

# 三自由度直升机多刚体动力学建模与参数辨识

李世尧<sup>1,2</sup>, 张特<sup>3</sup>, 朱波<sup>4</sup>, 彭琛<sup>3</sup>, 胡天江<sup>1</sup>

(1. 中山大学 航空航天学院, 深圳 518107; 2. 哈尔滨工业大学 控制与仿真中心, 哈尔滨 150001; 3. 电子科技大学 航空航天学院, 成都 611731; 4. 南京大学 高端控制与智能运维研发中心, 苏州 215163)

**摘要:** 针对编码器测角精度有限的三自由度直升机教学与科研平台, 从多刚体系统的视角, 开展了三刚体动力学建模、多通道耦合动力学参数辨识、电机-螺旋桨升力组件特性辨识、模型线性化处理与分析、模型特性验证等全链条工作, 最终获得了可以直接用于基于模型控制设计的标称模型, 并从模型描述平台特性的完整性和精确性方面, 开展了大量对比实验。基于该标称模型, 设计并实验验证了两个“前馈+基于线性二次型调节器的反馈控制”角轨迹跟踪控制器, 获得的角轨迹跟踪控制精度水平可作为其他高精度算法的对标对象。

**关键词:** 多刚体动力学; 参数辨识; 三自由度直升机; 基于模型的控制

**中图分类号:** V249.122 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5497(2024)11-3379-13

**DOI:** 10.13229/j.cnki.jdxbgxb.20220745

## Multi-rigid-body dynamics and parameter identification of a 3-DOF helicopter

LI Shi-yao<sup>1,2</sup>, ZHANG Te<sup>3</sup>, ZHU Bo<sup>4</sup>, PENG Chen<sup>3</sup>, HU Tian-jiang<sup>1</sup>

(1. School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-Sen University, Shenzhen 518107, China; 2. Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 3. School of Aeronautics and Astronautics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China; 4. Center for Advanced Control and Smart Operations, Nanjing University, Suzhou 215163, China)

**Abstract:** The 3-degrees of freedom (DOF) helicopter has three typical features: nonlinearity, underactuation, and suffering from uncertainties and external disturbances. It has received much attention from well-known research groups, owing to its convenience for the verification of motion planning and robust control. However, the lack of accurate models for motion and actuator dynamics leading to the limitation for the motion planning and control algorithms. Motivated by this fact, we study the model of a 3-DOF helicopter platform as a multi-rigid-body system, which is equipped with low-precision encoders for attitude measurements. The detailed work includes: ① modelling the dynamics for three bodies respectively; ② identifying the parameters of the multi-channel motion as well as the parameters of the motor-propeller lifting component; ③ linearizing and analyzing the nonlinear model; ④ verifying both the

收稿日期: 2022-06-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目(62373386, 61973327).

作者简介: 李世尧(1999-), 男, 博士研究生. 研究方向: 多无人系统, 高性能伺服控制. E-mail: lishiyao\_315@163.com

通信作者: 朱波(1982-), 男, 副教授, 博士. 研究方向: 可靠飞行控制, ADA控制, 自主导航与协同控制.

E-mail: zhubo5@mail.sysu.edu.cn

nonlinear and linearized models. Finally, a benchmark model for the platform is obtained, by which, the model-based controller can be designed. Some experiments are designed to show the completeness and high-accuracy of the benchmark model. Two “feedforward + linear quadratic regulator (LQR)-based feedback” controllers for the angular trajectory tracking are designed based on the identified model and implemented on the experimental setup, where the tracking performance of these controllers can be benchmarked against other advanced algorithms.

**Key words:** multi-rigid body dynamics; parameter identification; 3-DOF helicopter; model-based control

## 0 引言

在我国发布的“中国制造2025”中,航空航天装备被列入十大重点发展领域之一。航空产业的迅猛发展对先进飞行控制技术迭代设计与验证的快速性,以及系统可靠性的要求不断提高,亟需一体化的算法设计与验证平台提供支撑,以解决纯数值仿真验证“不可信”和实物飞行验证“不可行”这一突出问题。国内外工业界和学术界对此问题也一直在不停探索<sup>[1,2]</sup>。针对小无人机和地面机器人的先进规划与控制算法快速设计迭代与验证需求,以加拿大 Quanser 为代表的科技企业基于掌握的 MATLAB 算法模型快速自动生成可执行代码这一技术,研发了一系列易用的教学与科研实验平台,填补了算法设计与实物验证之间的“鸿沟”。这类实验平台往往保留了实际工业对象的核心特征,同时平台硬件与控制端之间特定的通信协议使得开发和验证过程便捷,仅需要少量的代码或简单的 MATLAB/Simulink 程序即可完成算法的代码实现,实物实验开展快捷、简便且安全可靠。

三自由度直升机实验平台是 Quanser 公司研制的验证先进飞行控制和欠驱动机器人轨迹规划与控制技术的室内实验平台,保留了直升机姿态控制模型的欠驱动、非线性、强耦合等核心特征。近年来,该平台受到美国麻省理工学院<sup>[3]</sup>、德国和奥地利研究机构<sup>[4]</sup>、加拿大多伦多大学<sup>[5,6]</sup>、清华大学<sup>[7]</sup>、哈尔滨工业大学<sup>[8]</sup>、吉林大学<sup>[9]</sup>等国内外知名高校的研究关注。对标 Quanser 公司,国内的固高科技开发了一套类似但造价成本更低的三自由度直升机平台(以下简称“固高直升机”)。这两套平台在硬件结构和性能上的差异可以总结为以下几点:

(1) 固高直升机驱动电机的动态性能,以及编码器的角度分辨率相对较低,这给高精度控制

算法设计带来新挑战。但同时也说明,利用固高直升机可以开展测量误差补偿,互补滤波和鲁棒控制等算法的验证。

(2) 在机械结构上,固高直升机和 Quanser 直升机也略有不同。Quanser 直升机的平衡杆和基座之间通过摆杆连接,而固高直升机的平衡杆与基座直接通过转轴连接。为此,Quanser 直升机的动力学模型中需要考虑摆锤效应的影响,例如文献[3]在建模时考虑了平衡杆做摆锤式运动时额外产生的恢复力矩。

(3) 对于 Quanser 直升机典型配置,平衡杆上安装有一个独立电机驱动且可以沿着平衡杆滑动的主动干扰系统(Active disturbing system, ADS)。ADS 不管是静止还是沿着平衡杆滑动,都将对系统升降和偏航通道的转动惯量以及姿态运动带来额外的外部扰动。

现有的三自由度直升机建模研究中,还存在建模完整性不足、核心参数未辨识、模型有效性缺乏验证等问题。以上问题严重影响了借助该实验平台开展先进规划与控制算法的研究工作,特别是对各类鲁棒算法的全面综合与客观评价。因此,本文将固高直升机建模与辨识作为研究重点,并对模型的精确性与工程实用性进行测试与验证。本文的核心贡献可以总结为以下几点:

(1) 针对固高直升机平台,提供了一套考虑三通道耦合因素,特性完整且精度较高的动力学模型。目前,该平台建模工作较少,文献[10-12]直接采用了实验指导书中的粗略模型,该模型对非线性和通道耦合特性过度简化;文献[13-17]中的模型忽略了通道间的耦合关系;文献[18]未考虑偏航通道的动力学模型。对于 Quanser 直升机平台,麻省理工学院<sup>[3]</sup>和法国科学院的研究小组<sup>[19]</sup>分别采用线性化辨识与灰盒模型估计法,获得了准确的平台动力学模型参数与驱动电机参数。本文将建立完整的固高直升机动力学模型与

执行器模型,同时采用耦合系统辨识技术,保证模型核心参数的精确性,并将辨识后的动力学模型及其线性化结果进行开源发布。此工作将填补目前固高直升机平台动力学模型参数和驱动电机参数辨识工作的空白。

(2) 在建模方法上,从多刚体系统建模的新视角,基于拉格朗日法,建立了该平台的三刚体模型。文献[13-18]均将三自由度直升机平台看成一个单刚体(Single-rigid-body, SRB)来建模。三自由度直升机平台是由基座轴、平衡杆和摆杆通过转轴连接而成,本质上是拥有三个关节且底座固定的多刚体连接体,具有典型的多刚体(Multi-rigid-body, MRB)系统特性。SRB 模型忽略了多个刚体关节之间的耦合特性<sup>[19]</sup>。与以往单刚体的建模思路不同,本文从多刚体建模的新视角审视直升机结构,充分考虑了各关节相对运动引起的耦合影响,保留了该平台的三刚体动力学模型的核心特征。

(3) 针对三自由度直升机平台,提供了可供研究者参考的“动力学建模-参数辨识-基于模型的控制设计-控制器在环的验模”全链条研究思路和具体案例。目前,针对此类实验平台,虽有零星的建模和参数辨识工作,但缺乏控制器在环的模型验证研究,尚无可供对比的高精度控制实验结果。本文对辨识后的动力学模型开展了大量对比实验,以评估该模型的精准性;并分别面向二和三自由度姿态控制需求,搭建并验证了LQR控制器在环的控制系统,给出了现有编码器测量条件下的姿态控制性能水平。此工作既验证了辨识模型的准确性,也显示了该模型对基于模型的控制设计具有指导意义。获得的实验结果可供其他控制算法对比参照。

从多刚体动力学角度切入,本文的具体工作主要包括系统全面地开展三刚体连接体动力学建模、多通道耦合动力学参数辨识、电机-螺旋桨升力组件特性辨识、模型线性化处理、模型特性验证等。最终获得了可以直接服务基于模型的控制设计的 benchmark 模型,并从模型描述平台特性的完整性和精确性方面开展大量对比实验。基于线性化的模型,设计并实际执行了“前馈+LQR 反馈”角轨迹跟踪控制器,实现了3个通道的运动控制,弥补了经典研究结果<sup>[7,20]</sup>仅控制2个通道、回避欠驱动特性的不足,实验获得的角轨迹跟踪控制精度水平可作为相同低成本传感器测量条件下

先进高精度控制算法的对标对象。本文涉及的辨识算法、控制算法、获得的非线性模型参数、线性化相关程序及模型数据、实验视频等资料已在 github 主页发布:

[https://github.com/BoZhu-SYSU/3-DOF-helicopter\\_modeling-identification-verification](https://github.com/BoZhu-SYSU/3-DOF-helicopter_modeling-identification-verification)

## 1 三自由度直升机动力学建模

三自由度直升机平台模拟了美国著名的 CH-47 直升机(见图 1),由双螺旋桨驱动产生姿态运动。在结构上,三自由度直升机平台可以看作由双旋翼驱动的多关节机械臂,可用机械臂的分析方式对平台建模。目前主要使用两种方法来推导机械臂的动力学方程<sup>[21]</sup>:牛顿-欧拉法和拉格朗日法。运用牛顿-欧拉运算法则,文献[22]提出了动力学的递归算法,利用了机械臂运动链的典型开式结构,适用于高自由度机械臂。拉格朗日法将机械臂看作一个整体,通过分析它的动能和势能推导出动力学方程,在处理结构较为简单的机械臂时计算量更小。针对 Quanser 三自由度直升机,文献[19]重点分析了关节转动对拉格朗日方程中重力项的影响,建立了较完整的 MRB 模型。文献[4]采用拉格朗日法建模,但将电机电压和推力之间的关系近似为二次函数模型,电机响应模型与实际存在差异。文献[23,24]将该平台简化为 SRB 结构,利用牛顿-欧拉法进行动力学建模,形式上忽略摩擦力的影响,与实际模型存在偏差。文献[25]把该平台视作 MRB 树形结构机器人,使用牛顿-欧拉法的逆动力学建立非线性模型,但模型过于复杂,对控制器设计的指导意义



图 1 CH-47 运输直升机

Fig. 1 CH-47 Helicopter

不大。

本文考虑的固高直升机平台实物如图 2 所示,该平台由基座(*og*)、平衡杆(*bc*)、平衡块(*b*)、螺旋桨(*e,f*)、摆杆(*cd*)等部分组成。螺旋桨和平衡块分别安装在平衡杆的两端,螺旋桨由直流无刷电机驱动,为直升机提供动力。平衡杆以基座为支点做升降和偏航运动,两个螺旋桨和摆杆组成的直升机本体绕平衡杆做俯仰运动,俯仰、升降、偏航方向分别安装了光电旋转编码器用于测量角度。

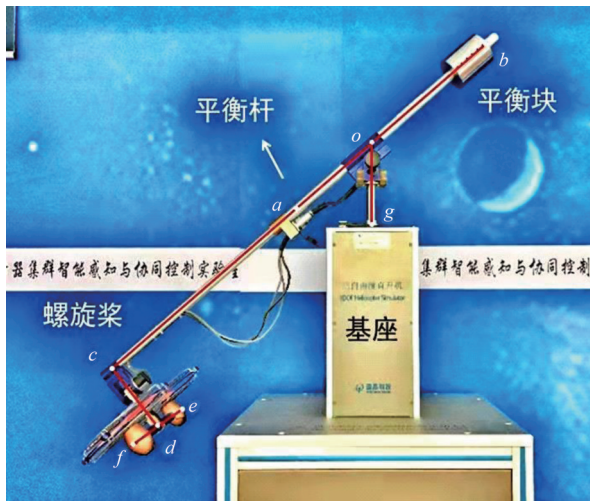


图 2 固高三自由度直升机模拟器

Fig. 2 Googol 3-DOF helicopter simulator

整个平台可以看作由双螺旋桨驱动的按照铰接方式连接的三自由度机械臂。假设基座始终保持稳定且对各通道无影响,根据是否考虑关节处的铰接关系,可将平台本体部分简化为 SRB 结构和 MRB 结构,如图 3 所示。

下面分别建立基于牛顿-欧拉法的 SRB 动力学模型和基于拉格朗日法的 MRB 动力学模型,最终平衡模型的准确性和简洁性,提供一个便于检验轨迹规划和鲁棒控制算法的开源模型。

### 1.1 单刚体建模

单刚体建模时,由摆杆 *c* 旋转造成的重力偏心作用不属于影响升降通道运动的主成分,在建模时可将其忽略。集中在支点 *o* 处的基座支撑力,在以 *o* 点进行力矩分析时不产生作用。因此,在仅考虑直升机姿态变化时忽略基座的作用。这样,整个直升机平台简化为由平衡杆 *bc* 和螺旋桨组成的一个刚体,按照常规 SRB 的欧拉法建模,具体步骤如下:

步骤 1 定义刚体的参考坐标系与机体坐

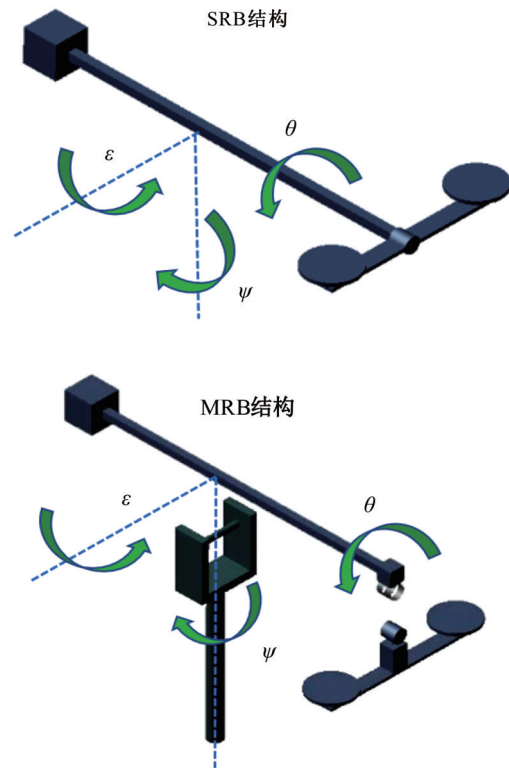


图 3 SRB/MRB 零件拆解图

Fig. 3 Disassembly drawing of SRB/MRB model

标系;

步骤 2 根据参考系与机体系间的转换矩阵将欧拉角变化率映射到机体系下的姿态角速度;

步骤 3 分析刚体受到的外力,在机体系下建立合力矩的模型;

步骤 4 将机体系下姿态角速度及合力矩代入欧拉方程中,整理得到简洁的方程形式。

建模过程中使用的机体坐标系、参考坐标系和欧拉角的定义同文献[23],数学符号与物理量的定义见表 1。使用  $q = [\psi, \epsilon, \theta]^T$  作为描述刚体转动的广义坐标向量,其中,  $\psi$  为偏航角;  $\epsilon$  为升降角;  $\theta$  为俯仰角。在分析过程中忽略摩擦力,空气阻力和科里奥利力<sup>[23]</sup>,得到机体系下的动力学方程:

$$I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) = \tau \quad (1)$$

式中:惯性张量矩阵  $I = \text{diag}(I_\psi, I_\epsilon, I_\theta)$ ; 机体系下角速度  $\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ ,  $\dot{\omega}$  为角速度变化率;  $\tau$  为作用在刚体上的合力矩。

参考系下欧拉角变化率映射到机体系下的角速度为:

$$\omega = T(q)\dot{q} =$$

表 1 固高三自由度直升机平台参数

Table 1 Parameters of Googol 3-DOF Helicopter

参数	含义	数值
$m_h/\text{kg}$	直升机本体质量	1.8
$m_b/\text{kg}$	平衡杆质量	0.679 48
$m_c/\text{kg}$	平衡块质量	3.433
$g/(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$	重力加速度	9.81
$I_\theta/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-2})$	俯仰轴转动惯量	0.031 9
$I_\epsilon, I_\psi/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-2})$	升降轴、偏航轴转动惯量	1.469
$l_{oc}/\text{m}$	直升机连接点和基座的距离	0.78
$l_{ob}/\text{m}$	平衡块和基座的距离	0.33
$l_{cd}/\text{m}$	平衡杆和直升机本体的距离	0.1
$l_{oa}/\text{m}$	平衡杆质心和基座的距离	0.229 6
$l_{dt}/\text{m}$	单个电机和平衡杆的距离	0.17

$$\begin{bmatrix} -\sin(\epsilon) & 0 & 1 \\ \cos(\epsilon)\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\epsilon)\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\epsilon} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2)$$

机体系下角速度变化率

$$I\dot{\omega} = I[\dot{T}(q)\dot{q} + T(q)\ddot{q}] \quad (3)$$

牛顿欧拉方程(1)等号右边合力矩主要包括两部分:

$$\begin{cases} \tau = \tau_u + \tau_g \\ \tau_g = \tau_{gh} + \tau_{gc} + \tau_{gb} \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\tau_u$ 为旋翼产生的气动力矩; $\tau_g$ 为机身的重力矩。气动力矩取决于左、右旋翼产生的气动合力与气动差力的大小。重力矩主要由三部分组成:直升机本体 $m_h$ 产生的力矩 $\tau_{gh}$ ,配重 $m_c$ 产生的力矩 $\tau_{gc}$ ,平衡杆 $m_b$ 产生的力矩 $\tau_{gb}$ 。

参考系下各部分作用力矩转换至机体系,并将力矩代入方程(1)的具体过程,参见文献[23],整理后得到

$$\begin{aligned} -I_\theta \sin(\epsilon)\ddot{\psi} + I_\theta \ddot{\theta} = \\ l_{df} f_d I_\epsilon \cos(\epsilon)\sin(\theta)\ddot{\psi} + I_\epsilon \cos(\theta)\ddot{\epsilon} = \\ m'g \cos(\epsilon)\cos(\theta) + l_{oc} f_c I_\psi \sin(\theta)\ddot{\epsilon} - \\ I_\psi \cos(\epsilon)\cos(\theta)\ddot{\psi} = m'g \cos(\epsilon)\sin(\theta) \end{aligned} \quad (5)$$

式中: $m' = -l_{ob}m_c + l_{oc}m_h + l_{oa}m_b$ 。

建立SRB模型(5)时,简化了平衡杆和直升机本体之间的连杆 $cd$ ,然而在实际运动中,直升机本体质心与机体系原点的相对位置会随着俯仰轴偏转而变化,由此导致的重力力矩变化是无法在该模型中体现的。

## 1.2 多刚体建模

三自由度直升机实验平台虽然模拟CH-47

直升机双螺旋桨驱动方式,但二者结构上有根本差别:三自由度直升机实验平台本质上是由3个刚体通过关节连接而成的系统,刚体之间采用铰性连接导致活动关节出现。在近期的研究中,文献[4,19]使用拉格朗日方程建立了Quanser平台的MRB动力学模型。该动力学模型通常采用拉格朗日方程来表达,本文考虑如下的一般形式<sup>[21]</sup>:

$$M\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + R\dot{q} + g(q) = S(q)u \quad (6)$$

式中: $M$ 为对称正定广义惯量矩阵; $C(q, \dot{q})$ 为科里奥利力矩阵; $g(q)$ 为重力矢量; $R$ 为摩擦因数组成的对角矩阵; $S(q)$ 为将系统实际输入力映射为广义力的驱动矩阵。

建模的基本流程主要包括:

步骤1 分析模型结构特性以简化或忽略拉格朗日方程的参数矩阵,如惯量矩阵 $M$ ,摩擦矩阵 $R$ 及科里奥利力矩阵 $C(q, \dot{q})$ 等;

步骤2 结合连接体运动特性准确刻画MRB系统所受外力的实际力臂,并整理为重力矢量 $g(q)$ 和驱动矩阵 $S(q)$ ;

步骤3 将上述参量代入拉格朗日方程标准形式中,整理成简洁的方程形式。

对 $M(q)$ 和 $C(q, \dot{q})$ 的严格建模过于烦琐,且对平台动力行为的表征没有决定性作用<sup>[19]</sup>。因此,这里忽略科里奥利力 $C(q, \dot{q})$ 的作用,将惯量矩阵 $M$ 视作常值对角矩阵:

$$M = \text{diag}(I_\psi, I_\epsilon, I_\theta) \quad (7)$$

在实际系统中存在复杂的摩擦力效应,如库伦摩擦等,但这些摩擦作用常具有高度的非线性且不占主导地位。为了降低模型复杂度,只考虑作用在关节处的线性粘滞摩擦力,令:

$$R = \text{diag}(c_\psi^0, c_\epsilon^0, c_\theta^0) \quad (8)$$

升降通道示意如图4所示,图中 $c'$ 、 $d'$ 为摆杆

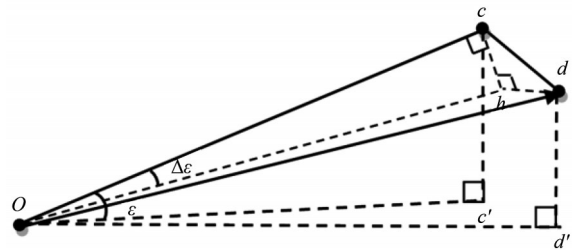


图4 MRB结构升降通道示意图

Fig. 4 Diagram of elevation channel of multi rigid body

$cd$  两端在升降轴水平面的投影;  $h$  为  $d$  点在平衡杆  $bc$  所在铅垂面的投影; 编码器测量的角度为  $\epsilon$ ;  $\Delta\epsilon$  为升降角测量值与升降角实际值的差值。这里 MRB 结构考虑了摆杆  $cd$ , 直升机重力的等效力臂为  $l_{oh}$ , 力臂在升降通道的倾角为  $\epsilon - \Delta\epsilon$ 。

直升机本体重在升降通道产生的力矩为:

$$M_{\epsilon}^g = -\frac{l_{oc}}{\cos(\Delta\epsilon)} m_h g \cos(\epsilon - \Delta\epsilon) + (-l_{oa} m_b + l_{ob} m_c) g \cos(\epsilon) \quad (9)$$

经过三角函数变换后为:

$$M_{\epsilon}^g = -m' g \cos(\epsilon) - l_{cd} m_h g \sin(\epsilon) \cos(\theta) \quad (10)$$

整理各通道重力力矩和驱动力矩得:

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ m_h g l_{cd} \cos(\theta) \sin(\epsilon) + m' g \cos(\epsilon) \\ m_h g l_{cd} \cos(\epsilon) \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$S(q) = \begin{bmatrix} l_{oc} \cos(\epsilon) \sin(\theta) & -l_{df} \sin(\theta) \sin(\epsilon) \\ -l_{oc} \cos(\theta) & 0 \\ 0 & l_{df} \end{bmatrix} \quad (12)$$

将式(7)~(12)代入方程(6)并写成三通道形式,得到:

$$\begin{aligned} I_{\psi} \ddot{\psi} &= l_{oc} \cos(\epsilon) \sin(\theta) f_s - l_{df} \sin(\theta) \sin(\epsilon) f_d - c_{\psi}^0 \dot{\psi} \\ I_{\epsilon} \ddot{\epsilon} &= -m_h g l_{cd} \cos(\theta) \sin(\epsilon) - m' g \cos(\epsilon) + l_{oc} \cos(\theta) f_s - c_{\epsilon}^0 \dot{\epsilon} \\ I_{\theta} \ddot{\theta} &= -m_h g l_{cd} \cos(\epsilon) \sin(\theta) + l_{df} f_d - c_{\theta}^0 \dot{\theta} \end{aligned} \quad (13)$$

除了建模方法的不同,根据模型(5)与(13)的数学形式,总结得到如下的异同点:

(1) 对实际运动影响较大的力矩在两个模型中都有所体现,如影响俯仰通道的因素  $l_{df} f_d$ , 影响升降和偏航通道的因素  $l_{oc} f_s$ , 影响升降通道的因素  $m' g$ 。

(2) 在结构上,SRB 模型忽略了摆杆  $cd$ , 将螺旋桨和平衡杆视为刚性连接的整体,因此式(5)缺少了由平衡杆旋转导致的重力矢量偏心对升降和俯仰通道的影响;MRB 模型则认为直升机组件按照铰接方式连接,模型中有效反映了平衡杆旋转所带来的影响。

(3) SRB 模型忽略了摩擦力的影响,但对于该平台而言,由空气阻力和转轴摩擦造成的阻尼效应是不可忽视的,在 MRB 模型中摩擦作用对系统的影响有明确体现。

(4) SRB 模型中,状态二阶导数项存在明显耦合,这导致部分非线性控制技术(如反馈线性化等)难以在该模型上实践。相比之下,MRB 模型的数学形式更有利于控制器设计。

考虑了因连接体运动导致合力矩变化的 MRB 模型更符合直升机平台的物理特性,在后续实验中将更清晰地对比出两种模型对系统运动的刻画能力。

## 2 模型辨识

按照运动机理建模得到的模型往往会与实际模型存在偏差,为获取更为准确的动力学模型,进一步进行模型的参数辨识。根据辨识方法和输入数据的不同,可以将系统分为时域辨识和频域辨识两类。传统的时域辨识是在最小二乘法、子空间法<sup>[26]</sup>、极大似然法<sup>[27]</sup>等框架下,通过调整机理模型参数实现对实验数据的拟合。频域辨识常以扫频信号作为辨识实验的激励,得到的时域数据会通过傅里叶变换等手段转化至频域,在选取特定的辨识频段后,结合模型的阶次对系统进行辨识<sup>[28,29]</sup>。但在时频转换时会因数据截断导致频谱功率泄露,在频谱估计的过程中也会产生随机误差,这些因素会制约辨识精度。

由于第1节已经建立了表征能力较强的动力学模型(13),为了不损失原有模型的准确性,这里采用基于最小二乘法的时域辨识。首先开展驱动电机特性的辨识,在此基础上开展动力学模型参数的辨识。具体环节包括方程预处理、升力组件特性辨识和动力学辨识,具体流程如图5所示。动力系统辨识是确定电机输入电压与螺旋桨拉力的数值关系。若电机的电压与拉力关系未知,在进行动力学辨识时无法将实际响应的电压转化为对应的桨叶升力。因此,首先需要实现电机升力特性的辨识。动力学辨识的任务是在动力学机理建模的基础上,进一步获取准确的模型参数。准确的模型参数对于进行模型线性化、模型特性分析和基于模型的控制律设计等具有重要意义。

### 2.1 电机-螺旋桨升力组件特性辨识

由于左、右两电机的驱动程序及旋翼是完全一致的,可以假设在给定电压下左、右电机产生的升力相等,仅通过升降通道的辨识实验即可准确获取电压与响应升力的关系。实际实验中,在平衡杆的螺旋桨一侧悬挂重物,受力平衡时采用重

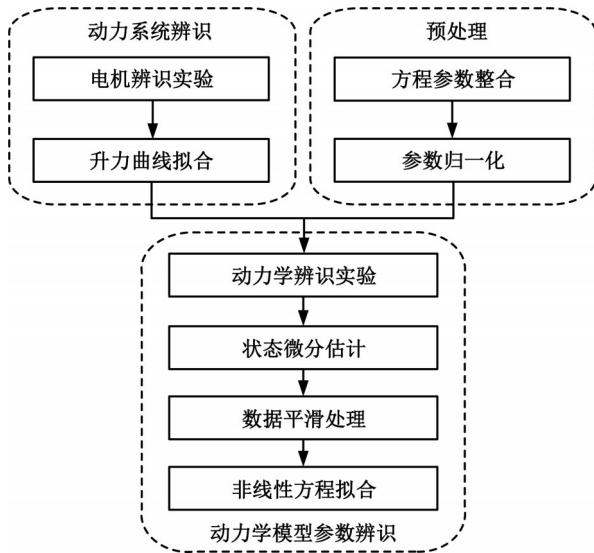


图 5 模型辨识方案

Fig. 5 Scheme of model identification

物重力等价桨叶升力的方式,间接测量桨叶旋转产生的气动升力,辨识实验的具体步骤如下:

步骤 1 为保证最终的桨叶升力测量不受系统其他组成部分重力的影响,在实验平台通电前需要保证系统的受力平衡,调节平衡块的位置使平台的平衡杆与地面保持水平,使得平台的升降角为 0;

步骤 2 在电机连杆上悬挂一定质量的重物,使平台自然倾斜;

步骤 3 将平台通电后,启动电机驱动程序并不断调整驱动电压,使平衡杆重新恢复到水平位置,此时电机连杆在竖直方向上受力平衡,重物的重力等于螺旋桨的拉力;

步骤 4 重复上述步骤,同时每次调整悬挂重物质量,获得在一系列升力条件下的电压输入情况。

使用 MATLAB Curve Fitting 工具箱对实验数据进行分析,采用幂函数拟合方式得到电压  $V$  与升力  $f$  的响应关系为:

$$f = 0.3981V^{2.072} + 0.4988 \quad (14)$$

反之,升力与电压的关系(逆模型)为:

$$V = 1.677f^{0.4716} - 0.3538 \quad (15)$$

## 2.2 动力学模型参数辨识

由于动力学模型存在 2 个输入和 3 个输出且各个状态间存在很强的耦合关系,常用于单输入-单输出(Single-input single-output, SISO)系统的频域辨识方法不再适用。在动力学模型参数辨识

方法的选择上,这里考虑基于非线性最小二乘法的时域辨识。具体辨识工作包括模型预处理、辨识实验设计、状态微分值估计、数据平滑和非线性方程拟合,下面对各步骤展开介绍。

MRB 模型(13)所涉及的参数较多,而模型参数的增加会增加辨识工作的难度,因此,首先对模型进行预处理,经过参数整合和归一化后得到简洁的方程形式为

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = b_3 \sin(\theta) \cos(\epsilon) f_s - b_4 \sin(\theta) \sin(\epsilon) f_d - c_\psi \dot{\psi} \\ \ddot{\epsilon} = -a_1 \cos(\theta) \sin(\epsilon) - a_2 \cos(\epsilon) + b_1 \cos(\theta) f_s - c_\epsilon \dot{\epsilon} \\ \ddot{\theta} = -a_3 \cos(\epsilon) \sin(\theta) + b_2 f_d - c_\theta \dot{\theta} \end{cases} \quad (16)$$

三个通道之间存在复杂的耦合关系,如果参数同时进行辨识会影响辨识精度。因此,这里考虑对每个通道分别辨识,并且在每一个通道辨识中尽可能保证其他通道没有相对运动,减轻通道间的串扰。

以升降通道为例,在设计辨识实验时,期望平衡杆  $bc$  抬平且保持偏航角  $\psi$  和俯仰角  $\theta$  为 0。对该平衡位置进行模型解算,得到实验所需升力  $f_1 = f_2 = 1.4 \text{ N}$ 。参数辨识需要保证方程中所有状态均已知,但固高直升机编码设备的局限性导致其无法直接测得角速度和角加速度值,这里采用文献[20]中改进的龙伯格状态观测器(Luenberger state observer, LSO)得到角速度率的估计值,利用差分和平滑处理得到角加速度估计。模型参数的辨识采用 MATLAB 曲线拟合工具箱的非线性最小二乘求解器,该求解器是基于 Levenberg-Marquardt 法<sup>[30]</sup>和信赖域反射算法<sup>[31]</sup>来设计的。3 个通道均按照上述升降通道类似的流程进行辨识实验,得到实验数据后按照 MATLAB-lsqcurvefit 函数对方程(16)进行非线性拟合。

将辨识后的数据代入式(16)中,可以得到非线性 MRB 模型。依据小扰动原理将该非线性模型在状态点  $(\psi, \epsilon, \theta) = (0, 0, 5\pi/180) \text{ rad}$  线性化,得到如下线性方程:

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = -0.48\dot{\psi} - 0.004\epsilon + 1.63\theta + 0.05f_s \\ \ddot{\epsilon} = -0.26\epsilon - 0.1\dot{\epsilon} - 0.14\theta + 0.53f_s \\ \ddot{\theta} = -25.55\theta - 0.34\dot{\theta} + 5.33f_d \end{cases} \quad (17)$$

该线性方程可直接用于  $(\psi, \epsilon, \theta) = (0, 0, 5\pi/180) \text{ rad}$  状态附近运动控制器的设计。

### 3 基于模型的控制设计:两个典型实例

从应用实际的角度出发,更应关注该模型在工程上的便捷性与有效性,将简单实用的控制器应用在模型上,可以从控制效果上分析模型的实用性和实际指导意义。这里开展两个实例的控制器设计:①升降-俯仰二自由度运动控制问题,②三自由度运动控制问题。由于平台的欠驱动和非线性等特点带来的挑战,当前3个通道的运动控制问题研究成果较少,代表性结果见文献[4,7]。面向模型的工程实用性,本章考虑设计基于2-DOF线性化模型的线性二次型调节器(Linear quadratic regulator, LQR),以及基于内外环的3通道LQR控制器。需要重点强调的是,这两个实例主要用于说明本文建立的模型可指导基于模型的控制设计,控制器性能的对比和性能提升设计并不是本文的关注重点。

#### 3.1 2-DOF控制设计

对参数辨识结果进行分析,可以认为差力作用项 $f_d$ 对系统偏航通道的控制效率远远低于合力作用项 $f_s$ 。因此,为便于控制设计忽略该项对偏航通道的影响,认为偏航通道在运动中仅受合力项及阻尼项的作用,根据模型(16)获得2-DOF的模型,进而易整理成如下的状态空间形式:

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u \quad (18)$$

式中: $\Delta x = x - x^*$ ,  $x^* = [\psi^*, \dot{\psi}^*, \epsilon^*, \dot{\epsilon}^*, \theta^*, \dot{\theta}^*]^T$ ,

$$x = [\psi, \dot{\psi}, \epsilon, \dot{\epsilon}, \theta, \dot{\theta}]^T, \Delta u = u - u^*$$

采用前馈+反馈的控制器结构,由系统维持稳态这一条件,确定前馈量 $u^*$ ;利用线性二次型调节器获得最优反馈增益 $K$ ,对应的二次型代价指标如下:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (19)$$

式中: $Q$ 和 $R$ 为正定矩阵,分别表征状态变量和输入变量的加权矩阵。

考虑控制律:

$$\Delta u = -K \Delta x \quad (20)$$

并代入(18)得到闭环系统:

$$\Delta \dot{x} = (A - BK) \Delta x \quad (21)$$

相应地,针对实际系统的控制律为:

$$u = u^* + \Delta u \quad (22)$$

由状态反馈LQR控制器和直升机模型构成

的闭环系统结构如图6所示。这里需要注意的是,整个控制器利用了三轴的实际角度和角速度信息,而系统仅能通过编码器获取角度测量,无法直接获取角速度信息。实验平台自带二阶导数滤波器<sup>[6]</sup>:

$$F(s) = \frac{\omega^2 s}{s^2 + 2\eta\omega s + \omega^2} \quad (23)$$

以获得角速率的估计值 $\dot{q}$ ,其中, $s$ 为纯微分算子, $\eta > 0, \omega > 0$ 是可调参数,可以通过调节 $\omega$ 实现滤波器对不同频带信号的适应性。

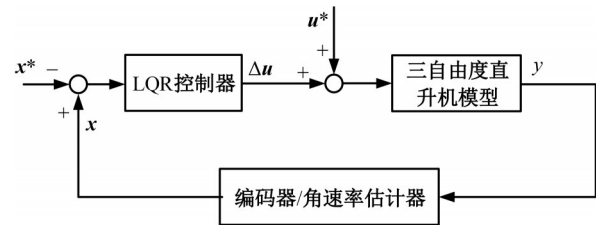


图6 基于LQR的控制设计

Fig. 6 Control design based on LQR

#### 3.2 3-DOF控制设计

对于实际的飞行器,工程上在进行控制律设计时,往往将位置环作为外环,姿态环作为内环。对应该直升机实验平台,受实际飞行器内外环控制结构的启发,这里设计图7所示的三通道控制方案,升降和偏航控制环为外环,俯仰角跟踪为内环(俯仰角作为偏航角的虚拟控制变量)。根据平台的运动特性和动力学模型辨识结果,易发现偏航通道受合力项 $f_s$ 的影响显著,即合力项 $f_s$ 的控制效率高,为此这里忽略差力作用项(视之为干扰)。在控制实验中升降通道一般设计在零点附近运动,合力也基本稳定在一个固定值附近,结合数学模型(16)中合力项的表述 $b_3 \sin(\theta) \cos(\epsilon) f_s$ 可知,在升降角和合力变化幅度很小的情况下,对合力项产生显著影响的是俯仰角,在进行控制设计时,考虑将俯仰通道作为实现偏航控制的内环是合理的。

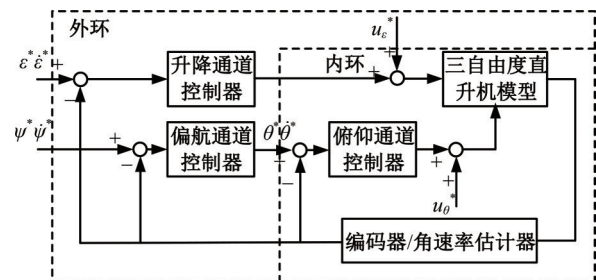


图7 3-DOF控制方案

Fig. 7 Control scheme of 3-DOF model

整个系统仅给出外环的升降和偏航通道参考,通过偏航通道控制器产生内环俯仰通道参考信号,再结合前馈信号  $u_e^*$ 、 $u_\theta^*$  形成完整的控制信号。角速率估计值由式(23)的导数滤波器获得,升降通道和俯仰通道依然使用上述的LQR控制器,偏航通道采用PD控制,内环俯仰通道的期望形式为:

$$\theta^* = K_p^\psi(\psi^* - \psi) + K_d^\psi(\dot{\psi}^* - \dot{\psi}) \quad (24)$$

### 4 仿真与实验验证

本节将通过数值仿真和飞行实验来分别验证在前面章节中得到的辨识模型和控制方案。其中,一组仿真用于对比分析SRB和MRB模型的差异,另一组仿真用来验证辨识模型是否准确地刻画了直升机的运动特性。此外,基于辨识模型设计的2-DOF和3-DOF控制器(22)~(24)也通过仿真和实验来验证其有效性。

控制方案是在三自由度直升机实验装置上验证的,该装置由控制系统和直升机本体组成(各组件的连接关系见图8)。控制系统包括运动控制板卡和PC机(Pentium(R)Dual-Core CPU E6600 @ 3.06 GHz 3.07 GHz; RAM 2 GB),该装置支持基于MATLAB R2012b/Simulink来设计控制器。

安装在直升机三个转轴的编码器可以测量直升机的姿态变化,其中升降和俯仰通道编码器精度为2400脉冲/转(角分辨率为0.0026rad),偏航轴编码器精度为4800脉冲/转(角分辨率为0.0013rad)。

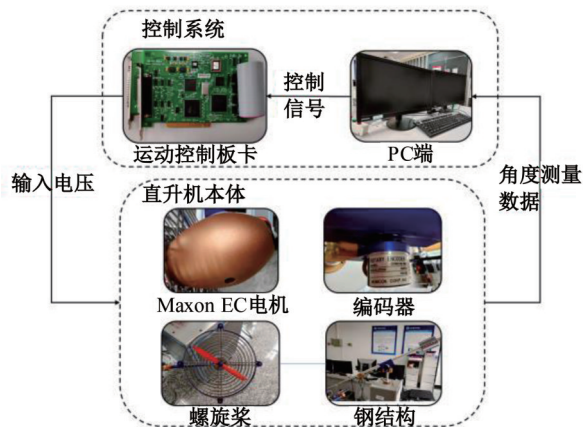


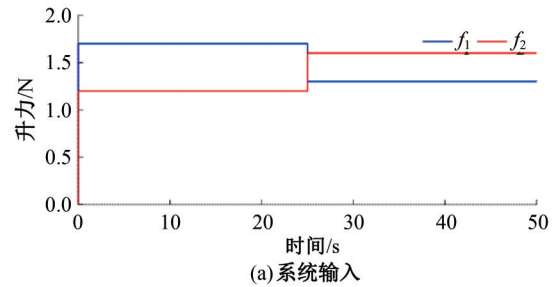
图8 三自由度直升机实验装置结构

Fig. 8 Structure of 3-DOF helicopter experimental setup

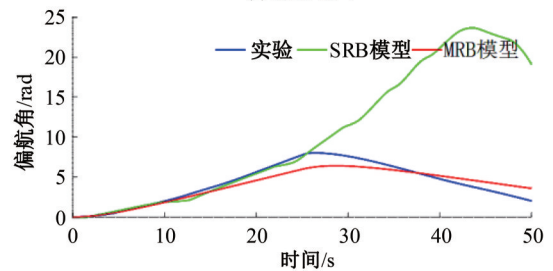
### 4.1 SRB模型与MRB模型对比

为了清晰具体地对比两种模型对平台运动特性的描述的准确性,下面通过搭建仿真来比较这两种模型和真实平台的角度响应结果。该实验重点关注SRB模型与MRB模型对实际物理系统的表征差异,因此,这里仅简易对比两种数值模型的仿真结果,并与实验数据对比。模型参数的准确性不作为本节要点,将在下一节中对辨识参数进行验证。两个系统初始状态均处于零点,仿真和实验中电压的输入信号如图9(a)所示,得到的角度响应结果对比如图9(b)~(d)所示。

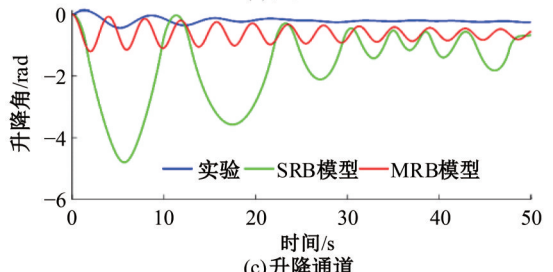
观察开环系统的输出变化与原实验数据的差异。图9(b)中当拉力差  $f_d$  的方向发生改变时,



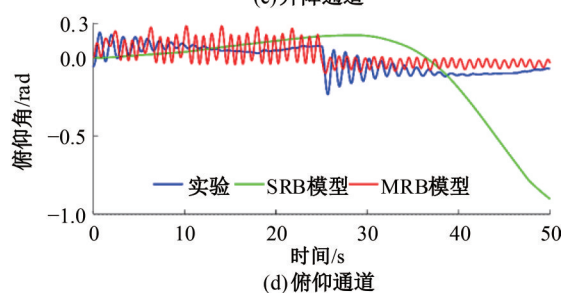
(a)系统输入



(b)偏航通道



(c)升降通道



(d)俯仰通道

图9 SRB/MRB模型对比结果

Fig. 9 Model comparison of SRB and MRB

SRB 模型的偏航通道响应有较大延迟,MRB 模型响应时间和实验基本一致,但偏航角的整体变化趋势仍然存在差异。由图 9 (c)可以观察到 SRB 模型的升降角响应明显不符合平台的特性。

在图 9 (d)中,MRB 模型的俯仰角能捕捉到俯仰通道的部分特性;SRB 模型的俯仰角完全不符合实验俯仰角的变化趋势。通过实验数据对比可以明显看出,MRB 模型比 SRB 模型更准确地刻画了真实直升机平台的运动特性,但 MRB 模型的响应与实际系统的响应仍有较大差异,仍需要辨识。

#### 4.2 MRB 辨识模型验证

不同于 4.1 节中的对比,这里借助 2.2 节中动力学模型参数辨识的结果修正 MRB 模型,以验证参数重新辨识后的模型是否更准确地刻画了系统的真实运动特性。这里分别在仿真和实验中给予与 4.1 节中相同的输入信号,观察两组系统在相同激励条件下与实验数据的拟合程度,获得的响应对比结果如图 10 所示。从图中可以看出,在同样输入信号下,与参数未辨识的 MRB 模型相比,参数辨识后的 MRB 模型的响应更贴合实际实验平台的响应。同时,也观察到,在该实验条件下,俯仰通道在振荡减轻后还依然存在幅值下降的现象,这主要是由外界干扰及电机响应不稳定造成的,且偏航通道受到俯仰通道响应波动的影响。偏航通道的 MRB 模型响应结果也与实际实验平台的响应存在一定差距,但相比辨识前,辨识后的模型对物理平台特性的刻画精度已大大提高。

#### 4.3 控制器仿真及实验验证

分别考虑实现升降-俯仰 2-DOF 运动控制和 3-DOF 运动控制,系统验证包括 MATLAB R2019a /Simulink 环境下的仿真验证及三自由度直升机平台-MATLAB R2012b/Simulink 环境下的实物验证。仿真及实验条件设置如下。

实验一(升降-俯仰 2-DOF 运动控制)

升降和俯仰通道参考信号分别为

$$\begin{cases} \epsilon^* = 4\pi \sin(0.1\pi t)/180 \text{ rad} \\ \theta^* = [5\pi + 2\pi \sin(0.2\pi t)]/180 \text{ rad} \end{cases} \quad (25)$$

加权矩阵设为  $Q = \text{diag}(180, 10, 400, 1)$ ,  $R = \text{diag}(1, 1)$ ,使用 MATLAB 中的 LQR 函数计

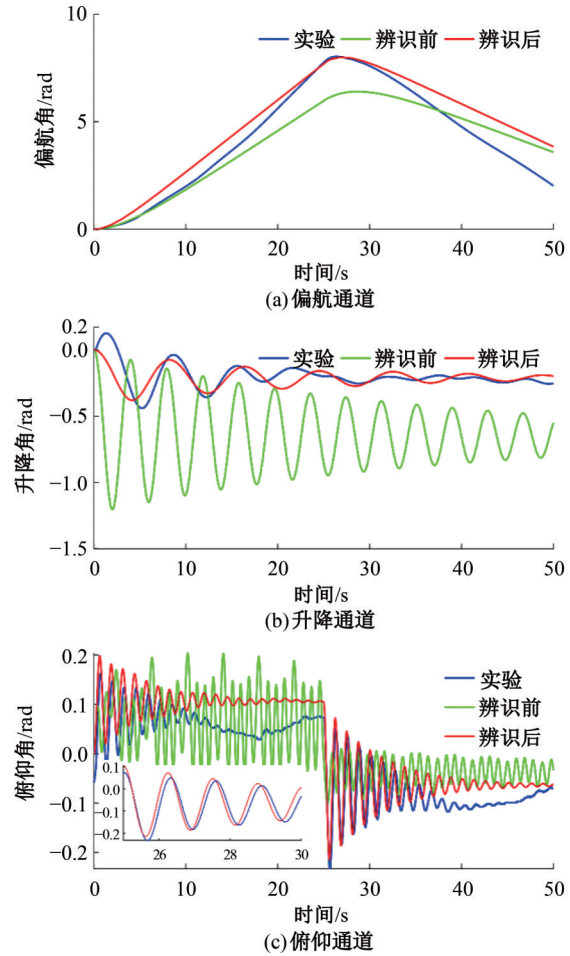


图 10 MRB 辨识模型角度响应结果

Fig. 10 Angle response results of MRB identification model

算出状态反馈矩阵

$$K = \begin{bmatrix} 12.929 & 7.125 & -0.112 & -0.007 \\ -0.096 & -0.068 & 15.773 & 2.567 \end{bmatrix} \quad (26)$$

直升机初始位置为  $\epsilon(0) = -0.545 \text{ rad}$ ,  $\phi(0) = 0$ ,系统跟踪仿真及实验效果如图 11 (a)(b)所示。

实验二(3-DOF 运动控制)

升降和偏航通道参考信号分别为

$$\begin{cases} \epsilon^* = 4\pi \sin(0.1\pi t)/180 \text{ rad} \\ \psi^* = 8\pi t/180 \text{ rad} \end{cases} \quad (27)$$

偏航通道作为外环产生俯仰通道控制指令,因此,仅需对升降-俯仰两个通道做 LQR 设计,令偏航通道的控制增益为  $K_p^\psi = 1.8$ ,  $K_d^\psi = 0.2$ 。LQR 加权矩阵及升降-俯仰双通道模型与实验一相同,因此,计算出状态反馈矩阵也与式(26)一致。平台的初始状态与实验一相同,实验结果如图 11 (c)(e)所示。

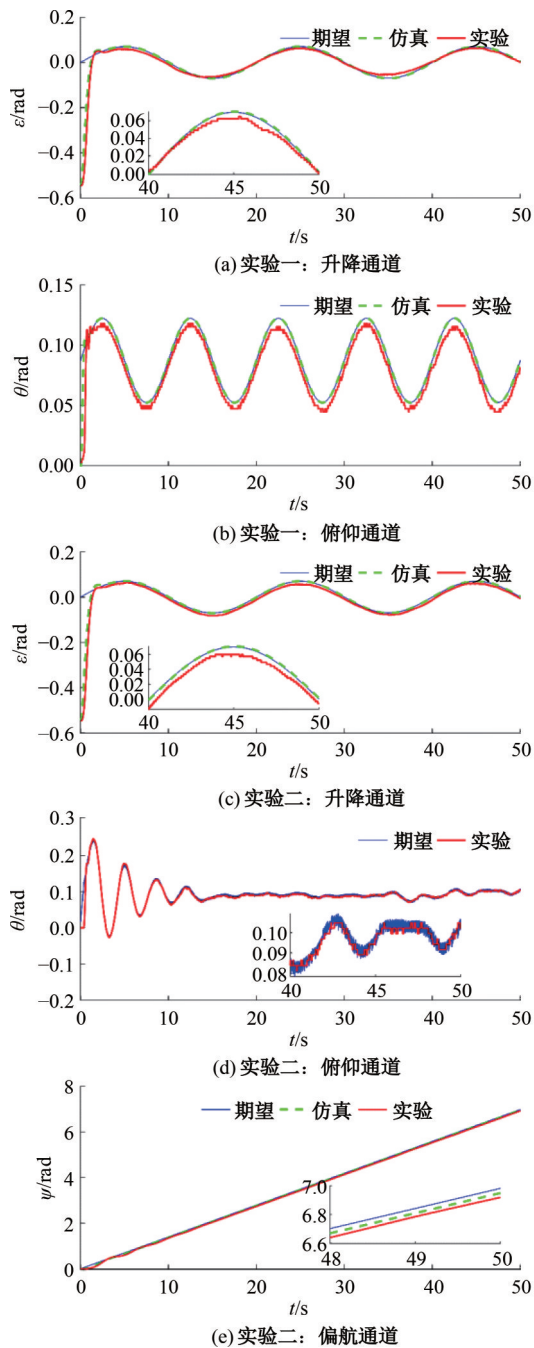


图 11 轨迹跟踪仿真及实验效果

Fig. 11 Simulation and experimental results of trajectory tracking

实验跟踪误差均值如表 2 所示。可以看出,升降和俯仰通道的误差均处在编码器精度 10 倍以内或附近,具有较高的控制精度。偏航通道维

表 2 误差均值与编码器精度

Table 2 Mean error and encoder accuracy 弧度

项目	升降通道	俯仰通道	偏航通道
实验一	0.015	0.007	—
实验二	0.018	0.003 2	0.057 7
编码器分辨率	0.002 6	0.002 6	0.001 3

持长时间的大机动,且受俯仰通道耦合影响产生较大稳态误差,但相比期望轨迹仍然保持了较强的跟踪能力。通过简单的前馈+反馈控制结构,2-DOF 和 3-DOF 的运动控制均实现了较好的效果,验证了上述建模方法与辨识结果的准确性与工程实用性。

## 5 结束语

作为机器人先进运动规划与鲁棒控制技术验证的理想平台,三自由度直升机一直缺乏系统完整的动力学模型。这给相关研究带来至少三方面的影响:① 仿真结果和实验结果的差异往往很大,而且很难定位其具体原因;② 由于模型精度有限,基于模型的规划与控制算法的潜能难以发挥;③ 多种模型不确定因素的存在,会影响准确评价鲁棒规划与控制方法对特定不确定因素的适应性。

对此,本文不关注控制器设计与规划算法的创新,而是针对国产低成本的固高三自由度直升机平台,旨在提供一套开源的、系统的、全面的,且精度得到实验验证的动力学模型与执行机构模型,以弥补这一方面的研究不足。在建模方面,本文从多刚体系统建模的新视角,基于拉格朗日法建立该平台的三刚体(多连接体)模型,并借助耦合系统参数辨识技术,获得了修正后的模型参数,经过模型分析与对比实验,验证了参数修正后的三刚体模型更准确地刻画了平台的运动特性。此外,基于线性化的辨识模型,设计并实验验证了简单的“前馈+LQR 反馈”角轨迹跟踪控制器,获得了较高精度水平的跟踪控制效果,该精度水平可作为其他高精度控制算法的对比对象。

## 参考文献:

[1] 刘久富,杨忠,孙德敏,等. 基于模型的飞行控制软件测试用例的生成[J]. 吉林大学学报:工学版, 2006, 36(4): 543-547.  
Liu Jiu-fu, Yang Zhong, Sun De-min, et al. Generation of testing case for model based flight control software of unmanned aerial vehicle[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2006, 36(4): 543-547.  
[2] Dai X, Ke C, Quan Q, et al. RFLySim: automatic test platform for UAV autopilot systems with FPGA-based hardware-in-the-loop simulations[J]. Aero-

- space Science and Technology, 2021, 114: No.106727.
- [3] Ishutkina M A. Design and implimentation of a supervisory safety controller for a 3DOF helicopter[D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, Department of Aeronautics and Astronautics, 2004.
- [4] Kiefer T, Graichen K, Kugi A. Trajectory tracking of a 3DOF laboratory helicopter under input and state constraints[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2009, 18(4): 944-952.
- [5] Zhu B, Liu H H T, Li Z. Robust distributed attitude synchronization of multiple three-DOF experimental helicopters[J]. Control Engineering Practice, 2015, 36: 87-99.
- [6] Zhu B, Zhang Q, Liu H H T. Design and experimental evaluation of robust motion synchronization control for multivehicle system without velocity measurements[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28(17): 5437-5463.
- [7] Liu H, Lu G, Zhong Y. Robust LQR attitude control of a 3-DOF laboratory helicopter for aggressive maneuvers[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2013, 60(10): 4627-4636.
- [8] Li C, Yang X, Xiao B. Adaptive attitude tracking control of a 3-degrees-of-freedom experimental helicopter with actuator dead-zone[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 2019, 233(1): 91-99.
- [9] 栗英杰, 赵丁选, 赵颖. 直升机飞行动力学建模及仿真[J]. 吉林大学学报: 工学版, 2011, 41(增刊2): 241-245.  
Li Ying-jie, Zhao Ding-xuan, Zhao Ying. Flight dynamics model and simulation of helicopters[J]. Journal of Jilin University(Engineering and Technology Edition), 2011, 41(Sup. 2): 241-245.
- [10] Zhu X, Li D. Robust attitude control of a 3-DOF helicopter considering actuator saturation[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 149: No.107209.
- [11] 固高科技. GHP2002型三自由度直升机实验指导书 V2014B[Z].
- [12] Cui Q, Zhang L, Chen M. Observer based backstepping control for a three degree of freedom model helicopter[C]// 2016 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference (CGNCC), Nanjing, China, 2016: 2299-2304.
- [13] Raj K, Choudhary S K, Muthukumar V. Linear quadratic regulator for helicopter model with a prescribed degree of stability[C]// International Conference on Systems Engineering, Las Vegas, USA, 2020: 379-389.
- [14] 纪明达, 李德伟, 席裕庚. 三自由度直升机的无静差预测控制[J]. 控制工程, 2014, 21(1): 122-125.  
Ji Ming-da, Li De-wei, Xi Yu-geng. Offset free model predictive control of 3-DOF helicopter[J]. Control Engineering of China, 2014, 21(1): 122-125.
- [15] Li C, Yang X. Neural networks-based command filtering control for a table-mount experimental helicopter[J]. Journal of the Franklin Institute, 2021, 358(1): 321-338.
- [16] 郭帅, 陆耿, 钟宜生. 三自由度直升机模型辨识与控制[J]. 测控技术, 2012, 31(3): 73-76.  
Guo Shuai, Lu Geng, Zhong Yi-sheng. Identification and control of 3DOF helicopter[J]. Measurement Control Technology, 2012, 31(3): 73-76.
- [17] 李亚帅, 邵宗凯. 基于PEM的三自由度直升机模型辨识[J]. 传感器与微系统, 2017, 36(6): 49-52.  
Li Ya-shuai, Shao Zong-kai. Model identification of 3-DOF helicopter based on PEM[J]. Transducer and Microsystem Technologies, 2017, 36(6): 49-52.
- [18] Mei R, Cui Q. Backstepping control for a 3DOF model helicopter with input and output constraints[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2016, 14(1): No.1729881416687133.
- [19] Chen M, Shi P, Lim C C. Adaptive neural fault-tolerant control of a 3-DOF model helicopter system [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2016, 46(2): 260-270.
- [20] Brentari M, Bosetti P, Queinnec I, et al. Benchmark model of quanser's 3-DOF helicopter[J/OL]. [2022-06-15]. <https://hal.laas.fr/hal-01711135>.
- [21] Zhang X, Li H, Zhu B, et al. Improved UDE and LSO for a class of uncertain second-order nonlinear systems without velocity measurements[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2019, 69(7): 4076-4092.
- [22] Siciliano B, Sciavicco L, Villani L, et al. Robotics: Modelling, Planning and Control[M]. Berlin: Springer, 2011.
- [23] Ibrahim O, Khalil W. Inverse and direct dynamic models of hybrid robots[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(4): 627-640.
- [24] Westerberg S, Mettin U, Shiriaev A. Motion planning and control of an underactuated 3DOF helicopter

- [C]// 2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Taipei, China, 2010: 3759-3764.
- [25] Westerberg S, Mettin U, Shiriaev A S, et al. Motion planning and control of a simplified helicopter model based on virtual holonomic constraints[C]// 2009 International Conference on Advanced Robotics, Munich, Germany, 2009: 1-6.
- [26] Rajappa S, Chriette A, Chandra R, et al. Modelling and dynamic identification of 3-DOF quanser helicopter[C]// International Conference on Advanced Robotics, Montevideo, Uruguay, 2014:No. 6766563.
- [27] Panizza P, Riccardi F, Lovera M. Black-box and grey-box identification of the attitude dynamics for a variable-pitch quadrotor[J]. IFAC Papersonline, 2015, 48(9): 61-66.
- [28] Mendonca C. Flight vehicle system identification: a time-domain methodology[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2016, 39(3): 737-738.
- [29] 武梅丽文, 陈铭, 王放. 悬停状态下小型无人直升机飞行动力学模型辨识[J]. 北京航空航天大学学报, 2019, 45(3): 121-134.
- Wumei Li-wen, Chen Ming, Wang Fang. Identification of flight dynamics models of a small-scale unmanned helicopter in hover condition[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2019, 45(3): 121-134.
- [30] Wen M, Wei X Z. On frequency domain identification using adaptive Fourier decomposition method with polynomials[J]. IET Control Theory and Applications, 2020, 14(12): 1539-1547.
- [31] Marquardt D W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters[J]. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1963, 11(2): 431-441.