

基于原子范数最小化的极化敏感阵列二维波达方向估计算法

陈 涛¹, 李敏行¹, 赵立鹏²

(1. 哈尔滨工程大学信息与通信工程学院, 哈尔滨 150001; 2. 中国电子科技集团公司第五十四研究所, 石家庄 050081)

摘 要:为解决极化敏感阵列中压缩感知类波达方向(DOA)估计算法产生的网格失配带来估计精度下降的问题,本文针对单偶极子阵列在原子范数最小化(ANM)理论的基础上提出一种二维 DOA 和极化参数的联合估计算法。首先,利用正交极化敏感阵列的特性,分别构造不同极化方向的接收模型,并证明该模型可以消除极化参数的影响,符合 ANM 模型。其次,通过求解半正定规划问题得到一个半正定的 Toeplitz 矩阵,随后基于矩阵束算法恢复 DOA 信息;最后,利用 DOA 信息和广义特征值理论恢复出极化参数。通过仿真实验验证了本文算法的有效性和优越性。

关键词:无网格波达方向估计;正交极化敏感阵列;原子范数最小化;网格失配

中图分类号:TN911.7 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5497(2025)05-1772-08

DOI:10.13229/j.cnki.jdxbgxb.20230791

Two-dimensional DOA estimation algorithm for polarization-sensitive arrays based on atomic norm minimization

CHEN Tao¹, LI Min-xing¹, ZHAO Li-peng²

(1. College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China;
2. The 54th Research Institute of CETC, Shijiazhuang 050081, China)

Abstract: To address the challenge of estimation accuracy degradation resulting from off-grid caused by compressive sensing-like direction of arrival (DOA) estimation algorithm in polarization-sensitive arrays, this paper presents a joint estimation algorithm for two-dimensional DOA and polarization parameters utilizing the theory of atomic norm minimization (ANM) applied to a single dipole array. Firstly, the proposed algorithm constructs receiving models for different polarization directions using the orthogonal polarization sensitive array's characteristics, which can accommodate the influence of polarization parameters and adhere to the ANM model. Secondly, the algorithm solves a positive semi-definite programming problem to obtain a positive semi-definite Toeplitz matrix, from which DOA information is recovered using the matrix-pencil algorithm. Lastly, the polarization parameters are retrieved using the DOA information and the generalized eigenvalue theory. The effectiveness and superiority of the proposed

收稿日期:2023-07-12.

基金项目:国家自然科学基金项目(62071137).

作者简介:陈涛(1974-),男,教授,博士.研究方向:阵列信号处理. E-mail: chentao@hrbeu.edu.cn

algorithm are demonstrated through simulation experiments.

Key words: gridless direction of arrival estimation; orthogonal polarization sensitive arrays; atomic norm minimization; off-grid

0 引言

波达方向(Direction of arrival, DOA)估计是阵列信号处理的重要分支,被广泛应用于雷达、声呐和通信等诸多领域。在DOA估计实际应用的阵列中,极化敏感阵列相比传统标量阵列具有更强的抗干扰能力、更稳定的检测能力和更高的分辨率,因此在近年来逐渐成为研究热点,很多应用于标量阵列的DOA估计算法也逐渐被推广至极化敏感阵列中。经典的多重信号分类(Multiple signal classification, MUSIC)算法在文献[1]中被扩展为一种空域DOA信息和极化域信息联合估计的秩亏MUSIC算法,适用于多种极化敏感阵列。文献[2]提出的基于极化敏感圆阵的二维降维MUSIC算法,相比于传统MUSIC算法有更高的估计精度,但是在进行二维DOA估计时会产生一个四维谱峰搜索,导致运算量变大、计算时间变长。旋转不变技术信号参数估计(Estimating signal parameters via rotational invariance techniques, ESPRIT)算法^[3]在文献[4]中被推广至极化敏感阵列中,相比于秩亏MUSIC算法,该算法降低了算法复杂度,但对阵列摆放形式和电磁矢量传感器的要求比较严格,需要特殊的阵列类型。

以上两种算法都是子空间类算法从标量阵列向极化敏感阵列的扩展,但在低信噪比和小快拍的情况下存在估计性能下降的问题。稀疏重构和压缩感知类算法可以有效克服子空间类算法的这种缺陷,故也有学者将压缩感知算法引入极化敏感阵列。文献[5]利用交叉偶极子阵列,提出一种基于加权 l_1 范数约束和 l_0 范数逼近的一维DOA、极化和功率的多参数估计算法;文献[6]在稀疏极化敏感阵列中使用凸优化联合稀疏重构技术估计了DOA参数,并结合最小二乘法估计了极化参数,在同样阵元数条件可以估计更多入射源的参数。但是,以上算法都只考虑了一维DOA估计情况。

压缩感知类算法也存在缺陷,即该类算法通

常会在空间内设置离散化角度网格,并假设空间入射信号位于划分好的网格上。但在实际情况中,入射信号通常会和网格存在一定的偏差,导致网格失配问题,严重影响算法的参数估计性能。为解决此问题,无网格DOA近年来也逐渐成为学者们的研究热点。文献[7]通过重构信号协方差矩阵建立DOA估计的稀疏表示凸优化问题,并通过交替迭代算法求解优化问题,得到网格偏移参数和离网格DOA估计结果;文献[8]基于有限新息率算法实现了基于极化敏感阵列的无网格DOA估计,但只考虑了一维的情况;文献[9]提出一种基于多径环境下的压缩感知类离网格算法,将多径传播系数作为超参数,网格作为可调参数,将多径传播系数估计问题转化为误差矩阵的估计问题,得到离网格DOA估计结果。基于原子范数最小化(Atomic norm minimization, ANM)的算法不会产生网格失配问题,文献[10]提供了将原子范数问题转化为等价的半正定规划问题的理论依据,并通过求解这种等价的半正定规划问题得到一个最优解,其形式为一个Toeplitz矩阵,通过将其进行Vandermonde分解获得入射信号的DOA信息^[11,12];文献[13]提供了将ANM算法应用于相干源DOA估计的思路;文献[14]构建了多频原子范数模型,并提供了等价的半正定规划过程;文献[15]中提出了不规则Toeplitz矩阵和Vandermonde矩阵,将ANM推广至稀疏阵列中;文献[16]中将ANM算法推广到极化域中,但仅限于一维DOA估计。目前这些基于ANM理论的DOA估计算法在标量阵列中的应用性能已优于子空间类算法及压缩感知类算法,但在实际应用环境中仍有进一步优化的可能。

具体到抗干扰能力较强的极化敏感阵列方面,文献[5]使用的均为共点式的极化敏感天线。而空间极化敏感天线利用了空间进行阵列布置,相比于共点式天线可以有效缓解天线间的互耦效应,有更高的工程实用价值。基于此,本文提出了一种基于原子范数的二维DOA和极化参数无网格估计算法。

本文采用正交极化敏感阵列,首先推导了单极化方向的多快拍接收数据模型,并据此构建了 ANM-DOA 模型,求解等效的半正定规划问题得到最优解 $\text{Toep}(\mathbf{u})$ 。基于所得半正定 Toeplitz 矩阵,使用矩阵束算法进行 DOA 参数的恢复,而后根据噪声子空间和信号子空间的正交特性结合配对策略^[17]重构极化参数。

1 信号模型

考虑空间入射 K 个完全极化的远场窄带独立信号,其中第 $k(k=1, 2, \dots, K)$ 个信号的 DOA 和极化参数为 $(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k)$, $\theta_k \in [0^\circ, 360^\circ]$ 表示方位角, $\phi_k \in [0^\circ, 90^\circ]$ 表示俯仰角, $\gamma_k \in [0^\circ, 90^\circ]$ 表示极化辅助角, $\eta_k \in [0^\circ, 360^\circ]$ 表示极化相位角。阵列接收信号模型如图 1 所示,该阵列由 $M_0 = M_1 + M_2$ 个单偶极子阵元构成,其中 x 轴阵元的极化指向均为 α_1 、阵元个数为 M_1 , y 轴阵元的极化指向均为 α_2 、阵元个数为 M_2 ,且同向的每两个阵元间距均为入射信号的半波长。

将每个单偶极子阵元接收信号沿 x 方向的电场矢量分量记为 e_x ,沿 y 方向的电场矢量分量记为 e_y ,则第 $n(n=1, 2, \dots, M_i)$ 个阵元在接收第 k 个信号时,极化参数的具体表达式为:

$$e_n = e^{j\eta_k} \sin \gamma_k \cos \theta_k \cos(\theta_k - \alpha_n) - \cos \gamma_k \sin(\theta_k - \alpha_n) = e_x \cos \alpha_n + e_y \sin \alpha_n \quad (1)$$

式中: α_n 为第 n 个天线的极化指向。 e_x 和 e_y 的具体形式为:

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_k \cos \phi_k \sin \gamma_k e^{j\eta_k} - \sin \theta_k \cos \gamma_k \\ \sin \theta_k \cos \phi_k \sin \gamma_k e^{j\eta_k} + \cos \theta_k \cos \gamma_k \end{bmatrix} \quad (2)$$

所有阵元组成的阵列接收信号和 2 个子阵的

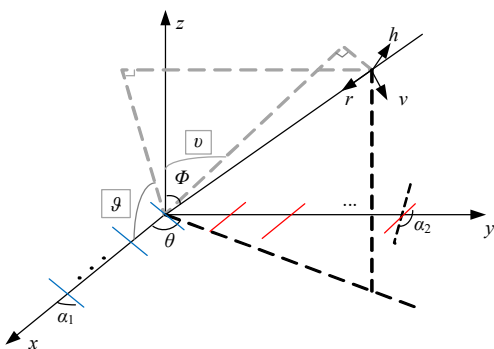


图 1 阵列接收信号模型

Fig. 1 Array receive signal model

阵列信号可以统一表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_i(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k) \mathbf{s}_k(t) + \mathbf{n}_i(t) = \\ \mathbf{A}_i \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_i(t) \end{aligned} \quad (3)$$

式中: $i=0$ 为所有阵元; $i=1$ 和 $i=2$ 分别为 x 轴上阵列和 y 轴上阵列接收信号; $\{\mathbf{s}_k(t)\}_{k=1}^K$ 为 K 个完全极化的远场窄带独立信号; $\mathbf{n}_i(t)$ 为与信号相互独立的高斯白噪声矩阵; $\mathbf{a}_i(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k)$ 为阵列导向矢量,其具体形式为:

$$\mathbf{a}_i(\theta_k, \phi_k, \gamma_k, \eta_k) = \mathbf{u}_i(\theta_k, \phi_k) \mathbf{e}_i \quad (4)$$

式中: $\mathbf{e}_i = [e_1, \dots, e_n, \dots, e_{M_i}]^T$ 为第 i 个阵列接收到的极化矩阵; $\mathbf{u}_i(\theta_k, \phi_k)$ 为空间相位延迟矩阵,表达式为:

$$\mathbf{u}_i(\theta_k, \phi_k) = \text{diag} [u_i^1(k), \dots, u_i^n(k), \dots, u_i^{M_i}(k)] \quad (5)$$

式中: $u_i^n(k)$ 为第 i 个阵列的第 n 个阵元处接收到第 k 个信号的空间相位因子,表达式为:

$$\begin{aligned} u_i^n(k) = \\ \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda} (x_n \cos \theta_k \sin \phi_k + y_n \sin \theta_k \sin \phi_k) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

2 算法原理

本文通过将二维 DOA 估计问题转化为 2 个在正交方向上独立的一维子问题,进而通过 ANM 算法得到一维 DOA 参数估计结果,并经过角度变换还原为二维 DOA 空域角度信息,再将其带回信号子空间,通过与噪声子空间的正交特性求得极化参数的估计结果。

2.1 极化 ANM-DOA 模型

将式(4)具体的表示出来,将 x 轴方向和 y 轴方向的阵列记为子阵 1 和子阵 2,导向矢量矩阵为:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1(\theta_k, \phi_k) = \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{d}_1 \sin \vartheta_k \right) \\ \mathbf{u}_2(\theta_k, \phi_k) = \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{d}_2 \sin \nu_k \right) \end{cases} \quad (7)$$

式中: λ 为信号波长; \mathbf{d}_1 和 \mathbf{d}_2 为 2 个子阵的阵元坐标。设中间变量 $p_k = \sin \vartheta_k = \cos \theta_k \sin \phi_k$, $q_k = \sin \nu_k = \sin \theta_k \sin \phi_k$,将一个二维 DOA 估计问题分离为 2 个一维 DOA 估计问题,故下文只分析子阵 1 接收信号模型。

在理想单快拍无噪声的情况下,将式(7)带入式(3)中,得到子阵 1 接收到的信号模型:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \sum_{k=1}^K \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{d}_1 \sin \vartheta_k\right) |s_k(t)| e^{j\varphi_k} \\ & [e^{j\eta_k} \sin \gamma_k \cos \theta_k \cos(\theta_k - \alpha_1) - \cos \gamma_k \sin(\theta_k - \alpha_1)] \\ & = \sum_{k=1}^K |\tilde{s}_k(t)| \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{d}_1 \sin \vartheta_k + \tilde{\varphi}_k\right) \end{aligned} \quad (8)$$

式中:将 $s(t)$ 表示为 $|s(t)|e^{-j\varphi}$ 的形式, $|s(t)|$ 为入射信号的模值; $\varphi \in [0, 2\pi)$ 为入射信号的初始相位; $|\tilde{s}_k(t)|$ 为结合极化参数的模值; $\tilde{\varphi} \in [0, 2\pi)$ 为结合后的相位,可以看出,当子阵 1 上极化方向单一时,接收信号模型可以包容极化参数,使之符合原子范数模型。

根据式(8)定义一个原子:

$$\mathbf{w}(\vartheta_k, \tilde{\varphi}_k) = \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{d}_1 \sin \vartheta_k + \tilde{\varphi}_k\right) \quad (9)$$

由此定义原子集合为:

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{w}(\vartheta_k, \tilde{\varphi}_k): \vartheta_k \in [-90^\circ, 90^\circ], \tilde{\varphi}_k \in [0, 360^\circ)\} \quad (10)$$

给出该原子集合上的原子范数的定义为:

$$\begin{aligned} \| \mathbf{x} \|_{\mathbf{A}} &= \\ \inf_{\substack{|\tilde{s}_k| \geq 0 \\ \vartheta_k \in [-90^\circ, 90^\circ], \tilde{\varphi}_k \in [0, 360^\circ)}} & \left\{ \sum_{k=1}^K |\tilde{s}_k| : \mathbf{x} = \sum_{k=1}^K |\tilde{s}_k| \mathbf{w}(\vartheta_k, \tilde{\varphi}_k) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

由此可以得到极化 ANM-DOA 联合估计模型。

2.2 DOA 参数估计

在多快拍有噪声的情况下,极化 ANM-DOA 估计算法的原始数学模型为:

$$\arg \min_{\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{K \times L}} \| \mathbf{Y} \|_{\mathbf{A}}, \text{ s.t., } \| \mathbf{Y} - \mathbf{X} \|_F \leq \varepsilon \quad (12)$$

可以将式(12)中的原始模型等价于式(13)所示的半正定规划过程:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^M, \mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{M \times L}, \mathbf{W} \in \mathbb{C}^{L \times L}}} & \frac{1}{2M} \text{tr}[\text{Toep}(\mathbf{u})] + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{W}), \\ \text{s.t., } & \begin{pmatrix} \text{Toep}(\mathbf{u}) & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}^H & \mathbf{W} \end{pmatrix} \succeq 0 \\ & \| \mathbf{Y} - \mathbf{X} \|_F \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (13)$$

式中: \mathbf{Y} 为一个经过重构优化后的多快拍数据矩阵; $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ 为噪声容限参数,表示重构优化的精度,通过改变该参数可以控制重构后的信号和原信号之间的偏差; \mathbf{W} 为原子范数的能量系数矩阵。

通过求解上述 ANM-DOA 模型得到半正定规划问题的最优解 $\text{Toep}(\mathbf{u})$,而后直接通过该半正定 Toeplitz 矩阵的 Vandermonde 分解结果恢复需要的 DOA 参数,该算法称为矩阵束算法。同时 Toeplitz 矩阵的低秩、共轭对称等特性也使得得到的结果具有唯一性。

通过分别求解 2 个子阵对应的 ANM-DOA 估计模型,可以得到估计值 \hat{p}_k 和 \hat{q}_k ,通过配对策略对 2 组参数进行配对,并根据式(14)(15)所示的数学关系得到 DOA 参数的估计值:

$$\hat{\phi}_k = \arcsin(\sqrt{\hat{p}_k^2 + \hat{q}_k^2}) \quad (14)$$

$$\hat{\theta}_k = \begin{cases} \arctan(\hat{q}_k/\hat{p}_k), & \hat{p}_k > 0 \& \hat{q}_k \geq 0 \\ \arctan(\hat{q}_k/\hat{p}_k) + \pi, & \hat{p}_k < 0 \\ \arctan(\hat{q}_k/\hat{p}_k) + 2\pi, & \hat{p}_k > 0 \& \hat{q}_k < 0 \end{cases} \quad (15)$$

2.3 极化参数估计

由于 ANM-DOA 估计模型不能直接恢复出入射信号的极化参数,故通过信号子空间与噪声子空间的正交关系,将估计出的 DOA 参数带入导向矢量以得到信号子空间,进而恢复极化参数。

将接收数据的协方差矩阵分解为信号子空间矩阵 \mathbf{U}_S 和噪声子空间 \mathbf{U}_N ,可得到正交关系方程:

$$\mathbf{e}^H \mathbf{u}^H(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{u}(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \mathbf{e} = 0 \quad (16)$$

由于上述 ANM-DOA 模型考虑的是理想无误差的情况,但实际情况往往会存在一定的误差,故将式(16)转化为式(17)的优化问题:

$$\begin{aligned} \{\gamma_k, \eta_k\} &= \arg \min_{\gamma_k, \eta_k} \frac{\mathbf{e}^H T(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \mathbf{e}}{\mathbf{e}^H \mathbf{u}^H(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \mathbf{u}(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \mathbf{e}} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \min_{h_{\gamma_k, \eta_k}} \mathbf{e}^H T(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \mathbf{e} \\ \text{s.t. } \mathbf{e}^H \mathbf{u}^H(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \mathbf{u}(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \mathbf{e} = 1 \\ T(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) = \mathbf{u}^H(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{u}(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

通过构造拉格朗日算子并求偏导解该问题,如式(18)(19)所示:

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{e}, \mu_k) &= \mathbf{e}^H T(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \mathbf{e} + \\ & \mu_k [1 - \mathbf{e}^H \mathbf{u}^H(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \mathbf{u}(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \mathbf{e}] \end{aligned} \quad (18)$$

$$T(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \mathbf{e} = \mu_k \mathbf{u}^H(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \mathbf{u}(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \mathbf{e} \quad (19)$$

式中: μ_k 为 $\{T(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k), \mathbf{u}^H(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k) \mathbf{u}(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_k)\}$ 的广义特征值; \mathbf{e} 为其对应的广义特征向量。

故取最小的 μ_k 对应的 e , 并根据式(20)即可得到极化参数的估计值, 总算法流程如表 1 所示。

表 1 算法流程

Table 1 Algorithm flow

基于 ANM 的极化敏感阵列二维 DOA 估计算法	
输入	阵列接收到的多快拍信号
输出	入射信源的 DOA 估计结果 $\hat{\phi}$ 和 $\hat{\theta}$ 及极化参数估计结果 $\hat{\gamma}$ 和 $\hat{\eta}$
步骤 1	将极化阵列接收信号分为 x_1 和 x_2
步骤 2	构建如式(7)所示的 DOA 估计模型
步骤 3	构建式(13)中的半正定规划问题
步骤 4	通过求解该半正定规划问题得到最优解 Toeplitz 矩阵 $\text{Toep}(u)$
步骤 5	对 Toeplitz 矩阵进行 Vandermonde 分解, 根据式(14)和式(15)恢复入射信号的 DOA 估计信息 $\hat{\phi}$ 和 $\hat{\theta}$
步骤 6	构建如式(17)所示的优化问题
步骤 7	根据式(19)计算广义特征向量 e
步骤 8	根据式(20)计算极化域估计结果 $\hat{\gamma}$ 和 $\hat{\eta}$

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_k = \arctan\left(\left|\frac{e_k(2)}{e_k(1)}\right|\right) \\ \hat{\eta}_k = \arg\left(\left|\frac{e_k(2)}{e_k(1)}\right|\right) \end{cases} \quad (20)$$

3 仿真实验

通过与压缩感知类 l_1 -SVD 算法、子空间类极化秩亏 MUSIC 算法和无网格类有限新息率算法进行对比实验, 验证本文算法的估计性能。仿真实验采用极化敏感阵列为 2 组 6 阵元组成的正交单偶极子阵列, 阵元间距为半波长, 2 个子阵的极化指向为 $\alpha_1 = 135^\circ$ 和 $\alpha_2 = 45^\circ$ 。实验 l_1 -SVD 和秩亏 MUSIC 算法的搜索间隔为 0.5° , 实验中噪声容限为 10^{-5} 。

对比性能指标选择均方根误差(Root mean square error, RMSE), 计算公式为:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{KN} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K (\hat{\phi}_{k,n} - \phi_k)^2 + (\hat{\theta}_{k,n} - \theta_k)^2} \quad (21)$$

式中: N 为蒙特卡罗实验的次数; ϕ_k 和 θ_k 为第 k 个待估计信号的入射方向; $\hat{\phi}_{k,n}$ 和 $\hat{\theta}_{k,n}$ 为第 k 个待估计信号在第 n 次实验的 DOA 估计值。

仿真实验设置 2 个远场窄带完全极化的独立信号入射到阵列中, 信号的俯仰角、方位角、极

化辅助角和极化相位角分别为 $\phi_k \in [0^\circ, 90^\circ]$, $\theta_k \in [0^\circ, 360^\circ]$, $\gamma_k \in [0^\circ, 90^\circ]$, $\eta_k \in [0^\circ, 360^\circ]$ 。仿真实验首先验证了极化敏感阵列相较于标量阵列的优势, 其次验证了本文算法极化域参数的估计性能, 最后从信噪比、快拍数、分辨精度和复杂度 4 个方面对比分析了本文算法的性能。

3.1 极化敏感阵列相对于标量阵列性能对比

首先对比极化敏感阵列和标量阵列同样使用原子范数算法的差异。实验设置快拍数为 100, 设置信噪比从 5 dB 以步长 5 dB 步进到 25 dB, 标量阵列采用与极化敏感阵列相同的摆放形式。实验设置的 2 个人射信源的角度 $(\theta, \phi, \gamma, \eta)$ 为 $(10^\circ, 20^\circ, 45^\circ, 30^\circ)$ 和 $(45^\circ, 50^\circ, 20^\circ, 40^\circ)$ 。通过进行 500 次蒙特卡罗实验得到不同阵列的 RMSE 随信噪比变化产生的影响, 如图 2 所示。

根据图 2 可以看出, 相较于标量阵列中的原子范数算法, 极化敏感阵列能接收到入射信源的极化域信息, 故在相同阵列摆放的情况下能具有更高的估计精度。

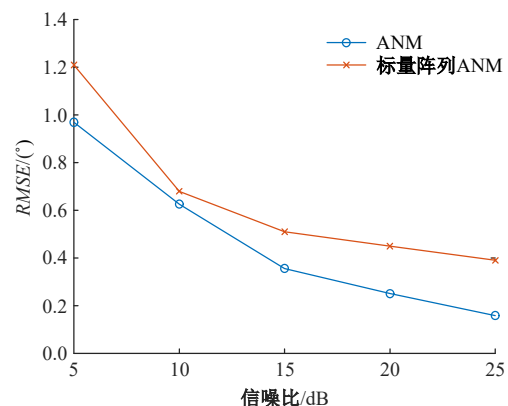


图 2 极化敏感阵列和标量阵列的对比

Fig. 2 Comparison of polarization-sensitive arrays and scalar arrays

3.2 极化域参数估计性能

接下来验证本文算法估计极化参数的性能, 设置快拍数为 100, 信噪比为 10 dB, 入射信源角度为 $(36.28^\circ, 6.24^\circ, 40.52^\circ, 12.38^\circ)$ 和 $(2.85^\circ, 15.64^\circ, 61.45^\circ, 32.56^\circ)$ 。极化参数估计结果分布图如图 3 所示, 可以看出, 本文算法正确估计 DOA 参数的同时, 也准确地估计出入射信号的极化参数, 极化辅助角最大偏差约为 5° , 极化相位角最大偏差约为 6° , 验证了本文算法优良的估计性能。

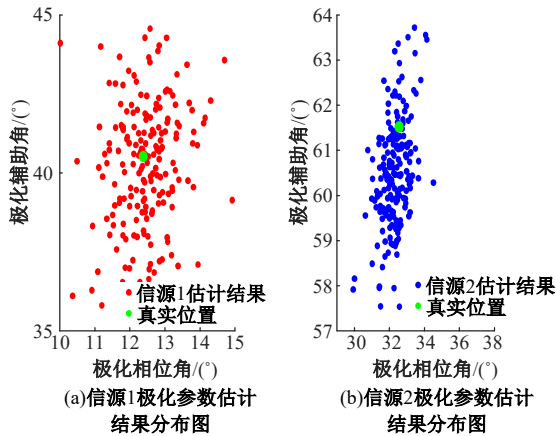


图 3 极化参数估计结果分布图

Fig. 3 Distribution plot of polarization parameter estimation results

3.3 从信噪比、快拍数、分辨精度、复杂度 4 个角度分析算法性能

信噪比实验设置快拍数为 100, 设置信噪比从 -10 dB 以步长 5 dB 步进到 25 dB, 入射信号的角度 $\phi_k \in [0^\circ, 90^\circ]$, $\theta_k \in [0^\circ, 360^\circ)$, $\gamma_k \in [0^\circ, 90^\circ]$, $\eta_k \in [0^\circ, 360^\circ)$ 随机给出。进行 500 次蒙特卡罗实验, 得到不同算法之间的方位角、俯仰角的 RMSE 随信噪比变化产生的影响, 如图 4 和图 5 所示, 从图 4 和图 5 中可以看出, 4 种算法的 RMSE 随着信噪比的增加都有不同程度的减小, 在方位角方面, 本文算法在各信噪比下的估计性能都优于 l_1 -SVD 算法、秩亏 MUSIC 算法, 稍优于 FRI 算法; 在俯仰角方面, 本文算法显著优于 l_1 -SVD 算法, 当信噪比 > 10 dB 时, 本文算法估计性能优于秩亏 MUSIC 算法, 验证了本文算法的估计性能。

快拍数实验设置信噪比为 5 dB, 设置一组快

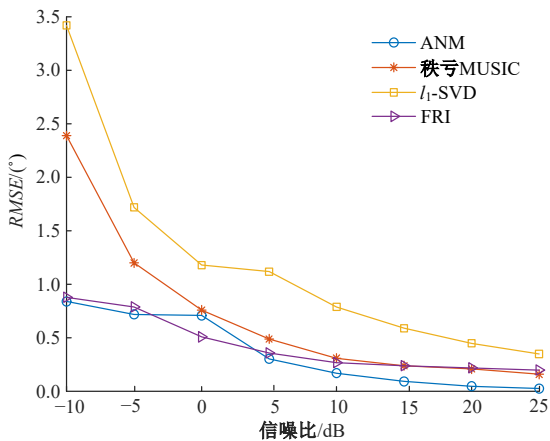


图 4 方位角 RMSE 随信噪比的变化

Fig. 4 Azimuth RMSE changes with SNR

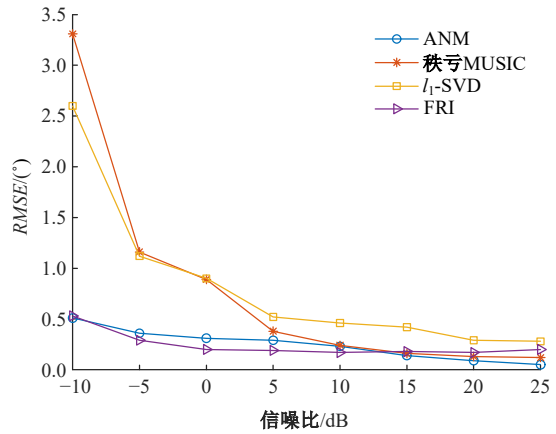


图 5 俯仰角 RMSE 随信噪比的变化

Fig. 5 Pitch angle RMSE changes with SNR

拍数为 10、50、100、200、400, 入射信号的角度 $\phi_k \in [0^\circ, 90^\circ]$, $\theta_k \in [0^\circ, 360^\circ)$, $\gamma_k \in [0^\circ, 90^\circ]$, $\eta_k \in [0^\circ, 360^\circ)$ 随机给出。进行 500 次蒙特卡罗实验, 得到不同算法估计到的方位角和俯仰角的 RMSE 随快拍数产生的影响, 如图 6 和图 7 所示。

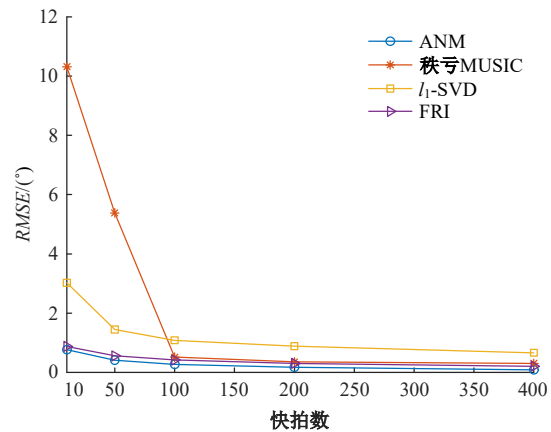


图 6 方位角 RMSE 随快拍数的变化

Fig. 6 Azimuth RMSE changes with SNAP

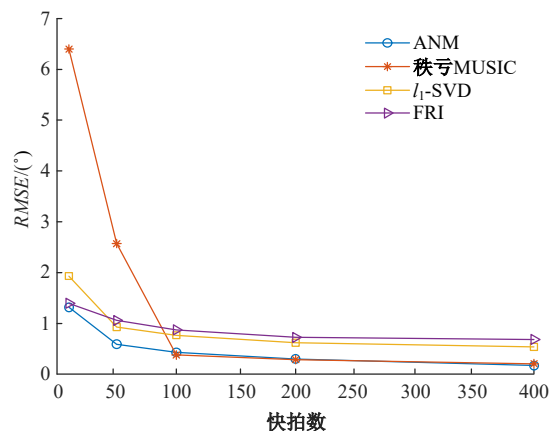


图 7 俯仰角 RMSE 随快拍数的变化

Fig. 7 Pitch angle RMSE changes with SNAP

从图 6 和图 7 中可以看出,随着快拍数的增加,4 种算法的估计精度都有所提高。秩亏 MUSIC 算法作为子空间类算法,在低快拍数的情况下 2 个角度的估计精度都急剧降低,而 l_1 -SVD 算法和 FRI 算法在实验设置的各快拍数下的估计精度都不及本文算法,验证了本文算法的估计精度。

双信源分辨精度实验设置信噪比为 5 dB,快拍数为 100,空间入射 2 个完全极化的独立信号,将 DOA 参数设置为 $(20^\circ, 40^\circ)$ 和 $(20^\circ + \rho, 40^\circ + \rho)$,极化参数均设置为 $(43.89^\circ, 10.26^\circ)$, ρ 的取值从 1° 以步长 1° 步进到 10° 。方位角和俯仰角的估计误差在 $\pm 2^\circ$ 之内记为成功估计,进行 1 000 次蒙特卡罗实验,不同角度间隔下的估计成功率如图 8 所示。

随着角度间隔变大,4 种算法分辨成功率都有所上升,本文算法在角度间隔较小时,有最高的成功率,并且在角度间隔在 6° 以上时,成功率在 90% 以上,验证了本文算法针对双信源的估计性能。

算法复杂度实验对比子空间类、压缩感知类、无网格类 3 种算法,算法复杂度如表 2 所示,半正定规划中单次迭代复杂度为 $O(8M^3)$,迭代次数为 $o(\log \mu)$, L 为快拍数, P 为网格数目。

图 9 为信噪比设置为 10 dB,快拍数取 10、50、

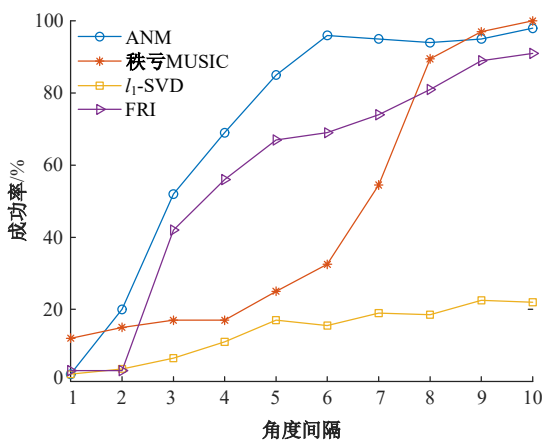


图 8 双信源分辨成功率

Fig. 8 Dual source resolution success rate

表 2 算法复杂度

Table 2 Algorithm complexity

算法	复杂度
l_1 -SVD	$O(16M^3P^3)$
秩亏 MUSIC	$O[8M^2L + 16M^3 + 240(4M^2 - 2MK)]$
ANM	$O(16M^3L^3\log \mu)$

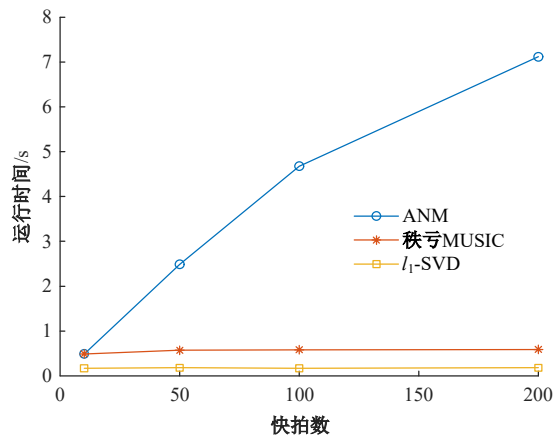


图 9 算法运行时间随快拍数的变化

Fig. 9 Algorithm running time changes with SNAP

100、200,进行 500 次蒙特卡罗实验再取平均值的算法运行时间。

子空间类算法因为存在谱峰搜索,故运行时间和复杂度都要大于压缩感知类算法;本文提出的算法需要解凸优化问题,故算法复杂度和运算时间都要大于另外 2 种算法。

5 结束语

为解决压缩感知类 DOA 估计算法产生网格失配带来的估计精度下降问题,本文基于单偶极子天线阵列提出了一种二维无网格 DOA 和极化参数的联合估计算法。本文算法将 ANM 算法拓展到极化敏感阵列中,首先利用二维正交阵列的可分离特性,将阵列分解为 2 个子阵,根据接收信号的形式构建了极化 ANM-DOA 联合估计模型,并给出对应的原子集合。通过解一个原子范数等效的半正定规划问题得到 $Toep(u)$,对此矩阵进行 Vandermonde 分解即可恢复入射信源的 DOA 信息。而后根据信号的信号子空间和噪声子空间的正交特性,结合配对策略完成极化参数的估计。仿真实验验证了本文算法相较于对比算法具有更好的估计性能,同时本文所用的极化敏感阵列相较于标量阵列也具有更高的估计精度,验证了二维 ANM 算法在极化敏感阵列中的可行性。

参考文献:

- [1] Ferrara E, Parks T. Direction finding with an array of antennas having diverse polarizations[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1983, 31 (2): 231-236.
- [2] He Z, Tian Z, Zhou M, et al. DOA estimation meth-

- od for polarization sensitive circular array based on reduced-dimensional MUSIC[C]//IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI Radio Science Meeting, Denver, USA, 2022: 427-428.
- [3] Roy R, Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(7): 984-995.
- [4] Li J, Compton R T. Angle and polarization estimation using ESPRIT with a polarization sensitive array [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1991, 39(9): 1376-1383.
- [5] Tian Y, Sun X, Zhao S. Sparse-reconstruction-based direction of arrival, polarization and power estimation using a cross-dipole array[J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2015, 9(6): 727-731.
- [6] Chalise B K, Zhang Y D, Himed B. Compressed sensing based joint DOA and polarization angle estimation for sparse arrays with dual-polarized antennas [C]//IEEE Global Conference on Signal and Information Processing, Anaheim, USA, 2018: 251-255.
- [7] 王洪雁, 于若男, 潘勉, 等. 基于协方差矩阵重构的离网格 DOA 估计方法[J]. 电子与信息学报, 2021, 43(10): 2863-2870.
Wang Hong-yan, Yu Ruo-nan, Pan Mian, et al. Off-grid DOA estimation method based on covariance matrix reconstruction[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2021, 43(10): 2863-2870.
- [8] 陈涛, 赵立鹏, 史林. 基于有限新息率的正交偶极子阵列信号参数估计算法[J]. 电子与信息学报, 2022, 44(7): 2469-2477.
Chen Tao, Zhao Li-peng, Shi Lin. Signal parameter estimation algorithm for orthogonal dipole array based on finite rate of innovation[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2022, 44(7): 2469-2477.
- [9] Hu B, Shen X Y, Jiang M, et al. Off-grid DOA estimation based on compressed sensing on multipath environment[J]. International Journal of Antennas and Propagation, 2023, 1: 9315869.
- [10] Tang G, Bhaskar B N, Shah P, et al. Compressed sensing off the grid[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(11): 7465-7490.
- [11] Pan Y, Yao M, Luo G Q. et al. Underdetermined direction-of-arrival estimation with coprime array via atomic norm minimization[J]. Radio Engineering, 2020, 29(2): 405-413.
- [12] Yang Z, Xie L, Stoica P. Vandermonde decomposition of multilevel toeplitz matrices with application to multi-mensional super-resolution[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2016, 62(6): 3685-3701.
- [13] Zhang X, Zheng Z, Wang W Q. DOA estimation of coherent sources using coprime array via atomic norm minimization[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2022, 29: 1312-1316.
- [14] Wu Y, Wakin M B, Gerstoft P. Gridless DOA estimation with multiple frequencies[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2023, 71: 417-432.
- [15] Wagner M, Park Y, Gerstoft P. Gridless DOA estimation and root-music for non-uniform linear arrays [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2021, 69: 2144-2157.
- [16] 陈涛, 李敏行, 郭立民. 基于原子范数最小化的极化敏感阵列 DOA 估计[J]. 电子学报, 2023, 51(4): 835-842.
Chen Tao, Li Min-xing, Guo Li-min. DOA estimation of polarization sensitive array based on atomic norm minimization[J]. Acta Electronica Sinica, 2023, 51(4): 835-842.
- [17] Zhang Z, Wang Y, Tian Z. Efficient two-dimensional line spectrum estimation based on decoupled atomic norm minimization[J]. Signal Processing, 2019, 163: 95-106.