doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2025197

紧致仿射 Gauduchon 流形上的半稳定扭曲箭图丛

朱昌胜，郑梦琦，曹先民，钟凯闻
(安徽大学 数学科学学院，合肥 230601)

摘要：利用 Uhlenbeck-Yau 的连续性方法，证明以紧致仿射 Gauduchon 流形为底流形的仿射 (σ,τ)-半稳定扭曲箭图丛 $\mathscr{R}$ 上存在渐近仿射 (σ,τ)-Hermite-Yang-Mills 结构，所得结果可视为经典结果在箭图丛上的推广.

关键词：箭图丛；仿射 (σ,τ)-半稳定；渐近仿射 (σ,τ)-Hermite-Yang-Mills 结构
中图分类号：O186.12 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2026)02-0193-08

Semi-stable Twisted Quiver Bundles over Compact Affine Gauduchon Manifolds

ZHU Changsheng, ZHENG Mengqi, CAO Xianmin, ZHONG Kaiwen
(*School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei* 230601, *China*)

Abstract: By using Uhlenbeck-Yau's continuity method, we prove the existence of an approximate affine (σ,τ)-Hermite-Yang-Mills structure on affine (σ,τ)-semi-stable twisted quiver bundles $\mathscr{R}$ with a compact affine Gauduchon manifold as the base manifold. The obtained result can be viewed as an extension of classical results on quiver bundles.

Keywords: quiver bundle; affine (σ,τ)-semi-stable; approximate affine (σ,τ)-Hermite-Yang-Mills structure

1 引言与主要结果

仿射流形是一个光滑实流形 M，其切丛 TM 上有一个平坦无挠联络 D，或者有一个由仿射图提供的仿射结构，其中转移函数是形如 $\boldsymbol{x}\mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ 的仿射映射，这里 $\boldsymbol{A}\in GL(n,\mathbb{R})$ 且 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$. 若仿射流形 M 存在一个关于平坦联络 D 协变不变的体积形式 ν，或者 D 的和乐群落在特殊仿射子群中(即 $\boldsymbol{A}\in SL(n,\mathbb{R})$)，则称该流形为特殊仿射流形. 在仿射流形上，若 Riemann 度量 g 满足 $\partial\bar{\partial}\omega_g^{n-1}=0$，则称其为仿射 Gauduchon 度量. 在紧致特殊仿射流形 M 上，每个 Riemann 度量的共形类中都存在一个仿射 Gauduchon 度量，且在相差一个常数意义下唯一[1].

设 E 为特殊仿射 Gauduchon 流形 (M,D,g,ν) 上的平坦全纯向量丛，其中 g 是一个 Riemann 度量. E 上的一个 Hermite 度量 H 定义了一个唯一的度量联络 D_H，其曲率 F_H 是一个 $(1,1)$ 型的丛值形式. E 上的仿射 Hermite-Yang-Mills 方程定义为

$$\mathrm{tr}_g F_H=\lambda\cdot \mathrm{Id}_E, \tag{1}$$

其中 λ 是一个实数.

收稿日期：2025-06-24.
第一作者简介：朱昌胜(1995—)，男，汉族，硕士研究生，从事微分几何的研究，E-mail：a24201038@stu.ahu.edu.cn.
基金项目：国家自然科学基金面上项目(批准号：12571061)和国家自然科学基金青年科学基金项目(批准号：12201001).

满足方程(1)的 Hermite 度量称为仿射 Hermite-Yang-Mills 度量. 文献[1]证明了闭特殊仿射 Gauduchon 流形上仿射 Hermite-Yang-Mills 度量的存在性与稳定平坦全纯向量丛之间的关系，从而推广了 Kähler 流形中经典的 Donaldson-Uhlenbeck-Yau 定理[2-3]. 关于上述对应关系的研究目前已取得了许多成果[4-13]，其中作为全纯向量丛的推广，关于箭图丛的研究备受关注[14-17].

扭曲箭图丛 $\mathscr{R}=(E,\widetilde{E},Q,\phi)$ 上的 Hermite 度量 H 由一组分配给每个非零向量丛 E_v 的 Hermite 度量 H_v 组成，其中 $v\in Q_0$ 为顶点. 给定实数集 $\sigma=\{\sigma_v\}_{v\in Q_0}$ 和 $\tau=\{\tau_v\}_{v\in Q_0}$，若对所有非零 E_v 均满足以下方程：

$$\sigma_v\cdot\mathrm{tr}_g F_{H_v}+\sum_{a\in\mathfrak{h}^{-1}(v)}\phi_a\circ\phi_a^{*H_v}-\sum_{a\in\mathfrak{t}^{-1}(v)}\phi_a^{*H_v}\circ\phi_a=\tau_v\cdot\mathrm{Id}_{E_v},\tag{2}$$

则称丛 $\mathscr{R}$ 具有仿射 (σ,τ)-Hermite-Yang-Mills 度量 $H=\{H_v\}_{v\in Q_0}$，其中 F_{H_v} 是 E_v 上 Chern 联络 ∇_{H_v} 的曲率，$\phi_a^{*H_v}$ 表示 ϕ_a 关于 H_v 的伴随. 方程(2)也称为仿射 (σ,τ)-Hermite-Yang-Mills 方程.

文献[4]在 Kähler 流形上引入了方程(2)，可视为方程(1)在 $|Q_0|=1$ 且 $|Q_1|=0$ 时的推广. 文献[4]证明了方程(2)的可解性等价于箭图丛在紧 Kähler 流形上的稳定性. 文献[15]将文献[4]的结果推广到更一般的底流形，即紧广义 Kähler 流形，所考虑的稳定性条件由一个严格不等式给出，当不等式不严格时，该条件即为半稳定性. 下面给出本文的主要结果.

定理1　设 $Q=(Q_0,Q_1)$ 是一个箭图，$\mathscr{R}=(E,\widetilde{E},Q,\phi)$ 是紧致特殊仿射 Gauduchon 流形 (M,D,g,ν) 上的扭曲全纯箭图丛. 假设 σ 和 τ 是由正实数 σ_v 和 τ_v 组成的集合，其中 $v\in Q_0$. 若每个 $E_v=\pi_v\circ E$ 都具有非正平均曲率 $\mathrm{tr}_g F_{H_{0,v}}$，且 $\mathscr{R}$ 是仿射 (σ,τ)-半稳定的，则 $\mathscr{R}$ 上具有渐近仿射 (σ,τ)-Hermite-Yang-Mills 结构，即满足不等式(3)的度量.

注1　文献[18]在非 Kähler 流形情形下证明了 Higgs 丛的半稳定性蕴含渐近 Hermite-Yang-Mills 结构的存在性. 文献[16]将该结果推广到箭图丛情形. 对于扭曲箭图丛 $\mathscr{R}=(E,\widetilde{E},Q,\phi)$，当 $|Q_0|=|Q_1|=1$ 时，扭曲箭图丛 $\mathscr{R}$ 可退化为 Higgs 丛. 文献[16,18]中考虑的底流形都是 Gauduchon 流形，本文将这些结果推广到底流形是仿射流形的情形.

2　预备知识

2.1　仿射 Gauduchon 流形上的平坦向量丛

设 (M,D) 为一个 n 维仿射流形，其中 D 表示切丛 TM 上的平坦无挠联络. 本文讨论的所有流形均假设其为连通且光滑的. 当 M 的图册仅包含仿射变换作为转移映射时，相应的局部坐标 $\{x^i\}$ 称为仿射坐标. 若 $\{x^i\}$ 定义在开子集 $U\subset M$ 上，则记 y^i 为对应于 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i=1}^n$ 局部平凡化的纤维坐标. 从而在开子集 $TU\subset TM$ 上，可得全纯坐标函数 $z^i=x^i+\sqrt{-1}\,y^i$，进而将 TM 转化为一个复流形，该 n 维复流形记作 $M^{\mathbb{C}}$.

流形 M 上的 (p,q)-形式向量丛定义为

$$\mathscr{A}^{p,q}=\wedge^p T^*M\otimes\wedge^q T^*M,$$

相应的微分算子定义为

$$\partial:=\frac{1}{2}(d\otimes\mathrm{Id}):\ \wedge^p T^*M\otimes\wedge^q T^*M\to\wedge^{p+1}T^*M\otimes\wedge^q T^*M,$$

$$\overline{\partial}:=(-1)^k\,\frac{1}{2}(\mathrm{Id}\otimes d):\ \wedge^p T^*M\otimes\wedge^q T^*M\to\wedge^p T^*M\otimes\wedge^{q+1}T^*M.$$

在仿射几何中，若一个仿射流形 (M,D) 具有关于平坦联络 D 协变不变的体积形式 ν，则称其为特殊仿射流形. 本文假设 (M,D,g,ν) 是特殊仿射流形.

在特殊仿射流形 (M,D,g,ν) 上，体积形式 ν 可诱导出以下同态映射：

$$\mathscr{A}^{n,q}\to\wedge^q T^*M,\qquad \nu\otimes\theta\mapsto(-1)^{n(n-1)/2}\theta,$$

$$\mathscr{A}^{p,n}\to\wedge^p T^*M,\qquad \theta\otimes\nu\mapsto(-1)^{n(n-1)/2}\theta.$$

当 M 为紧流形时，(n,n)-形式 θ 的积分可通过 $\int_M \frac{\theta}{\nu}$ 实现. 光滑 Riemann 度量 g 在 (M,D) 上诱导出一个 $(1,1)$-形式，在局部仿射坐标系下表示为

$$\omega_g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j.$$

当度量 g 满足 $\partial\bar{\partial}\omega_g^{n-1}=0$ 时，称为仿射 Gauduchon 度量. 由文献[1]可知，在紧致连通特殊仿射流形上，每个 Riemann 度量的共形类中都存在唯一的仿射 Gauduchon 度量(相差一个正比例常数).

在仿射流形理论中，平坦复向量丛可视为复流形上全纯向量丛的自然对应物. 设 E 为仿射流形 M 上的光滑复向量丛，通过自然投影 $M^{\mathbb{C}}=TM\to M$ 将 E 拉回到 $M^{\mathbb{C}}$ 上，记为 $E^{\mathbb{C}}$, $E^{\mathbb{C}}$ 的转移函数由 E 的转移函数沿 TM 纤维均匀延拓而得. 当且仅当 E 的转移函数局部为常数时，$M^{\mathbb{C}}$ 上相应的转移函数才是全纯的. 因此，$E^{\mathbb{C}}$ 成为 $M^{\mathbb{C}}$ 上全纯向量丛的充要条件是 E 为 M 上的平坦向量丛. 从而对应关系 $E \mapsto E^{\mathbb{C}}$ 建立了 M 上平坦向量丛与 $M^{\mathbb{C}}$ 上沿 TM 纤维保持常数的全纯向量丛之间的双射.

设 H 为 E 上的 Hermite 度量，其在 $E^{\mathbb{C}}$ 上诱导出相应度量. 记 ∇_H 为 $E^{\mathbb{C}}$ 上该度量对应的 Chern 联络. 根据 $(1,0)$-分量和 $(0,1)$-分量的分解，∇_H 可表示为算子对

$$(\partial_H, \bar{\partial}_E) = (\partial_{H,\nabla}, \bar{\partial}_{E,\nabla}),$$

其中 $\partial_{H,\nabla}: \Gamma(E)\to \mathscr{A}^{1,0}(E)$ 和 $\bar{\partial}_{E,\nabla}: \Gamma(E)\to\mathscr{A}^{0,1}(E)$ 为光滑微分算子. 该算子对称为 (E,H) 的扩展 Hermite 联络.

对于平坦联络 ∇ 的局部常值标架 $\{s_1,s_2,\cdots,s_r\}$，记 $\boldsymbol{H}_{\alpha\bar{\beta}}=H(s_\alpha,s_\beta)$，本文进行如下定义：

1) 扩展联络形式 $A_H=\boldsymbol{H}^{-1}\partial\boldsymbol{H}\in\mathscr{A}^{1,0}(\mathrm{End}\,E)$；

2) 扩展曲率形式 $F_H=\bar{\partial}A_H\in\mathscr{A}^{1,1}(\mathrm{End}\,E)$；

3) 扩展平均曲率 $\mathscr{K}_H=\mathrm{tr}_g F_H\in C^\infty(M,\mathrm{End}\,E)$；

4) 扩展第一 Chern 形式 $c_1(E,H)=\mathrm{tr}_E F_H\in\mathscr{A}^{1,1}$.

需注意 tr_g 表示用 Riemann 度量 g 进行微分形式的缩并，而 tr_E 表示 $\mathrm{End}\,E$ 纤维上的迹映射. 在仿射 Gauduchon 流形 (M,D,g,ν) 上，平坦向量丛 (E,∇) 的度定义为

$$\deg_g(E) := \int_M \frac{c_1(E,H)\wedge\omega_g^{n-1}}{\nu}.$$

该定义对紧流形情形是良定的[1].

2.2　仿射 Gauduchon 流形上的箭图丛

关于扭曲箭图丛的理论参见文献[4].

定义 1　一个箭图 $Q=(Q_0,Q_1)$ 由顶点集 Q_0 和箭头集 Q_1 构成，并配备两个映射 $\mathfrak{h},\mathfrak{t}: Q_1\to Q_0$. 对任意箭头 $a\in Q_1$，$\mathfrak{h}a$ 称为其首顶点，$\mathfrak{t}a$ 称为其尾顶点.

在仿射 Gauduchon 流形 (M,D,g,ν) 上，扭曲箭图丛定义为四元组 $(E,\widetilde{E},Q,\phi)$，其中：$E=\{E_v\}_{v\in Q_0}$ 是一族平坦向量丛，每个 E_v 关联于顶点 $v\in Q_0$；$\widetilde{E}=\{\widetilde{E}_a\}_{a\in Q_1}$ 是一族平坦向量丛，每个 $\widetilde{E}_a$ 关联于箭头 $a\in Q_1$；$\phi=\{\phi_a: E_{\mathfrak{t}a}\otimes\widetilde{E}_a\to E_{\mathfrak{h}a}\}_{a\in Q_1}$ 是丛同态集，且满足除有限个顶点 $v\in Q_0$ 外 $E_v=0$，除有限个箭头 $a\in Q_1$ 外 $\phi_a=0$.

在扭曲箭图丛 $\mathscr{R}=(E,\widetilde{E},Q,\phi)$ 上，Hermite 度量 H 由一族 Hermite 度量 $\{H_v\}_{v\in Q_0}$ 构成，每个非零丛 E_v 配备度量 H_v. 给定实参数集 $\sigma=\{\sigma_v\}_{v\in Q_0}$ 和 $\tau=\{\tau_v\}_{v\in Q_0}$，若对任意的 $\varepsilon>0$ 和每个 $v\in Q_0$，度量 H_v 满足

$$\sup_M\left|\sigma_v \mathrm{tr}_g F_{H_v} + \sum_{a\in\mathfrak{h}^{-1}(v)}\phi_a\circ\phi_a^{*H_v} - \sum_{a\in\mathfrak{t}^{-1}(v)}\phi_a^{*H_v}\circ\phi_a - \tau_v\cdot\mathrm{Id}_{E_v}\right|_{H_v}<\varepsilon, \tag{3}$$

则称 $\mathscr{R}$ 具有渐近仿射 (σ,τ)-Hermite-Yang-Mills 结构 $H=\{H_v\}_{v\in Q_0}$. 丛的半稳定性条件一般不足以导出一致的 C^0 估计，因此不能求解方程(2). 半稳定性条件容许找出一个度量使得该度量尽管不能满足方程(2)，但在某种意义下，可以做到“几乎”满足方程(2). 为概括这种性质，Kobayashi[19]首先在全纯向量丛情形下给出了如下不等式：

$$\sup_M \left| \sqrt{-1} \Lambda_{\omega_g} F_H - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E \right|_H < \varepsilon, \tag{4}$$

由此定义了渐近 Hermite-Yang-Mills 结构的概念. 不等式(3)可视为不等式(4)在箭图丛情形下的推广. 本文证明半稳定的扭曲箭图丛 $\mathscr{R}=(E,\widetilde{E},Q,\phi)$上存在度量满足不等式(3).

对于特殊仿射 Gauduchon 流形(M,D,g,ν)上的全纯向量丛 E_v，根据 Chern-Weil 理论，其度定义为

$$\deg(E_v)=\frac{1}{n}\int_M \mathrm{tr}_{E_v}(\mathrm{tr}_g F_{H_v})\frac{\omega_g^n}{\nu},$$

其中 F_{H_v} 是 E_v 上关于度量 H_v 的 Chern 联络 D_{H_v} 的曲率. 扭曲全纯箭图丛 $\mathscr{R}$ 的仿射(σ,τ)-度和仿射(σ,τ)-斜率分别定义为

$$\deg_{\sigma,\tau}(\mathscr{R})=\sum_{v\in Q_0}(\sigma_v\deg(E_v)-\tau_v\mathrm{rank}(E_v)),\qquad \mu_{\sigma,\tau}(\mathscr{R})=\frac{\deg_{\sigma,\tau}(\mathscr{R})}{\sum\limits_{v\in Q_0}\sigma_v\mathrm{rank}(E_v)},$$

其中 $\mathrm{rank}(E_v)$表示丛 E_v 的秩. 若对 $\mathscr{R}$ 的所有正则 Q-子层 $\mathscr{R}'$都满足

$$\mu_{\sigma,\tau}(\mathscr{R}')\leqslant\mu_{\sigma,\tau}(\mathscr{R}),$$

则称 $\mathscr{R}$ 是仿射(σ,τ)-半稳定的.

3 定理1的证明

先在扭曲箭图丛 $\mathscr{R}=(E,\widetilde{E},Q,\phi)$上固定一个适当的 Hermite 度量 H_0. 为简化，记 $H_{\varepsilon,v}=H_{0,v}h_\varepsilon$. 对每个顶点 $v\in Q_0$，考虑如下扰动方程：

$$L^{\varepsilon}_{(\sigma,\tau)v}(h_\varepsilon):=\Phi(H_{\varepsilon,v})+\varepsilon\sigma_v(\log h_{\varepsilon,v})=0, \tag{5}$$

其中

$$\Phi(H_{\varepsilon,v})=\sigma_v\mathrm{tr}_g F_{H_{\varepsilon,v}}+\sum_{a\in h^{-1}(v)}\phi_a\circ\phi_a^{*H_{\varepsilon,v}}-\sum_{a\in t^{-1}(v)}\phi_a^{*H_{\varepsilon,v}}\circ\phi_a-\tau_v\cdot\mathrm{Id}_{E_v}.$$

基于文献[15,20]的方法可知，对任意的 $\varepsilon\in(0,1]$，方程(5)都是可解的. 由于该过程较标准且繁琐，故本文略. 利用仿射(σ,τ)-半稳定性假设，可进一步证明：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\sigma_v\max_M|\log h_{\varepsilon,v}|_{H_{0,v}}=0.$$

从而可得当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\max\limits_M|\Phi(H_{\varepsilon,v})|_{H_{\varepsilon,v}}$ 收敛于零.

通过适当的共形变换，可假设背景度量 H_0 满足：

$$\sum_{v\in Q_0}\mathrm{tr}_{E_v}(\Phi(H_{0,v}))=0.$$

应用极大值原理，得

$$\sum_{v\in Q_0}\sigma_v\mathrm{tr}_{E_v}(\log h_{\varepsilon,v})=0.$$

定义空间：

$$\mathrm{Herm}(E_v,H_{0,v})=\{\eta\in\mathrm{End}(E_v)\,|\,\eta^{*H_{0,v}}=\eta\},$$
$$\mathrm{Herm}^+(E_v,H_{0,v})=\{\rho\in\mathrm{Herm}(E_v,H_{0,v})\,|\,\rho>0\}.$$

用 Moser 迭代法可得如下引理(类似于文献[20]中的结果).

引理1 若 $h_{\varepsilon,v}\in\mathrm{Herm}^+(E_v,H_{0,v})$对某个 $\varepsilon>0$ 满足 $L^{\varepsilon}_{(\sigma,\tau)v}(h_\varepsilon)=0$，则有估计：

$$\sigma_v\max_M|\log h_{\varepsilon,v}|_{H_{0,v}}\leqslant C_1\Big(\sum_{v\in Q_0}\sigma_v\|\log h_{\varepsilon,v}\|_{L^2}+\max_M\sum_{v\in Q_0}|\Phi(H_{0,v})|_{H_{0,v}}\Big),$$

其中正常数 C_1 仅依赖于度量 g 和 H_0.

由文献[20]知，对任意的 $\eta\in\mathrm{Herm}(E_v,H_{0,v})$，存在开子集 $W\subset M$，使得对每个 $y\in W$，有分解

$$\eta(y)=\sum_{i=1}^r\lambda_i(y)\cdot e_i(y)\otimes e^i(y),$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 为光滑函数，$\{e_i\}_{i=1}^r$是 E_v 的酉基，$\{e^i\}_{i=1}^r$为其对偶基. 设 $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$，

$\psi\in C^{\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$，$A=\sum_{i,j=1}^{r}A_j^i e_i\otimes e^j\in \mathrm{End}(E_v)$（设 $\mathrm{rank}(E_v)=r$）. 参照文献[21]，定义

$$\varphi(\eta)(y)=\sum_{i=1}^{r}\varphi(\lambda_i)e_i\otimes e^i,$$

$$\psi(\eta)(A)(y)=\sum_{i,j=1}^{r}\psi(\lambda_j,\lambda_i)A_j^i e_i\otimes e^j.$$

引理 2　若 $h_{\varepsilon,v}\in \mathrm{Herm}^+(E_v,H_{0,v})$ 对任意的 $\varepsilon>0$ 和每个顶点 $v\in Q_0$ 满足方程(5)，则下列不等式成立：

$$\sum_{v\in Q_0}\left(\int_M \mathrm{tr}_{E_v}(\Phi(H_{0,v})s_{\varepsilon,v})\frac{\omega_g^n}{\nu}+\sigma_v\int_M\langle\Psi(s_{\varepsilon,v})(\bar\partial_{E_v}s_{\varepsilon,v}),\bar\partial_{E_v}s_{\varepsilon,v}\rangle_{H_{0,v}}\frac{\omega_g^n}{\nu}\right)\leqslant-\varepsilon\sum_{v\in Q_0}\sigma_v\|s_{\varepsilon,v}\|_{L^2}^2,$$

其中 $s_{\varepsilon,v}=\log h_{\varepsilon,v}$，且函数 Ψ 定义为

$$\Psi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{y-x}-1}{y-x}, & x\neq y,\\ 1, & x=y.\end{cases}$$

证明：直接计算可得

$$\sum_{v\in Q_0}\int_M \mathrm{tr}_{E_v}((\Phi(H_{\varepsilon,v})-\Phi(H_{0,v}))s_{\varepsilon,v})\frac{\omega_g^n}{\nu}\geqslant\sum_{v\in Q_0}\int_M\sigma_v\langle \mathrm{tr}_g\bar\partial_{E_v}(h_{\varepsilon,v}^{-1}\partial_{H_{0,v}}h_{\varepsilon,v}),s_{\varepsilon,v}\rangle_{H_{0,v}}\frac{\omega_g^n}{\nu}=$$
$$\sum_{v\in Q_0}\sigma_v\int_M\langle\Psi(s_{\varepsilon,v})(\bar\partial_{E_v}s_{\varepsilon,v}),\bar\partial_{E_v}s_{\varepsilon,v}\rangle_{H_{0,v}}\frac{\omega_g^n}{\nu},\tag{6}$$

其中第一个不等式应用了文献[4]中引理 3.5 的结果：

$$\sum_{v\in Q_0}\left\langle\sum_{a\in\mathfrak{h}^{-1}(v)}\phi_a\circ\phi_a^{*H_{\varepsilon,v}}-\sum_{a\in\mathfrak{t}^{-1}(v)}\phi_a^{*H_{\varepsilon,v}}\circ\phi_a,s_{\varepsilon,v}\right\rangle\geqslant\sum_{v\in Q_0}\left\langle\sum_{a\in\mathfrak{h}^{-1}(v)}\phi_a\circ\phi_a^{*H_{0,v}}-\sum_{a\in\mathfrak{t}^{-1}(v)}\phi_a^{*H_{0,v}}\circ\phi_a,s_{\varepsilon,v}\right\rangle,$$

而第二个等式则源于文献[18]中命题 3.1. 结合方程(5)和不等式(6)即可完成证明. 证毕.

下面证明定理 1. 首先给出如下断言.

断言 1　若 $\mathcal{R}$ 是仿射(σ,τ)-半稳定的，则对每个 $v\in Q_0$ 都有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\max_M|\Phi(H_{\varepsilon,v})|_{H_{\varepsilon,v}}=0.\tag{7}$$

若断言 1 不成立，则存在 $\delta>0$ 和子列 $\varepsilon_i\to0$，$i\to+\infty$，使得 $\sum_{v\in Q_0}\sigma_v\|\log h_{\varepsilon_i,v}\|_{L^2}\to+\infty$，且

$$\max_M\sum_{v\in Q_0}|\Phi(H_{\varepsilon_i,v})|_{H_{\varepsilon_i,v}}=\varepsilon_i\max_M\sum_{v\in Q_0}\sigma_v|\log h_{\varepsilon_i,v}|_{H_{\varepsilon_i,v}}\geqslant\delta.\tag{8}$$

令 $s_{\varepsilon_i,v}=\log h_{\varepsilon_i,v}$，$l_{i,v}=\|s_{\varepsilon_i,v}\|_{L^2}$，$u_{\varepsilon_i,v}=\dfrac{s_{\varepsilon_i,v}}{l_{i,v}}$，则有 $\sum_{v\in Q_0}\mathrm{tr}_{E_v}(\sigma_v u_{\varepsilon_i,v})=0$ 且 $\|u_{\varepsilon_i,v}\|_{L^2}=1$. 结合式(8)和引理 1 可得

$$\sum_{v\in Q_0}\sigma_v l_{i,v}\geqslant\frac{\delta}{\varepsilon_i C_2}-\max_M\sum_{v\in Q_0}|\Phi(H_{0,v})|_{H_{0,v}},\tag{9}$$

$$\max_M|u_{\varepsilon_i,v}|\leqslant\frac{C_3}{l_{i,v}}\Big(\sum_{v\in Q_0}\sigma_v l_{i,v}+\max_M\sum_{v\in Q_0}|\Phi(H_{0,v})|_{H_0}\Big)<C_4<+\infty,\tag{10}$$

其中 C_2,C_3 和 C_4 为正常数.

步骤 1）证明 $\|u_{\varepsilon_i,v}\|_{L_1^2}$ 一致有界. 由于 $\|u_{\varepsilon_i,v}\|_{L^2}=1$，因此只需证明 $\|\mathrm{d}u_{\varepsilon_i,v}\|_{L^2}$ 一致有界.

根据引理 2，对每个 h_{ε_i} 下式成立：

$$\sum_{v\in Q_0}\left(\int_M\mathrm{tr}_{E_v}(\Phi(H_{0,v})u_{\varepsilon_i,v})\frac{\omega_g^n}{\nu}+\sigma_v\int_X l_{i,v}\langle\Psi(l_{i,v}u_{\varepsilon_i,v})(\bar\partial_{E_v}u_{\varepsilon_i,v}),\bar\partial_{E_v}u_{\varepsilon_i,v}\rangle_{H_{0,v}}\frac{\omega_g^n}{\nu}\right)\leqslant-\varepsilon_i\sum_{v\in Q_0}\sigma_v l_{i,v},\tag{11}$$

将式(9)代入式(11)，可得

$$\frac{\delta}{C_3}+\sum_{v\in Q_0}\left(\int_M\mathrm{tr}_{E_v}(\Phi(H_{0,v})u_{\varepsilon_i,v})\frac{\omega_g^n}{\nu}+\sigma_v\int_M l_{i,v}\langle\Psi(l_{i,v}u_{\varepsilon_i,v})(\bar\partial_{E_v}u_{\varepsilon_i,v}),\bar\partial_{E_v}u_{\varepsilon_i,v}\rangle_{H_{0,v}}\frac{\omega_g^n}{\nu}\right)\leqslant$$
$$\varepsilon_i\sum_{v\in Q_0}\max_M|\Phi(H_{0,v})|_{H_{0,v}}.\tag{12}$$

考虑函数
$$l\Psi(lx,ly)=\begin{cases} l, & x=y, \\ \dfrac{e^{l(y-x)}-1}{y-x}, & x\neq y. \end{cases}$$
由式(10)，可设$(x,y)\in[-C_5,C_5]\times[-C_5,C_5]$，其中$C_5$为正常数. 容易验证
$$l\Psi(lx,ly)\to\begin{cases} (x-y)^{-1}, & x>y, \\ +\infty, & x\leqslant y \end{cases} \tag{13}$$
当$l\to+\infty$时单调递增. 设$\zeta\in C^{\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R}^{+})$，满足当$x>y$时$\zeta(x,y)<(x-y)^{-1}$. 由式(12),(13)及文献[21]中引理5.4的论证可知，
$$\frac{\delta}{C_2}+\sum_{v\in Q_0}\left(\int_M \mathrm{tr}_{E_v}(\Phi(H_{0,v})u_{\varepsilon_i,v})\frac{\omega_g^n}{\nu}+\sigma_v\int_X\langle\zeta(u_{\varepsilon_i,v})(\bar\partial_{E_v}u_{\varepsilon_i,v}),\bar\partial_{E_v}u_{\varepsilon_i,v}\rangle_{H_{0,v}}\frac{\omega_g^n}{\nu}\right)\leqslant \varepsilon_i\sum_{v\in Q_0}\max_M|\Phi(H_{0,v})|_{H_{0,v}}. \tag{14}$$
当$i\gg1$时，特别地，取$\zeta(x,y)=\dfrac{1}{3C_5}$. 显然，当$(x,y)\in[-C_5,C_5]\times[-C_5,C_5]$且$x>y$时，$\dfrac{1}{3C_5}<\dfrac{1}{x-y}$，表明
$$\frac{\delta}{C_2}+\sum_{v\in Q_0}\left(\int_M \mathrm{tr}_{E_v}(\Phi(H_{0,v})u_{\varepsilon_i,v})\frac{\omega_g^n}{\nu}+\sigma_v\int_M\frac{1}{3C_5}|\bar\partial_{E_v}u_{\varepsilon_i,v}|^2_{H_{0,v}}\frac{\omega_g^n}{\nu}\right)\leqslant\varepsilon_i\sum_{v\in Q_0}\max_M|\Phi(H_{0,v})|_{H_{0,v}}.$$
对于$i\gg1$，有
$$\sum_{v\in Q_0}\int_M|\bar\partial_{E_v}u_{\varepsilon_i,v}|^2_{H_{0,v}}\frac{\omega^n}{n!}\leqslant C_6\sum_{v\in Q_0}\max_M|\Phi(H_{0,v})|_{H_{0,v}}\mathrm{Vol}(M),$$
其中C_6为正常数. 因此，$u_{\varepsilon_i,v}$在L_1^2中有界. 于是可选取子序列$\{u_{\varepsilon_{i_j},v}\}$，使得$u_{\varepsilon_{i_j},v}\rightharpoonup u_{\infty,v}$在$L_1^2$中弱收敛. 为简便，仍记作$\{u_{\varepsilon_i,v}\}$. 注意到$L_1^2\hookrightarrow L^2$，则有
$$1=\int_M|u_{\varepsilon_i,v}|^2_{H_{0,v}}\to\int_M|u_{\infty,v}|^2_{H_{0,v}}.$$
表明$\|u_{\infty,v}\|_{L^2}=1$，且$u_{\infty,v}$非零.

利用式(14)并参照文献[21]中引理5.4的类似讨论，可得
$$\frac{\delta}{C_2}+\sum_{v\in Q_0}\left(\int_M \mathrm{tr}_{E_v}(\Phi(H_{0,v})u_{\infty,v})\frac{\omega_g^n}{\nu}+\sigma_v\int_M\langle\zeta(u_{\infty,v})(\bar\partial_{E_v}u_{\infty,v}),\bar\partial_{E_v}u_{\infty,v}\rangle_{H_{0,v}}\frac{\omega_g^n}{\nu}\right)\leqslant 0. \tag{15}$$
步骤2) 利用文献[3]的技巧，构造一个子层，证明与$\mathcal{R}$的仿射(σ,τ)-半稳定性矛盾.

由式(15)及文献[21]中引理5.5可知，$u_{\infty,v}$的特征值几乎处处为常数. 设$\lambda_{1,v}<\lambda_{2,v}<\cdots<\lambda_{l,v}$为$u_{\infty,v}$的不同特征值. 根据$\sum\limits_{v\in Q_0}\mathrm{tr}_{E_v}(\sigma_v u_{\infty,v})=0$且$\|u_{\infty,v}\|_{L^2}=1$，可推出$2\leqslant l\leqslant r$.

对每个$\lambda_{j,v}(1\leqslant j\leqslant l-1)$，构造函数$P_{j,v}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，满足
$$P_{j,v}=\begin{cases} 1, & x\leqslant\lambda_{j,v}, \\ 0, & x\geqslant\lambda_{j+1,v}. \end{cases}$$
令$\pi_{j,v}=P_{j,v}(u_{\infty,v})$，并设$E_{j,v}=\pi_{j,v}(E_v)$. 根据文献[21]的结论，可得：

1) $\pi_{j,v}\in L_1^2$；

2) $\pi_{j,v}^2=\pi_{j,v}=\pi_{j,v}^{*H_{0,v}}$；

3) $(\mathrm{Id}_{E_{j,v}}-\pi_{j,v})\bar\partial_{E_{j,v}}\pi_{j,v}=0$.

根据文献[3]关于L_1^2-子丛的正则性结论，$\{\pi_{j,v}\}_{j=1}^{l-1}$确定了$E_v$的$(l-1)$个凝聚子层. 由于$\sum\limits_{v\in Q_0}\mathrm{tr}_{E_v}(\sigma_v u_{\infty,v})=0$，且
$$u_{\infty,v}=\lambda_{l,v}\mathrm{Id}_{E_v}-\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1,v}-\lambda_{j,v})\pi_{j,v},$$

可得

$$\sum_{v\in Q_0}\left(\sigma_v\lambda_{l,v}\mathrm{rank}(E_v)-\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1,v}-\lambda_{j,v})\sigma_v\mathrm{rank}(E_{j,v})\right)=0. \tag{16}$$

记

$$\lambda_{l,\tilde{v}}=\max_{v\in Q_0}\lambda_{l,v},\qquad \sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1,\hat{v}}-\lambda_{j,\hat{v}})=\min_{v\in Q_0}\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1,v}-\lambda_{j,v}).$$

则由式(16)可得

$$\sum_{v\in Q_0}\sigma_v\lambda_{l,\tilde{v}}\mathrm{rank}(E_v)\geqslant\sum_{v\in Q_0}\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1,\hat{v}}-\lambda_{j,\hat{v}})\sigma_v\mathrm{rank}(E_{j,v}). \tag{17}$$

构造

$$\chi=n\left(\lambda_{l,\tilde{v}}\deg_{\sigma,\tau}(\mathscr{R})-\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1,\hat{v}}-\lambda_{j,\hat{v}})\deg_{\sigma,\tau}(\mathscr{R}_j)\right). \tag{18}$$

一方面，将式(17)代入式(18)可得

$$\chi\geqslant n\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1,\hat{v}}-\lambda_{j,\hat{v}})\sum_{v\in Q_0}\sigma_v\mathrm{rank}(E_{j,v})(\mu_{\sigma,\tau}(\mathscr{R})-\mu_{\sigma,\tau}(\mathscr{R}_j)). \tag{19}$$

另一方面，根据文献[3-4,21]的结论，可得以下 Chern-Weil 公式：

$$\deg(E_{j,v})=\frac{1}{n}\sum_{v\in Q_0}\left(\int_M\langle\mathrm{tr}_gF_{H_{0,v}},\pi_{j,v}\rangle_{H_{0,v}}\frac{\omega_g^n}{\nu}-\int_M|\bar{\partial}_{E_v}\pi_{j,v}|^2_{H_{0,v}}\frac{\omega_g^n}{\nu}\right). \tag{20}$$

将式(20)代入下式可得

$$\begin{aligned}\chi=&\sum_{v\in Q_0}\int_M\left\langle\sigma_v\mathrm{tr}_gF_{H_{0,v}},\lambda_{l,v}\cdot\mathrm{Id}_{E_v}-\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j-1,v}-\lambda_{j,v})\pi_{j,v}\right\rangle_{H_{0,v}}\frac{\omega_g^n}{\nu}+\\&\sum_{v\in Q_0}\sigma_v\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1,v}-\lambda_{j,v})\|\bar{\partial}_{E_v}\pi_{j,v}\|^2_{L^2}-\sum_{v\in Q_0}\tau_v\left(\lambda_{l,v}\mathrm{rank}(E_v)-\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1,v}-\lambda_{j,v})\mathrm{rank}(E_{j,v})\right)+\\&\sum_{v\in Q_0}\int_X\left\langle\sigma_v\mathrm{tr}_gF_{H_{0,v}},(\lambda_{l,\tilde{v}}-\lambda_{l,v})\mathrm{Id}_{E_v}+\left(\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1,v}-\lambda_{j,v})-\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1,\hat{v}}-\lambda_{j,\hat{v}})\right)\pi_{j,v}\right\rangle_{H_{0,v}}\frac{\omega_g^n}{\nu}+\\&\sum_{v\in Q_0}\sigma_v\left[\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1,\hat{v}}-\lambda_{j,\hat{v}})-\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1,v}-\lambda_{j,v})\right]\|\bar{\partial}_{E_v}\pi_{j,v}\|^2_{L^2}+\\&\sum_{v\in Q_0}\tau_v\left((\lambda_{l,v}-\lambda_{l,\tilde{v}})\mathrm{rank}(E_v)+\left(\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1,\hat{v}}-\lambda_{j,\hat{v}})-\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1,v}-\lambda_{j,v})\right)\mathrm{rank}(E_{j,v})\right)\leqslant\\&\sum_{v\in Q_0}\int_M\left(\langle\Phi(H_{0,v}),u_{\infty,v}\rangle_{H_{0,v}}+\left\langle\sigma_v\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1,v}-\lambda_{j,v})(\mathrm{d}P_{j,v})^2(u_{\infty,v})(\bar{\partial}_{E_v}u_{\infty,v}),\bar{\partial}_{E_v}u_{\infty,v}\right\rangle_{H_{0,v}}\right)\frac{\omega_g^n}{\nu},\end{aligned}$$

其中函数 $\mathrm{d}P_{j,v}$：$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\mathrm{d}P_{j,v}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{P_{j,v}(x)-P_{j,v}(y)}{x-y}, & x\neq y,\\ P'_{j,v}(x), & x=y.\end{cases}$$

根据式(15)以及文献[22]，可得

$$\chi\leqslant-\frac{\delta}{C_2}. \tag{21}$$

将式(19)与式(21)结合，可得与箭图丛 $\mathscr{R}(E,\tilde{E},Q,\phi)$ 的仿射 (σ,τ)-半稳定性矛盾的结论. 证毕.

参 考 文 献

[1] LOFTIN J. Affine Hermite-Einstein Metrics [J]. Asian Journal of Mathematics, 2009, 13(1): 101-130.

[2] DONALDSON S K. Anti Self-dual Yang-Mills Connections over Complex Algebraic Surfaces and Stable Vector Bundles [J]. Proceedings of the London Mathematical Society (3), 1985, 50(1): 1-26.

[3] UHLENBECK K, YAU S T. On the Existence of Hermitian-Yang-Mills Connections in Stable Vector Bundles [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1986, 39(S1): S257-S293.

[4] ÁLVAREZ-CÓNSUL L, GARCIÁ-PRADA O. Hitchin-Kobayashi Correspondence, Quivers, and Vortices [J]. Communications in Mathematical Physics, 2003, 238(1/2): 1-33.

[5] BISWAS I, KASUYA H. Higgs Bundles and Flat Connections over Compact Sasakian Manifolds [J]. Communications in Mathematical Physics, 2021, 385(1): 267-290.

[6] BISWAS I, LOFTIN J. Hermitian-Einstein Connections on Principal Bundles over Flat Affine Manifolds [J]. International Journal of Mathematics, 2012, 23(4): 1250039-1-1250039-23.

[7] BISWAS I, LOFTIN J, STEMMLER M. Affine Yang-Mills-Higgs Metrics [J]. Journal of Symplectic Geometry, 2013, 11(3): 377-404.

[8] BISWAS I, LOFTIN J, STEMMLER M. The Vortex Equation on Affine Manifolds [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2014, 366(7): 3925-3941.

[9] CHEN X M, WENTWORTH R A. A Donaldson-Uhlenbeck-Yau Theorem for Normal Varieties and Semistable Bundles on Degenerating Families [J]. Mathematische Annalen, 2024, 388(2): 1903-1935.

[10] WANG R X, ZHANG P. The Hitchin-Kobayashi Correspondence for Holomorphic Pairs over Non-Kähler Manifolds [J]. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2021, 172: 103050-1-103050-32.

[11] WU D, ZHANG X. Higgs Bundles over Foliation Manifolds [J]. Science China Mathematics, 2021, 64(2): 399-420.

[12] ZHANG C J, ZHANG P, ZHANG X. Higgs Bundles over Non-compact Gauduchon Manifolds [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2021, 374(5): 3735-3759.

[13] SHEN Z H, ZHANG C J, ZHANG X. Flat Higgs Bundles over Non-compact Affine Gauduchon Manifolds [J]. Journal of Geometry and Physics, 2022, 175: 104475-1-104475-25.

[14] DE ARAUJO A. Generalized Quivers, Orthogonal and Symplectic Representations, and Hitchin-Kobayashi Correspondences [J]. International Journal of Mathematics, 2019, 30(3): 1850085-1-1850085-46.

[15] HU Z, HUANG P F. The Hitchin-Kobayashi Correspondence for Quiver Bundles over Generalized Kähler Manifolds [J]. Journal of Geometric Analysis, 2020, 30(4): 3641-3671.

[16] CHEN D N, CHENG J, SHEN X, et al. Semi-stable Quiver Bundles over Gauduchon Manifolds [J]. AIMS Mathematics, 2023, 8(5): 11546-11556.

[17] CHEN D N, CHENG J, LONE M A, et al. Canonical Metrics on Holomorphic Quiver Bundles over Compact Generalized Kähler Manifolds [J]. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales: Serie A (Matemáticas), 2025, 119(1): 5-1-5-18.

[18] NIE Y C, ZHANG X. Semistable Higgs Bundles over Compact Gauduchon Manifolds [J]. Journal of Geometric Analysis, 2018, 28(1): 627-642.

[19] KOBAYASHI S. Differential Geometry of Complex Vector Bundles [M]. Princeton: Princeton University Press, 1987: 1-305.

[20] LÜBKE M, TELEMAN A. The Kobayashi-Hitchin Correspondence [M]. [S. l.]: World Scientific Publishing, 1995: 1-254.

[21] SIMPSON C T. Constructing Variations of Hodge Structure Using Yang-Mills Theory and Applications to Uniformization [J]. Journal of the American Mathematical Society, 1988, 1(4): 867-918.

[22] LI J Y, ZHANG X. Existence of Approximate Hermitian-Einstein Structures on Semi-stable Higgs Bundles [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2015, 52(3/4): 783-795.

(责任编辑: 赵立芹)