-组合都用尽，因为所有4-组合的个数为$\binom{k+3}{4}$，而$\binom{k+3}{4}\geqslant n-2$，所以从点 v_2 到点 v_{n-1}的一般全染色是被多重集可区别的. 对于点 v_1、点 v_n、点 u_1 及其还未被分配颜色的关联边，只需用颜色1分别染点 v_1、点 u_1 及其关联边 u_1v_1，用颜色2分别染点 v_n 和边 u_1v_n即可. 至此得到了联图 $P_1\vee P_n$ 的一个点被多重集可区别的 k-一般全染色. 证毕.

类似定理1的证明可得如下结果. 易知，$\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(P_2\vee P_n)=2$，$n=2,3$.

定理2 当 $k\in\mathbb{Z}$，$n\geqslant4$，$\binom{k+3}{5}+1\leqslant n-2\leqslant\binom{k+4}{5}$时，$\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(P_2\vee P_n)=k$.

定理3 $\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(P_m\vee P_m)=\begin{cases}2, & 3\leqslant m\leqslant8,\\ 3, & m\geqslant9.\end{cases}$

证明：1) 易知 $\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(P_m\vee P_m)=2$，其中 $3\leqslant m\leqslant8$. 下面仅给出 $\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(P_8\vee P_8)=2$ 的证明. 显然用1种颜色无法对 $P_8\vee P_8$ 进行点被多重集可区别的一般全染色，即 $\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(P_8\vee P_8)\geqslant2$.

下证 $\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(P_8\vee P_8)\leqslant2$，即只需给出 $P_8\vee P_8$ 的一个2-点被多重集可区别的一般全染色，该染色方

案可由一个 11 行 11 列矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

该矩阵第 1 行非零元素依次分别为点 $u_1, u_2, \cdots, u_8$ 的染色；第 1 列非零元素依次分别为点 $v_1, v_2, \cdots, v_8$ 的染色；(i,j)-位置元素为 $u_{j-1}v_{i-1}$ 的颜色，这里 $2 \leqslant i \leqslant 9$，$2 \leqslant j \leqslant 9$；第 10 列和第 11 列非零元素分别为边 $v_{i-1}v_i$ 和 v_iv_{i+1} 的颜色，第 10 行和第 11 行非零元素分别为边 $u_{j-1}u_j$ 和 u_ju_{j+1} 的颜色，其中 $2 \leqslant i \leqslant 7$，$2 \leqslant j \leqslant 7$. 因此，该矩阵第 j 列非零元素构成了点 u_{j-1} 的色集合，第 i 行非零元素构成了点 v_{i-1} 的色集合，这里 $2 \leqslant i \leqslant 9$，$2 \leqslant j \leqslant 9$.

2) 证明 $\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(P_m \vee P_m)=3$，$m \geqslant 9$. 先证 $\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(P_m \vee P_m) \geqslant 3$，假设 $P_m \vee P_m$ 有 2-点被多重集可区别的一般全染色，则由引理 1 得 $(m+3)$-组合有 $(m+4)$ 个，于是 $m+4 \geqslant 2(m-2)$ 解得 $m \leqslant 8$，与 $m \geqslant 9$ 矛盾，故 $\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(P_m \vee P_m) \geqslant 3$.

下证 $\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(P_m \vee P_m) \leqslant 3$. 只需给出 $P_m \vee P_m$ 的一个 3-点被多重集可区别的一般全染色即可. 将联图 $P_m \vee P_m$ 拆分为完全二部图 $K_{m,m}$ 与边集合 M 和边集合 N，先对完全二部图的点及其关联边进行颜色分配，用一种颜色对集合 M 中的每条边进行染色，再用另一种颜色对集合 N 中的每条边进行染色，即可使得 $P_m \vee P_m$ 的点及其关联边被 3 种颜色完全分配. $K_{m,m}$ 的点的色集合中有 $2m$ 个 $(m+1)$-组合，选取以下 m 个 $(m+1)$-组合 $\{1,1,1,\cdots,1,1,1\}$，$\{1,1,1,\cdots,1,1,2\}$，$\{1,1,1,\cdots,1,2,2\}$，$\cdots$，$\{1,1,2,\cdots,2,2,2\}$，分别对点 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 及其关联边染色. 对顶点 u_j 染颜色 3，对顶点 v_i 染颜色 1，对边 u_jv_i 染第 i 个 $(m+1)$-组合的第 $(j+1)$ 个颜色，其中 $i, j=1,2,\cdots,m$. 此时，再用颜色 1 对集合 M 中的所有边染色，用颜色 2 对集合 N 中的所有边染色，联图 $P_m \vee P_m$ 中所有点和边都已分配颜色.

该染色可利用一个 $(m+3)$ 行、$(m+3)$ 列矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

该矩阵第 1 行非零元素依次分别为点 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 的染色；第 1 列非零元素依次分别为点 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 的染色；(i,j)-位置的元素为 $u_{j-1}v_{i-1}$ 的颜色，这里 $2 \leqslant i \leqslant m+1$，$2 \leqslant j \leqslant m+1$；第 $(m+2)$ 列和第 $(m+3)$ 列非零元素分别为边 $v_{i-1}v_i$ 和 v_iv_{i+1} 的颜色，第 $(m+2)$ 行和第 $(m+3)$ 行非零元素分别为边 $u_{j-1}u_j$ 和 u_ju_{j+1} 的颜色，其中 $2 \leqslant i \leqslant m-1$，$2 \leqslant j \leqslant m-1$. 因此，该矩阵第 j 列非零元素构成了点 u_{j-1} 的色集合，第 i 行非零元素构成了点 v_{i-1} 的色集合，这里 $2 \leqslant i \leqslant m+1$，$2 \leqslant j \leqslant m+1$. 观察该矩阵可知：

点 $u_2,u_3,\cdots,u_{m-1}$ 的色集合为$(m+3)$-组合，因为元素1的个数不同，所以它们之间是被多重集可区别的；点 $v_2,v_3,\cdots,v_{m-1}$ 的色集合也是$(m+3)$-组合，由于元素1的个数不同，使得它们之间是被多重集可区别的；点 $u_2,u_3,\cdots,u_{m-1}$ 的色集合含有元素3，而点 $v_2,v_3,\cdots,v_{m-1}$ 的色集合不含元素3，所以点 $u_2,u_3,\cdots,u_{m-1}$ 与 $v_2,v_3,\cdots,v_{m-1}$ 的色集合互不相同；点 v_1,v_m,u_1,u_m 的色集合为$(m+2)$-组合，因为元素2的个数不同，所以点 v_1,v_m,u_1,u_m 的色集合不同；由于不同组合元素个数不相等，所以其对应的点的色集合也不相同. 从而得到了联图 $P_m\vee P_m(m\geqslant 9)$的一个点被多重集可区别的3-一般全染色. 证毕.

定理4 当 $m\geqslant 3$，$t=1,2$ 时，$\tilde{\chi}_{\text{gvt}}(P_m\vee P_{m+t})=2$.

证明：1) 证明 $\tilde{\chi}_{\text{gvt}}(P_m\vee P_{m+1})\geqslant 2$. 因为 $\tilde{\chi}_{\text{gvt}}(P_m\vee P_{m+1})=1$ 显然不成立，故有 $\tilde{\chi}_{\text{gvt}}(P_m\vee P_{m+1})\geqslant 2$.

下证 $\tilde{\chi}_{\text{gvt}}(P_m\vee P_{m+1})\leqslant 2$，$m\geqslant 3$. 只需给出 $P_m\vee P_{m+1}$ 的一个2-点被多重集可区别的一般全染色即可. 将联图 $P_m\vee P_{m+1}$ 拆分为完全二部图 $K_{m,m+1}$ 与边集合 M 和边集合 N，先对完全二部图的点及其关联边进行颜色分配，用一种颜色对集合 M 中的每条边染色，再用另一种颜色对集合 N 中的每条边进行染色，即可使得 $P_m\vee P_{m+1}$ 的点及其关联边被2种颜色完全分配. $K_{m,m+1}$ 的点的色集合中有 m 个$(m+2)$-组合和$(m+1)$个$(m+1)$-组合，选取以下 m 个$(m+2)$-组合$\{1,1,1,\cdots,1,1,2\}$，$\{1,1,1,\cdots,1,2,2\}$，$\{1,1,1,\cdots,2,2,2\}$，$\cdots$，$\{1,1,1,2,\cdots,2,2,2\}$，$\{1,1,1,1,\cdots,1,1,1\}$，分别对点 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 及其关联边染色. 对顶点 u_j 染对应$(m+2)$-组合的第1种颜色，对边 u_jv_i 染第 j 个$(m+2)$-组合的第$(i+1)$种颜色，顶点 v_i 染颜色2，其中 $i=1,2,\cdots,m+1$，$j=1,2,\cdots,m$. 此时再用颜色1对 M 集合中的所有边染色，用颜色2对 N 集合中的所有边染色，联图 $P_m\vee P_{m+1}$ 中所有点和边都已分配颜色.

该染色可用一个$(m+4)$行、$(m+3)$列矩阵表示：

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0\\
2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 2\\
2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 & 2\\
2 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 & 2 & 2\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
2 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 & 2 & 2\\
2 & 1 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 2 & 2\\
2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 2 & 0\\
0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

该矩阵第1行非零元素依次分别为点 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 的染色；第1列非零元素依次分别为点 $v_1,v_2,\cdots,v_{m+1}$ 的染色；(i,j)-位置的元素为 $u_{j-1}v_{i-1}$ 的颜色，这里 $2\leqslant i\leqslant m+2$，$2\leqslant j\leqslant m+1$；第$(m+2)$列和第$(m+3)$列非零元素分别为边 $v_{i-1}v_i$ 和 v_iv_{i+1} 的颜色，第$(m+3)$行和第$(m+4)$行非零元素分别为边 $u_{j-1}u_j$ 和 u_ju_{j+1} 的颜色，其中 $2\leqslant i\leqslant m$，$2\leqslant j\leqslant m-1$. 因此，矩阵第 j 列非零元素构成了点 u_{j-1} 的色集合，第 i 行非零元素构成了点 v_{i-1} 的色集合，这里 $2\leqslant i\leqslant m+2$，$2\leqslant j\leqslant m+1$. 观察该矩阵可知：点 $u_2,u_3,\cdots,u_{m-1}$ 的色集合为$(m+4)$-组合，因为元素1的个数不同，所以它们之间是被多重集可区别的；点 $v_2,v_3,\cdots,v_m,u_1,u_m$ 的色集合是$(m+3)$-组合，由于元素2的个数不同，使得它们之间是被多重集可区别的；点 v_1,v_{m+1} 的色集合为$(m+2)$-组合，因为元素1的个数不同，所以点 v_1,v_{m+1} 的色集合不同；由于不同组合元素个数不相等，所以其对应的点的色集合也不相同. 至此得到了联图 $P_m\vee P_{m+1}$ $(m\geqslant 3)$的一个点被多重集可区别的2-一般全染色.

2) 证明 $\tilde{\chi}_{\text{gvt}}(P_m\vee P_{m+2})=2$. 因为 $\tilde{\chi}_{\text{gvt}}(P_m\vee P_{m+2})=1$ 显然不成立，所以 $\tilde{\chi}_{\text{gvt}}(P_m\vee P_{m+2})\geqslant 2$.

下证 $\tilde{\chi}_{\text{gvt}}(P_m\vee P_{m+2})\leqslant 2$，$m\geqslant 3$. 只需给出 $P_m\vee P_{m+2}$ 的一个2-点被多重集可区别的一般全染色即可. 将联图 $P_m\vee P_{m+2}$ 拆分为完全二部图 $K_{m,m+2}$ 与边集合 M 和边集合 N，先对完全二部图的点及其关联边进行颜色分配，用一种颜色对集合 M 中的每条边染色，再用另一种颜色对集合 N 中的每条边进行染色，即可使得 $P_m\vee P_{m+2}$ 的点及其关联边被2种颜色完全分配. $K_{m,m+2}$ 的点的色集合中有 m 个$(m+3)$-组合和$(m+2)$个$(m+1)$-组合，选取以下 m 个$(m+3)$-组合$\{1,1,1,\cdots,1,1,2\}$，$\{1,1,1,\cdots,$

1,2,2},{1,1,1,…,2,2,2},…,{1,1,1,2,…,2,2,2}，分别对点 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 及其关联边染色. 对顶点 u_j 染颜色 1，对边 u_jv_i 染第 j 个 $(m+2)$-组合的第 $(i+1)$ 种颜色，顶点 v_i 染颜色 2，$i=1,2,\cdots,m+2$，$j=1,2,\cdots,m$. 此时再用颜色 1 对集合 M 中的所有边染色，用颜色 2 对集合 N 中的所有边染色，联图 $P_m \vee P_{m+2}$ 中所有点和边都已分配颜色.

该染色可利用一个 $(m+5)$ 行、$(m+3)$ 列矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

该矩阵第 1 行非零元素依次分别为点 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 的染色；第 1 列非零元素依次分别为点 $v_1,v_2,\cdots,v_{m+2}$ 的染色；(i,j)-位置的元素为 $u_{j-1}v_{i-1}$ 的颜色，这里 $2\leqslant i\leqslant m+3$，$2\leqslant j\leqslant m+1$；第 $(m+2)$ 列和第 $(m+3)$ 列非零元素分别为边 $v_{i-1}v_i$ 和 v_iv_{i+1} 的颜色，第 $(m+4)$ 行和第 $(m+5)$ 行非零元素分别为边 $u_{j-1}u_j$ 和 u_ju_{j+1} 的颜色，其中 $2\leqslant i\leqslant m+1$，$2\leqslant j\leqslant m-1$. 因此，该矩阵第 j 列非零元素构成了点 u_{j-1} 的色集合，第 i 行非零元素构成了点 v_{i-1} 的色集合，这里 $2\leqslant i\leqslant m+3$，$2\leqslant j\leqslant m+1$. 观察该矩阵可知：点 $u_2,u_3,\cdots,u_{m-1}$ 的色集合为 $(m+5)$-组合，因为元素 1 的个数不同，所以它们之间是被多重集可区别的；点 u_1,u_m 的色集合为 $(m+4)$-组合，因为元素 1 的个数不同，所以 u_1,u_m 的色集合不同；点 $v_2,v_3,\cdots,v_{m+1}$ 的色集合是 $(m+3)$-组合，由于元素 2 的个数不同，使得它们之间是被多重集可区别的；点 v_1,v_{m+2} 的色集合为 $(m+2)$-组合，因为元素 1 的个数不同，所以点 v_1,v_{m+2} 的色集合不同；由于不同组合元素个数不相等，所以其对应的点的色集合也不相同. 至此得到了联图 $P_m \vee P_{m+2}(m\geqslant 3)$ 的一个点被多重集可区别的 2-一般全染色. 证毕.

定理 5　当 $m\geqslant 3$，$n\geqslant m+3$，$\binom{k+m+1}{m+3}+1\leqslant n-2\leqslant\binom{k+m+2}{m+3}$ 时，$\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(P_m \vee P_n)=k$.

证明：先证明 $\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(P_m \vee P_n)\geqslant k$. 假设 $(k-1)$ 种颜色可以对联图 $P_m \vee P_n$ 进行点被多重集可区别的一般全染色，而由引理 1 可知 $\binom{k-1+m+3-1}{m+3}=\binom{k+m+1}{m+3}$，即 $(m+3)$-组合共有 $\binom{k+m+1}{m+3}<n-2$，矛盾.

下面证明 $\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(P_m \vee P_n)\leqslant k$. 只需构造 $P_m \vee P_n$ 的一个 k-点被多重集可区别的一般全染色即可. 将联图 $P_m \vee P_n$ 拆分为完全二部图 $K_{m,n}$ 与边集合 M 和边集合 N，先对完全二部图的点及其关联边进行颜色分配，用一种颜色对集合 M 中的每条边染色，再用另一种颜色对集合 N 中的每条边进行染色，即可使得 $P_m \vee P_n$ 的点及其关联边被 k 种颜色完全分配. 将 $(m+1)$-组合按以下顺序排列：{1,1,1,…,1,1,1},{1,1,1,…,1,1,2},{1,1,1,…,1,2,2},…,$\{k,k,k,k,\cdots,k,k,k\}$，选取该序列前 $(n-2)$ 个组合依次分别对点 $v_2,v_3,\cdots,v_{n-1}$ 及其关联边染色. 对顶点 v_i 染 $(m+1)$-组合的第 1 个元素，对边 u_jv_i 染 v_i 对应的 $(m+1)$-组合的第 $(j+1)$ 种颜色，顶点 u_j 染颜色 k，其中 $i=2,3,\cdots,n-1$，$j=1,2,\cdots,m$. 再次使用 2 个 $(m+1)$-组合 {1,1,1,…,1,1,1} 和 $\{k,k,k,k,\cdots,k,k,k\}$ 对点 v_1 和 v_n 及其关联边染色，完全二部图 $K_{n,m}$ 的点的色集合已分配满. 此时再用颜色 1 对集合 M 中的所有元素染色，用颜色 2 对集合 N 中的所有元素染色，即可得联图 $P_m \vee P_n$ 的点被多重集可区别的一般全染色.

不妨设这 $\binom{k+m+2}{m+3}$ 个 $(m+1)$-组合都恰好用尽，此时 $n-2=\binom{k+m+2}{m+3}$，该染色可利用一个

$(n+3)$行、$(m+3)$列的矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} 0 & k & k & \cdots & k & k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k-1 & k & k & \cdots & k & k & 2 & 2 \\ k & k & k & \cdots & k & k & 2 & 2 \\ k & k & k & \cdots & k & k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

该矩阵第1行非零元素依次分别为点 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 的染色；第1列非零元素依次分别为点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 的染色；(i,j)-位置的元素为 $u_{j-1}v_{i-1}$ 的颜色，这里 $2\leqslant i\leqslant n+1$，$2\leqslant j\leqslant m+1$；第$(m+2)$列和第$(m+3)$列非零元素分别为边 $v_{i-1}v_i$ 和 v_iv_{i+1} 的颜色，第$(n+2)$行和第$(n+3)$行非零元素分别为边 $u_{j-1}u_j$ 和 u_ju_{j+1} 的颜色，其中 $2\leqslant i\leqslant n-1$，$2\leqslant j\leqslant m-1$. 因此，该矩阵第 j 列非零元素构成了点 u_{j-1} 的色集合，第 i 行非零元素构成了点 v_{i-1} 的色集合，这里 $2\leqslant i\leqslant n+1$，$2\leqslant j\leqslant m+1$. 观察该矩阵可知：点 $u_2,u_3,\cdots,u_{m-1}$ 的色集合为$(n+3)$-组合，因为元素1的个数不同，所以它们之间是被多重集可区别的；点 u_1,u_m 的色集合为$(n+2)$-组合，因为元素1的个数不同，所以点 u_1,u_m 的色集合不同；点 $v_2,v_3,\cdots,v_{n-1}$ 的色集合是$(m+3)$-组合，由于元素2的个数不同，使得它们之间是被多重集可区别的；点 v_1,v_n 的色集合为$(m+2)$-组合，因为元素1的个数不同，所以点 v_1,v_n 的色集合不同；由于不同组合元素个数不相等，所以其对应的点的色集合也不相同. 至此得到了联图 $P_m\vee P_n$ $(m\geqslant 3,n\geqslant m+3)$的一个点被多重集可区别的 k-一般全染色. 证毕.

参 考 文 献

[1] AIGNER M, TRIESCH E. Irregular Assignments and Two Problems à La Ringel [M]//BODENDIEK R, HENN R, eds. Topics in Combinatorics and Graph Theory. Heidelberg: Physica-Verlag, 1990: 29-36.

[2] AIGNER M, TRIESCH E, TUZA Z. Irregular Assignments and Vertex-Distinguishing Edge-Colorings of Graphs [J]. Annals of Discrete Mathematics, 1992, 52: 1-9.

[3] BURRIS A C. The Irregular Coloring Number of a Tree [J]. Discrete Mathematics, 1995, 141(1/2/3): 279-283.

[4] WITTMANN P. Vertex-Distinguishing Edge-Colorings of 2-Regular Graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 1997, 79(1/2/3): 265-277.

[5] 陈祥恩，王勇军. 完全二部图的点被多重集可区别的IE-全染色及一般全染色 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2022, 60(4): 838-844. (CHEN X E, WANG Y J. IE-Total Coloring and General Total Coloring of Complete Bipartite Graph Which Are Vertex-Distinguished by Multiple Sets [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2022, 60(4): 838-844.)

[6] 王勇军，陈祥恩. 完全三部图的点被多重集可区别的一般全染色 [J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(6): 29-35. (WANG Y J, CHEN X E. Vertex Distinguishing General Total Colorings of Complete 3-Partite Graphs by Multisets [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2024, 59(6): 29-35.)

[7] 王勇军，陈祥恩. K_{n_1,n_2,n_3,n_4} 的点被多重集可区别的一般全染色($n_1\leqslant n_2<n_3\leqslant n_4$) [J]. 大连理工大学学报, 2023, 63(4): 433-440. (WANG Y J, CHEN X E. General Total Colorings of K_{n_1,n_2,n_3,n_4} with Vertex Distinguished by Multisets ($n_1\leqslant n_2<n_3\leqslant n_4$) [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2023, 63(4): 433-440.)

[8] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications [M]. Oxford: The Macmillan Press Ltd, 1976: 1-264.

[9] 邵嘉裕. 组合数学 [M]. 上海：同济大学出版社, 1990: 5-14. (SHAO J Y. Combinatorial Mathematics [M]. Shanghai: Tongji University Press, 1990: 5-14.)

(责任编辑：李　琦)