

# 基于密度离散度和信息传输延迟的 网联商用车弯道格子模型

赵红专<sup>1,2,3,4,5</sup>, 吴泽健<sup>1,2,4,5</sup>, 张鑫<sup>1,2</sup>, 石胜文<sup>4</sup>, 李文勇<sup>1</sup>,  
展新<sup>4</sup>, 许恩永<sup>4</sup>, 王佳明<sup>4,6</sup>

(1. 桂林电子科技大学广西智慧交通重点实验室, 广西桂林 541004; 2. 桂林电子科技大学建筑与交通工程学院, 广西桂林 541004; 3. 桂林电子科技大学广西精密导航技术与应用重点实验室, 广西桂林 541004; 4. 东风柳州汽车有限公司, 广西柳州 545005; 5. 南宁桂电电子科技研究院有限公司, 南宁 530032; 6. 广西科技大学人文艺术与设计学院, 广西柳州 545006)

**摘要:**为缓解弯道环境下含有网联商用车的混合交通流交通拥塞问题,在安全条件的约束下提高弯道环境下含有网联商用车的混合交通流的稳定性,提出了一种弯道环境下基于密度离散度效应和信息传输延迟效应的网联商用车格子模型(DDITD)。该模型首次提出了密度离散度效应的概念,揭示了网联商用车跟驰特性对混合车流密度分布的影响,并将密度离散度效应和信息传输延迟效应同时引入弯道格子模型中,拓展了格子模型的适用范围。首先,通过实车试验标定 DDITD 模型中的转弯修正系数,利用线性稳定性分析对 DDITD 模型进行分析,研究了弯道环境下密度离散度以及信息传输延迟对交通流稳定性的影响。其次,通过非线性稳定性分析,应用约化摄动方法,推导出描述交通密度波演化特性临界点附近的 mKdV 方程。最后,通过数值仿真对理论结果进行了验证,结果表明,密度离散度效应和信息传输延迟效应可以有效缓解弯道上的交通堵塞。本文研究成果为研究网联商用车跟驰特性和混合车流稳定性提供了新的方法,为弯道环境下的交通管理和控制提供了新的思路和依据。

**关键词:**交通运输系统工程;格子流体力学模型;弯道;网联商用车;密度离散度效应;信息传输延迟效应

中图分类号:U491.1 文献标志码:A 文章编号:1671-5497(2025)06-2015-15

DOI:10.13229/j.cnki.jdxbgxb.20230987

## Curve lattice model for connected commercial vehicles based on density dispersion and information transmission delay

ZHAO Hong-zhuan<sup>1,2,3,4,5</sup>, WU Ze-jian<sup>1,2,4,5</sup>, ZHANG Xin<sup>1,2</sup>, SHI Sheng-wen<sup>4</sup>, LI Wen-yong<sup>1</sup>,  
ZHAN Xin<sup>4</sup>, XU En-yong<sup>4</sup>, WANG Jia-ming<sup>4,6</sup>

(1. Guangxi Key Laboratory of ITS, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China; 2. School of Architecture and Transportation Engineering, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China; 3. Guangxi Key Laboratory of Precision Navigation Technology and Application, Guilin University of Electronic

收稿日期:2023-09-14.

基金项目:国家自然科学基金项目(52362045);广西重点研发计划项目(桂科 AB21220052);广西科技重大专项项目(桂科 AA22068101);柳州市重大专项项目(2021CAA0101);桂林市创新平台和人才计划项目(20210217-15);广西精密导航技术与应用重点实验室项目(DH202225).

作者简介:赵红专(1985-),男,副教授,博士.研究方向:智慧交通.E-mail:zhaohongzhuan@guet.edu.cn

Technology, Guilin 541004, China; 4. Dongfeng Liuzhou Automobile Co., Ltd., Liuzhou 545005, China; 5. GUET—Nanning E—Tech Research Institute Co., Ltd, Nanning 530032, China; 6. College of Humanities, Art and Design, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou 545006, China)

**Abstract:** In order to solve the traffic congestion problem of mixed traffic flow with connected commercial vehicles in the curve environment and improve the stability of mixed traffic flow with connected commercial vehicles in the curve environment, a lattice model of connected commercial vehicles based on density dispersion effect and information transmission delay effect (DDITD) in curve environment was proposed. The density dispersion effect was first proposed, which reveals the influence of the following characteristics of connected commercial vehicles on the density distribution of mixed traffic flow. The density dispersion effect and the information transmission delay effect were introduced into the curve lattice model at the same time, which expands the applicable scope of the lattice model. Firstly, the turn correction coefficient in DDITD model was calibrated through real vehicle test, and then the DDITD model was analyzed by linear stability analysis to study the influence of density dispersion and information transmission delay on the stability of traffic flow under the curve environment. Secondly, the reduced perturbation method was applied through nonlinear stability analysis. The mKdV (modified Korteweg de Vries) equation was derived to describe the critical point of traffic density wave evolution. Finally, the theoretical results were verified by numerical simulation, and the results show that the density dispersion effect and the information transmission delay effect can effectively alleviate the traffic jam on the curve. The research results provides a new method for studying the following characteristics of connected commercial vehicles and the stability of mixed traffic flow, and provides a new ideas and basis for traffic management and control in curved environments.

**Key words:** engineering of communications and transportation system; lattice hydrodynamic model; curve; commercial vehicles; density dispersion effect; delayed effects of information transmission

## 0 引言

现代社会普遍面临交通拥堵问题,这与近10年来汽车数量激增有关。道路拥堵不仅会破坏自然环境,还会危害人们健康和司机安全。为了分析和控制交通现象,需要更真实的交通流模型。目前,已有许多基于不同方法的模型,如车辆跟驰模型<sup>[1]</sup>、元胞自动机模型<sup>[2]</sup>、流体力学模型<sup>[3]</sup>和格子流体力学模型<sup>[4,5]</sup>,它们各有优缺点。

Nagatani<sup>[6]</sup>首创了格子流体动力学方法,该方法融合了车辆跟驰和连续体模型的思想,能够描述交通流的不同阶段,用扭结反扭结密度波表示交通堵塞,并展现交通的集体行为。Nagatani的工作后来被进一步发展,考虑了许多交通特征,如向后效应<sup>[7]</sup>、车道宽度<sup>[8]</sup>、流量差<sup>[9]</sup>、密度差<sup>[10]</sup>、最佳流量差<sup>[11]</sup>等。此外,基本格子模型也扩展到双车道交通系统<sup>[12]</sup>和二维交通网络<sup>[13]</sup>中,模拟车道变换和网络动态的影响。随后,模型中加入大量真实的交通因素。

弯道上的交通现象与直道不同,因为车辆受到向心力的影响,导致交通流更加不规则和复杂<sup>[14]</sup>。为了克服弯道上由于路面角度而导致的不稳定状态,Cao等<sup>[15]</sup>在基础格子模型上引入弯道摩擦因数和曲率半径,建立了一种新的弯道格子模型。Kaur等<sup>[16]</sup>将直道上的基础模型推广到弯道,并将驾驶员行为特征纳入格子模型中,形成了一种新的格子流体力学模型。Kaur等<sup>[17]</sup>还考察了带坡度弯道上车流现象的复杂性,提出了一种考虑驾驶员预期效应的双车道系统格子模型。Cheng等<sup>[18]</sup>分析了延迟反馈控制对弯道车流的影响,并在单车道上建立了一个扩展的格子流体力学模型。Wang等<sup>[19]</sup>研究了路面几何特性对交通安全的复杂动态影响,并针对单车道系统,提出了一种考虑电子节气门动力学效应的扩展宏观交通流模型,并通过仿真实例证明了路面几何特性对交通系统总能耗有显著影响。除了考虑网联商用车的跟驰特性,由于网联商用车实时获取交通信息时还会受通信时延的影响,所以考虑信息延

迟对车流的影响是很有必要的。Redhu等<sup>[20]</sup>在格子模型中加入前方格子流量延时作用,并设计了反馈增益和延迟时间,提出了单向道路上格子流体动力学交通流模型的延迟反馈控制方法,稳定交通流和抑制堵塞。Peng等<sup>[21]</sup>基于历史密度差效应,建立了延迟反馈控制格子模型。Peng等<sup>[22]</sup>考虑V2V环境下延迟效应,提出了V2V通信条件下跟驰模型,结果显示延迟反馈控制方法能改善交通流稳定性。Zhang等<sup>[23]</sup>考虑前一格子交通流量时变延迟信息,建立了新宏观格子流体动力学模型,数值仿真结果表明时变延迟交通流会削弱交通流稳定性,且时变延迟信息易导致拥堵。文献[24,25]考虑协同信息传输延迟的影响,建立了新型格子控制模型,仿真结果表明考虑多种延迟信息协同传输效应的格子控制模型,可以有效缓解交通拥堵。

以上研究表明考虑路面几何特性会影响交通流的稳定性,延迟效应可以很好地改善交通流的稳定性,但现有研究中很少考虑特殊路段下网联商用车的跟驰特性,并且忽视了延迟效应、网联商用车跟驰特性以及环境因素对车流的综合影响。

针对上述研究中存在的问题,通过考虑网联商用车跟车特性对车流密度分布的影响,本文提出了密度离散度效应概念,从而更好地从宏观层面刻画出网联商用车对车流密度的影响。在得到密度离散度效应的基础上,提出了一个弯道环境下考虑密度离散度效应和信息传输延迟效应的格子流体力学模型。相较于现有的宏观交通流模型,该模型综合考虑了弯道路段因素、车型因素、信息传输延迟因素对交通流的影响,揭示了弯道路段因素、车型因素、信息传输延迟因素对交通宏观量动态演化规律的影响,进而更好地分析交通流的稳定性和动态演化规律。

## 1 DDITD模型

格子流体力学模型被用于研究各种交通问题,其中驾驶员记忆、后视信息反馈以及平均优化速度差等因素已经被众多学者研究,但鲜有学者从弯道格子模型上研究网联商用车跟驰特性以及信息因素对交通流的影响。由于商用车与乘用车的机动性、惯性、体型以及制动能力不同,会导致密度差较大,密度离散性增加,并且车辆在协同行驶过程中通常还会受到信息传输延迟时间的影响,这些都会影响通行效率。为降低密度离散性,

抑制信息传输延迟影响,提高高速公路弯道通行效率,本文首次将密度离散度效应和信息传输延迟效应同时引入具有安全条件约束的弯道格子模型中,提出了一种弯道环境下基于密度离散度效应和信息传输延迟效应的网联商用车格子模型(Density dispersion and information transmission delay, DDITD)。

### 1.1 最优速度函数

针对现有最优速度函数修正系数 $k$ 值过于理想的问题,引入车型系数、左转系数、右转系数,建立了更加符合实际交通情况的最优速度函数。

Nagatani<sup>[6]</sup>针对单车道单向道路提出了描述交通现象的流体动力学模型的网格版本,给出守恒方程和运动方程分别如下所示:

$$\partial_t \rho_j + \rho_0 (\rho_j v_j - \rho_{j-1} v_{j-1}) = 0 \quad (1)$$

$$\partial_t (\rho_j v_j) = a (\rho_0 V(\rho_{j+1}) - \rho_j v_j) \quad (2)$$

式中: $\rho_j$ 和 $v_j$ 分别为时间 $t$ 时一维晶格上第 $j$ 个位置的局部密度和速度; $\rho_0$ 为平均密度; $a$ 为驾驶员的灵敏度; $V(\cdot)$ 为最优速度函数,它是具有上界的单调递减函数,在临界密度处有一个拐点。

采用以下最优速度函数<sup>[13]</sup>:

$$V(\rho_j) = \frac{v_{\max}}{2} \left[ \tanh\left(\frac{2}{\rho_0} - \frac{\rho_j}{\rho_0^2} - \frac{1}{\rho_c}\right) + \tanh\left(\frac{1}{\rho_c}\right) \right] \quad (3)$$

式中: $\rho_c$ 为临界密度。

弯道特征由距离 $y = \sqrt{(R)^2 - (x - R)^2}$ 表示,其中, $R$ 为弯道的曲率半径。弯道环境下网联商用车行驶路线的物理模型如图1所示。

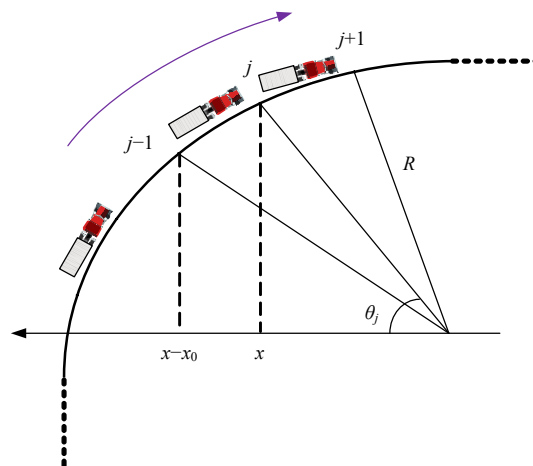


图1 弯道环境下网联商用车行驶路线物理模型

Fig. 1 Physical model of driving route of commercial vehicle in curved environment

位置  $j$  和  $j-1$  之间的格子间距为:

$$l = \int_{x-x_0}^x \sqrt{1+y'^2} dx = \frac{x_0}{\sin \theta_j} \quad (4)$$

式中:  $\theta_j$  为弯道第  $j$  个站点的弧度。

根据式(4)可知,车间距与弧度  $\theta_j$  相关,为保证弯道区域的行车安全,车间距要始终大于或等于安全车间距,所以对弧度  $\theta_j$  进行约束,使得  $\theta_{j_{\min}} \leq \theta_j \leq \theta_{j_{\max}}$ ,当  $\theta_j$  大于最大弧度  $\theta_{j_{\max}}$  时,  $\theta_j$  取  $\theta_{j_{\max}}$  值,当  $\theta_j$  小于最小弧度  $\theta_{j_{\min}}$  时,  $\theta_j$  取  $\theta_{j_{\min}}$  值。曲线道路的修正格子间距可根据直线道路上的平均车头时距( $1/\rho_0$ )计算曲线道路上的平均车头时距。因此,将式(1)(2)中的  $\rho_0$  替换成  $\rho_0/\sin \theta_j$ 。由于弯道与直道的情况不同,所以采用改进后的最佳速度函数<sup>[15]</sup>,如下所示:

$$V(\rho_j) = \frac{k\sqrt{ugR}}{2} \left[ \tanh\left(\frac{2}{\rho_0} - \frac{\rho_j}{\rho_0^2} - \frac{1}{\rho_c}\right) + \tanh\left(\frac{1}{\rho_c}\right) \right] \quad (5)$$

式中:  $u$  为道路摩擦因数;  $g$  为重力加速度;  $k$  为车辆在弯道行驶时理想最大速度的修正系数。

因为在弯道行驶时,驾驶员为防止车辆行驶方向失控、侧翻等情况发生,必须降低车速,所以在弯道上车辆行驶的实际最大速度一般小于理想最大速度。以往研究中,对  $k$  的取值一般集中在 0.14~0.4,取值过于理想,考虑因素较为单一。由文献[25]可知,车辆速度会受自身车型影响,并且车辆左转、右转时的行驶状态也不完全一致,

本文考虑了车型特征、左转特征、右转特征,可得最大速度修正系数  $k$  为:

$$k = f_t f_{cv} \quad (6)$$

式中:  $f_t$  为转弯修正系数,右转弯时  $f_t = f_{rt}$ ,  $f_{rt}$  为右转弯修正系数,左转弯时,  $f_t = f_{lt}$ ,  $f_{lt}$  左转弯修正系数;  $f_{cv}$  为网联商用车车型修正系数。

通过对弯道路段特性和网联商用车行驶特性进行分析,得到新的优化速度函数,但该优化速度函数中仍有参数  $f_{cv}$ 、 $f_{lt}$  以及  $f_{rt}$  需要标定。

### 1.2 参数标定

为了仿真结果更能反映真实的道路交通运行情况,基于上文构建的优化速度函数,本节设计了参数  $f_{cv}$ 、 $f_{lt}$  以及  $f_{rt}$  的标定方法。

文献[27]的统计结果表明,高速公路上 86.12% 的网联商用车速度为 60~200 km/h,而高速公路网联商用车最高行驶速度一般不得超过 90 km/h,所以取最大值(90 km/h)与 86.12% 的乘积,得到网联商用车最大行驶速度期望值为 77.51 km/h。根据文献[28]可知,高速公路小汽车平均速度为 97 km/h,按比例计算可得  $f_{cv} = 0.8$ ,  $f_{rt}$  和  $f_{lt}$  将基于实车试验数据进行标定。为获取分析所需的车辆行驶信息,于 2023 年 6 月 2 日依托东风柳州汽车有限公司重型网联商用车低碳智能控制技术开发重点实验室,使用智能网联电动物流车在沪渝高速上进行车辆行驶的试验,网联商用车车型参数标定流程如图 2 所示。

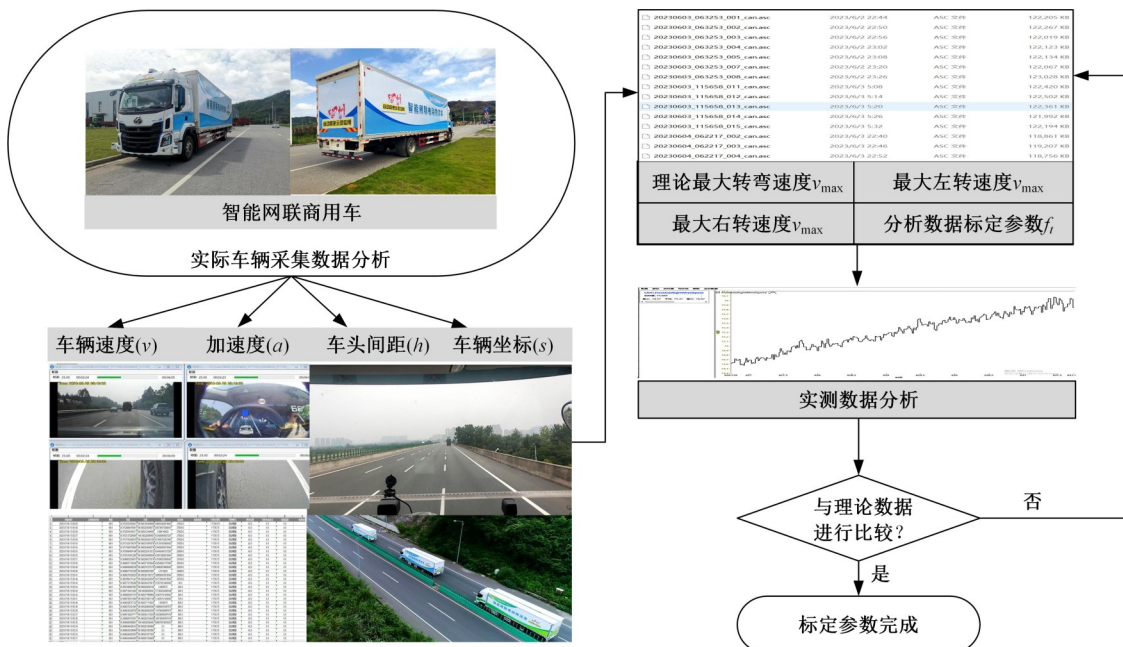


图 2 网联商用车车型参数标定流程

Fig. 2 Calibration process for commercial vehicle models

该智能网联商用车能够通过 OBU 设备获取车辆前后多车的速度和加速度信息,可利用路侧设备、车载感知设备以及通信设备,对车辆实时状态和轨迹进行记录和分析,还可借助路侧单元获取车辆绝对位置、交通状况等全局信息,借助车车通信可获取自车与附近车辆速度、相对位置以及加速度等局部信息。为了使实验场景更加符合实际情况,设置启动加速行驶、高速匀速行驶以及制动减速行驶驾驶行为,使实验过程覆盖车辆所有可能的速度变化,如表 1 所示。

表 1 实验场景设置

Table 1 Experimental setting

驾驶场景	驾驶行为
右转弯	启动加速行驶
	高速匀速行驶
	制动减速行驶
左转弯	启动加速行驶
	高速匀速行驶
	制动减速行驶

在实车试验获取的数据中,右、左转弯各选 20 条车辆在转弯阶段高速匀速行驶数据作为样本数据,对  $f_{rt}$  和  $f_{lt}$  进行标定。试验数据用于标定  $v_{max}$  的转弯修正系数,根据以往研究<sup>[14-19]</sup>, $k$  的取值为  $[0, 1]$ ,所以设置  $f_{rt}$  和  $f_{lt}$  的取值均为  $[0, 1]$ 。 $f_{rt}$  和  $f_{lt}$  值随着实测转弯最大速度变化而变化,部分数据如表 2 所示。

表 2  $f_i$  值随实测最大速度变化

Table 2  $f_i$  value varies with measured maximum speed

参数	最小值	中位数	最大值
理论 $v_{max}$	77.51	77.51	77.51
实测右转 $v_{max}$	64.57	65.31	66.07
$f_{rt}$	0.83	0.84	0.85
实测左转 $v_{max}$	67.53	68.24	68.94
$f_{lt}$	0.87	0.88	0.89

统计出右、左转在高速匀速行驶阶段的最大速度区间,并绘制箱线图,如图 3 所示,标定结果为: $f_{rt}=0.84$  和  $f_{lt}=0.88$ 。

通过对参数的标定,确定优化速度函数,但优化速度函数需要被引入具体的守恒和运动方程组中才能构建出格子流体力学模型。

### 1.3 守恒和运动方程组

为了刻画弯道环境下含有网联商用车的交通流密度演化规律,基于上文建立的优化速度函数和弯道特性表达式,建立守恒和运动方程组,并由此推导出演化方程。

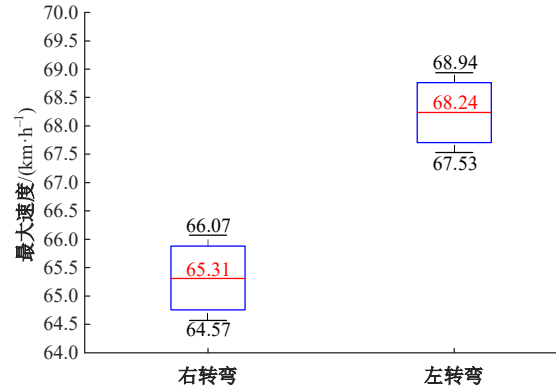


图 3 网联商用车转弯最大速度箱线图

Fig. 3 Box plot of the maximum speed of a commercial vehicle turning

因为有许多不同的因素影响交通流的稳定性,其中一个重要的因素是车型,这是由于不同车型在机动性、加速能力、制动能力、体型等方面的不同所引起的。网联商用车的体型越大,跟驰距离一般就越长,车流密度就越小,随着网联商用车渗透率的增加,那么车流密度会变得不稳定,格子密度会由于网联商用车的影响出现分散程度大的情况。针对车流密度分散程度大的问题,本文提出了密度离散度效应概念,将网联商用车跟驰特性对最优速度的影响纳入改进的运动方程,如下所示:

$$\partial_t(\rho_j v_j) = \frac{a\rho_0}{\sin\theta_j} V \left( \rho_{j+1} + \lambda \frac{1}{n} \cdot \sum_{l=1}^n |\rho_{j+1+l} - \bar{\rho}_{j+1}| \right) - a\rho_j v_j \quad (7)$$

式中: $\bar{\rho}_{j+1} = \sum_{s=1}^n \rho_{j+1+s} / n$  为考虑前方  $n$  个格子的平均密度; $\lambda \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n |\rho_{j+1+l} - \bar{\rho}_{j+1}|$  为密度离散度效应项; $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$  为密度离散度的反应系数。

当密度离散度项减小时,则优化速度增大,表明前方邻近的局部车流稳定和车辆行驶安全水平高,车辆可以加速行驶;反之,当密度离散度项增大,则优化速度减小,表明前方邻近的局部车辆不稳定和车辆行驶安全水平低,车辆应当减速行驶,符合实际交通情况,当  $\lambda=0$  且不考虑弯道因素时,模型可退化为 Nagatani 模型<sup>[6]</sup>。

V2X 环境下车辆获得前方格子密度信息的过程中,必然存在信息传输延迟,针对在 V2X 环境下交通信息在传输过程存在的通信延迟问题,考虑了信息传输延迟时间内的流量差对车流稳定性的影响,所以基于式(7)提出 DDITD 模型:

$$\partial_t \rho_j + \frac{\rho_0}{\sin \theta_j} (\rho_j v_j - \rho_{j-1} v_{j-1}) = 0 \quad (8)$$

$$\partial_t (\rho_j v_j) = \frac{a \rho_0}{\sin \theta_j} V \left( \rho_{j+1} + \lambda \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n |\rho_{j+1+l} - \bar{\rho}_{j+1}| \right) - a q_j + \beta a (q_{j+1} - q_{j+1}(t - \tau)) \quad (9)$$

式中:  $\tau$  为信息传输延迟时间, 大小等于  $a$  的倒数;  $\beta a (q_{j+1} - q_{j+1}(t - \tau))$  为信息传输延迟项;  $\beta (0 \leq \beta \leq 1)$  为信息传输延迟项的反应系数。

此时, 优化速度函数为:

$$V(\rho_j) = \frac{0.8 f_{\text{t}} \sqrt{ugR}}{2} \left[ \tanh \left( \frac{2}{\rho_0} \left( \frac{\rho_j}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_c} \right) + \tanh \left( \frac{1}{\rho_c} \right) \right) \right] \quad (10)$$

将式(9) Taylor 展开且忽略非线性项, 处理后可得:

$$\partial_t (\rho_j v_j) = \frac{a \rho_0}{\sin \theta_j} \left( V(\rho_{j+1}) + \lambda V'(\rho_{j+1}) \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left| \rho_{j+1+l} - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \rho_{j+1+s} \right| \right) - a q_j + \beta a (q_{j+1} - q_{j+1}(t - \tau)) \quad (11)$$

通过消去模型中的速度  $v_j$ , 可得密度的演化方程为:

$$\partial_t^2 \rho_j + \beta a^2 (2\rho_{j+1}(t - \tau) - \rho_{j+1}(t - 2\tau) - \rho_{j+1}) + \frac{a \rho_0^2}{\sin^2 \theta_j} (V(\rho_{j+1}) - V(\rho_j)) + \frac{a \rho_0^2}{\sin^2 \theta_j} \lambda \left( V'(\rho_{j+1}) \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left| \rho_{j+1+l} - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \rho_{j+1+s} \right| - V'(\rho_j) \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left| \rho_{j+l} - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \rho_{j+s} \right| \right) + a \partial_t \rho_j = 0 \quad (12)$$

通过考虑弯道路段特性、网联商用车跟驰特性以及信息因素, 重新建立守恒和运动方程组, 得到 DDITD 模型。根据 DDITD 模型推导演化方程, 有助于后文理论分析和仿真验证。

## 2 线性稳定性分析

为了研究 DDITD 模型对小扰动的抵抗能力, 基于 DDITD 模型, 利用线性稳定理论方法求出其稳定时的条件, 探讨参数  $\beta$ 、 $\lambda$  和  $n$  对模型稳定性的影响。

设定态解为:

$$\rho_j(t) = \rho_0, \quad v_j(t) = V(\rho_0) \quad (13)$$

加入小扰动  $y_j(t)$ , 则有:

$$\rho_j(t) = \rho_0 + y_j(t) \quad (14)$$

将密度方程(12)引入式(13)(14)后, 并将方程线性化得:

$$\partial_t^2 y_j + \beta a^2 (2y_{j+1}(t - \tau) - y_{j+1}(t - 2\tau) - y_{j+1}) + \frac{a \rho_0^2}{\sin^2 \theta_j} V'(\rho_0) (y_{j+1} - y_j) + \frac{a \rho_0^2}{\sin^2 \theta_j} \lambda V'(\rho_0) \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left| y_{j+1+l} - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n y_{j+1+s} \right| - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left| y_{j+l} - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n y_{j+s} \right| \right) + a \partial_t y_j = 0 \quad (15)$$

式中:  $V'(\rho_0) = dV(\rho)/d\rho|_{\rho=\rho_0}$

展开  $y_j(t) = \exp(ijk + zt)$ , 并代入式(15), 得到关于  $z$  的方程:

$$z^2 + az + \beta a^2 e^{ik} (2e^{-z\tau} - e^{-2z\tau} - 1) + \frac{a \rho_0^2}{\sin^2 \theta_j} V'(\rho_0) (e^{ik} - 1) + \frac{a \rho_0^2}{\sin^2 \theta_j} \lambda V'(\rho_0) \frac{1}{n} \cdot \left( \sum_{l=1}^n e^{ikl+ik} - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n e^{iks+ik} \right) - \left( \sum_{l=1}^n e^{ikl} - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n e^{iks} \right) = 0 \quad (16)$$

展开  $z = ikz_1 + (ik)^2 z_2 + \dots$ , 并代入式(16), 可得:

$$z_1 = -\frac{\rho_0^2}{\sin^2 \theta_j} V'(\rho_0) \quad (17)$$

$$z_2 = \frac{\rho_0^4 V'^2(\rho_0) (\beta - 1)}{a \sin^4 \theta_j} - \frac{\rho_0^2 V'(\rho_0) (n + 2\lambda(n - 1))}{2n \sin^2 \theta_j} \quad (18)$$

根据稳定性理论, 若  $z_2 < 0$ , 则初始均匀的车流在长波模式下展现出不稳定; 若  $z_2 > 0$ , 则系统保持原有的稳定状态。故  $z_2 = 0$  对应 DDITD 模型的临界稳定条件:

$$a = \frac{2n \rho_0^2 V'(\rho_0) (\beta - 1)}{\sin^2 \theta_j (n + 2\lambda(n - 1))} \quad (19)$$

对于长波模式下的微扰情况, 当下面的条件成立, 则说明交通处于稳定状态。

$$a > \frac{2n \rho_0^2 V'(\rho_0) (\beta - 1)}{\sin^2 \theta_j (n + 2\lambda(n - 1))} \quad (20)$$

当  $\beta = 0$  且  $\lambda = 0$  时, 得到与 Zhou 等<sup>[29]</sup> 提出模型(以下简称“Zhou 模型”)一致的稳定性判据, 即:

$$a > -\frac{2\rho_0^2 V'(\rho_0)}{\sin^2 \theta_j} \quad (21)$$

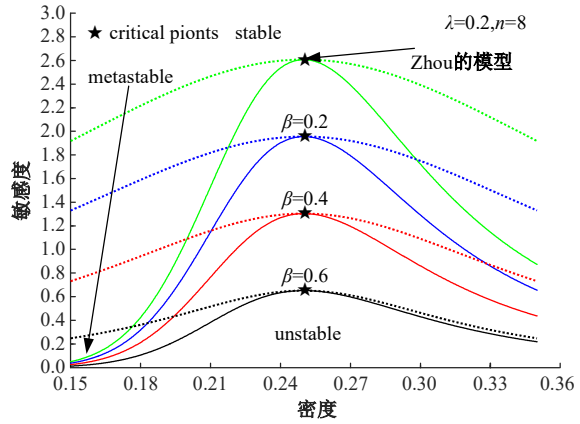
图 4 给出了  $\beta=0.2, 0.4, 0.6, \lambda=0.2, 0.4, 0.6, n=6, 8, 10$  时, 密度-敏感系数  $(\rho, a)$  相空间的不同状态。其中, stable 为稳定状态、unstable 为不稳定状态、metastable 为亚稳定状态, critical points 为临界点。由图 4 可知, 信息传输延迟项的反应系数  $\beta$ 、密度离散度的反应系数  $\lambda$  以及前方格子数  $n$  的增大均会引起相图中临界点的降低, 车流在稳定态的区域面积在扩展, 表明考虑信息传输延迟、密度离散度以及前方车辆数的程度越大, 越容易使交通流系统进入稳定状态。这是由于引入的密度离散度项和信息传输延迟项, 缓解了车流密度离散程度大和信息延迟带来的影响。与 Zhou 模型 ( $\beta=0, \lambda=0$ ) 相比较, DDITD 模型的稳定区域较大, 说明考虑密度离散度信息和延迟信息的作用可以稳定交通流。需要注意的是, 即使向前增加考虑的格子数目使得稳定区域更大, 但随着考虑的格子数目增加, 稳定交通流的作用越来越小。

依据 DDITD 模型的中性稳定曲线:  $a = 2n\rho_0^2 V'(\rho_0)(\beta - 1) / (\sin^2 \theta_j(n + 2\lambda(n - 1)))$ , 图 5 给出临界敏感度  $a_c$  分别与参数  $\beta, \lambda$  以及  $n$  之间的关系。由图 5 可知, 随着参数  $\beta, \lambda$  以及  $n$  的增大, 临界敏感度  $a_c$  逐渐减小, 系统的稳定区域扩大, 这是由于密度离散度影响因子和信息传输延迟影响因子对稳定交通流有积极的作用效果。另外, 注意到 Zhou 模型的临界敏感度  $a' = -2\rho_0^2 V'(\rho_0) / \sin^2 \theta_j$ , 因  $0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1, n > 0$ , 故有  $a_c < a'_c$ , 临界敏感度的关系即可说明 DDITD 模型的稳定区域明显比 Zhou 模型的稳定区域大, 这与前面的分析结果一致。

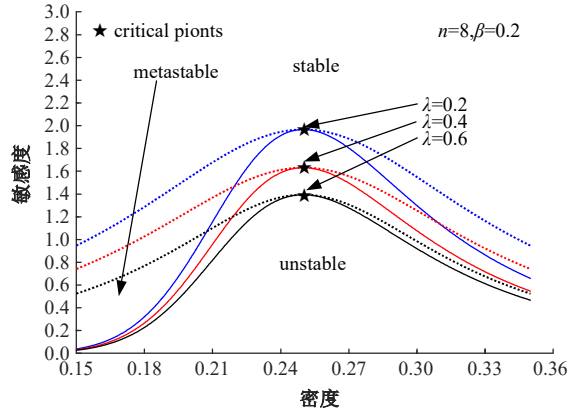
通过线性稳定性分析得到模型的稳定性条件, 刻画了临界敏感度  $a_c$  分别与参数  $\beta, \lambda$  以及  $n$  之间的关系。在线性分析时, 认为高阶项作用极小, 所以省略了, 但是在临界稳定条件附近, 高阶项可能会带来意想不到的作用效应。因此, 需要对模型进行非线性稳定性分析, 以揭示高阶项的作用。

### 3 非线性分析

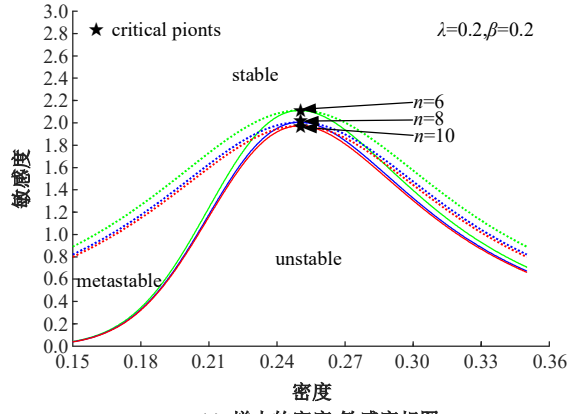
为揭示高阶项的作用, 并探讨 DDITD 模型交通流密度波的演化特征, 采用约化摄动法对



(a)  $\beta$  增大的密度-敏感相图



(b)  $\lambda$  增大的密度-敏感相图



(c)  $n$  增大的密度-敏感相图

图 4 密度-敏感相图

Fig. 4 Density-sensitivity phase diagram

DDITD 模型作非线性研究, 求出 mKdV 方程扭结-反扭结密度波解的一般表达式。

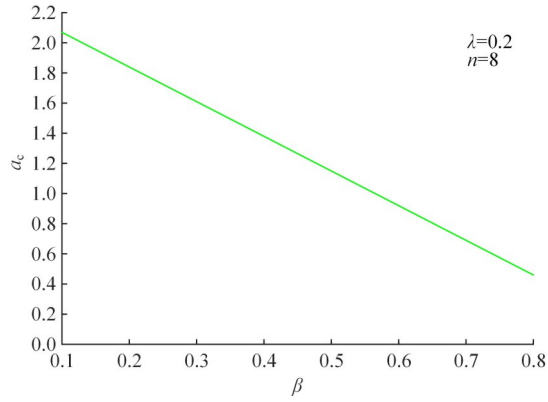
引入小量  $0 < \epsilon \leq 1$ , 在临界点  $(\rho_c, a_c)$  附近考虑慢变量  $X$  和  $T$ , 定义如下:

$$X = \epsilon(j + bt), T = \epsilon^3 t \quad (22)$$

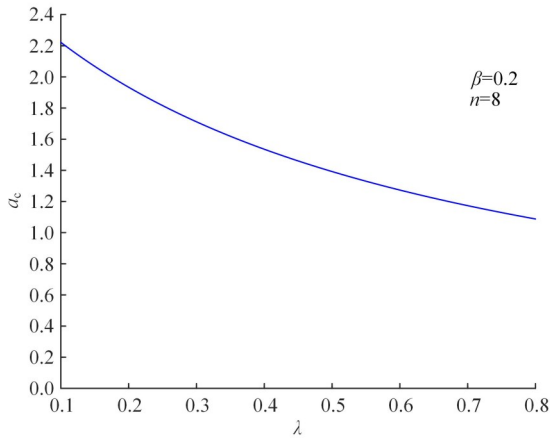
式中:  $b$  为待定参数。

令第  $j$  个格子的密度为:

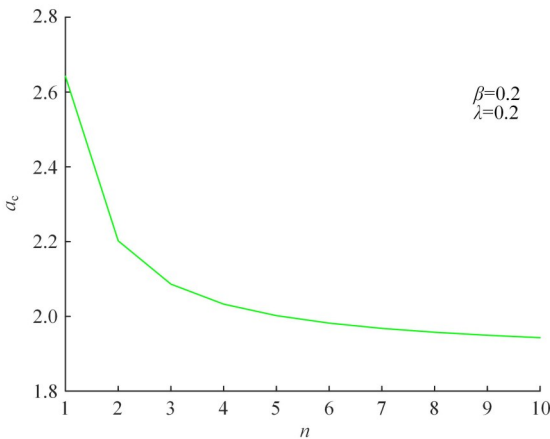
$$\rho_j(t) = \rho_c + \epsilon R(X, T) \quad (23)$$



(a) 临界敏感度  $a_c$  与  $\beta$  的变化关系



(b) 临界敏感度  $a_c$  与  $\lambda$  的变化关系



(c) 临界敏感度  $a_c$  与  $n$  的变化关系

图 5 临界敏感度  $a_c$  分别与参数  $\beta$ 、 $\lambda$  以及  $n$  的变化关系

Fig. 5 Relationship between critical sensitivity  $a_c$  and parameters  $\beta$ ,  $\lambda$  and  $n$ , respectively

把慢变量及格点  $j$  密度代入式(10), Taylor 展开至  $\epsilon$  的 5 次幂后得到非线性偏微分方程(24), 其中  $V' = V'(\rho_c) = [dV(\rho_c)/dt]_{\rho=\rho_c}$ ,  $V''' = V'''(\rho_c) = [d^3V(\rho_c)/dt^3]_{\rho=\rho_c}$

$$\begin{aligned} & \epsilon^2 \left( ab + \frac{a\rho_c^2 V'}{\sin^2 \theta_j} \right) \partial_x R + \epsilon^3 \left( \frac{nb^2(1-\beta)}{n+2\lambda(n-1)} + \right. \\ & \left. \frac{a\rho_c^2 V'}{2\sin^2 \theta_j} \right) \partial_x^2 R + \epsilon^4 \left[ a\partial_T R + \frac{a\rho_c^2 V'''}{6\sin^2 \theta_j} \partial_x R^3 + \right. \\ & \left. \beta \left( \frac{b^3}{a} - b^2 + \frac{a^3 \rho_c^2 V'}{6\sin^2 \theta_j} \right) \partial_x^3 R \right] + \epsilon^5 \left\{ (2b-2b\beta) \cdot \right. \\ & \left. \partial_x \partial_T R + \frac{a\rho_c^2}{\sin^2 \theta_j} \left( \frac{RV'''}{2} (\partial_x R)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{R^2 V'''}{4} \partial_x R \right) + \frac{a\rho_c^2 \lambda}{\sin^2 \theta_j} \left( n + \frac{n^2}{2} - 13 \right) \cdot \right. \\ & \left. V' \partial_x R \partial_x^2 R + \left[ \beta \left( \frac{b^3}{a} - \frac{b^2}{2} - \frac{7b^4}{12a^2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{a\rho_c^2 V'}{24\sin^2 \theta_j} \right] \partial_x^4 R \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

在临界点  $(\rho_c, a_c)$ ,  $a = a_c(1 - \epsilon^2)$ , 取  $b = -\frac{\rho_c^2 V'(\rho_c)}{\sin^2 \theta_j}$ , 可消去式中  $\epsilon^2$  和  $\epsilon^3$  项, 最后得:

$$\epsilon^4 (\partial_T R - g_1 \partial_x^3 R + g_2 \partial_x R^3) + \epsilon^5 (g_3 \partial_x^2 R + g_4 \partial_x^4 R + g_5 \partial_x^2 R^3) \quad (25)$$

各项系数分别为:

$$g_1 = -\beta \left( \frac{b^3}{a_c^2} - \frac{b^2}{a_c} + \frac{a_c^2 \rho_c^2 V'}{6\sin^2 \theta_j} \right) \quad (26)$$

$$g_2 = \frac{\rho_c^2 V'''}{6\sin^2 \theta_j} \quad (27)$$

$$g_3 = \frac{nb^2(1-\beta)}{n+2\lambda(n-1)} \quad (28)$$

$$g_4 = \left[ \frac{2b\beta(\beta-1)}{a_c} \left( \frac{b^3}{a_c^2} - \frac{b^2}{a_c} + \frac{a_c^2 \rho_c^2 V'}{6\sin^2 \theta_j} \right) + \beta \left( \frac{b^3}{a_c^2} - \frac{b^2}{2a_c} - \frac{7b^4}{12a_c^3} \right) + \frac{\rho_c^2 V'}{24\sin^2 \theta_j} \right] \quad (29)$$

$$g_5 = \left( \frac{2b(\beta-1)\rho_c^2 V'''}{6\sin^2 \theta_j} + \frac{3\rho_c^2 V'''}{4\sin^2 \theta_j} \right) \quad (30)$$

为获得标准的 mKdV 方程, 对式(25)做如下变换:

$$T' = g_1 T, R = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} R' \quad (31)$$

从而获得含有  $o(\epsilon)$  项的 mKdV 方程:

$$\partial_T R' - \partial_x^3 R' + \partial_x R'^3 + \epsilon M[R'] = 0 \quad (32)$$

式中:

$$M[R'] = \frac{1}{g_1} \left[ g_3 \partial_X^2 R' + g_4 \partial_X^4 R' + \frac{g_1 g_5}{g_2} \partial_X^6 R' \right] \quad (33)$$

忽略式(32)中的  $o(\epsilon)$  项,该式化为标准的 mKdV 方程,其扭结-反扭结解为:

$$R'_0(X, T') = \sqrt{c} \tanh \left[ \sqrt{\frac{c}{2}} (X - cT') \right] \quad (34)$$

为得到式(34)中扭结波的传播速度  $c$ ,  $R'_0(X, T')$  需要满足以下条件:

$$(R'_0, M[R']) = \int_{-\infty}^{+\infty} dX R'_0 M[R'] = 0 \quad (35)$$

这里,  $M[R'_0] = M[R_0]$ , 通过对式(35)积分, 将得到扭结-反扭结波的传播速度为:

$$c = \frac{5g_2 g_3}{2g_2 g_4 - 3g_1 g_5} \quad (36)$$

最终推出 mKdV 方程的扭结-反扭结解为:

$$\rho_j(t) = \rho_c + \sqrt{\frac{g_1 c}{g_2} \left( \frac{a_c}{a} - 1 \right)} \tanh \sqrt{\frac{c}{2} \left( \frac{a_c}{a} - 1 \right)} \times \left[ j + (1 - c g_1) \left( \frac{a_c}{a} - 1 \right) t \right] \quad (37)$$

此外,密度波的振幅  $A$  为:

$$A = \sqrt{\frac{g_1 c}{g_2} \left( \frac{a_c}{a} - 1 \right)} \quad (38)$$

密度波的解反映出交通存在共存相,该共存曲线可以用  $\rho = \rho_c \pm A$  表示,如图4中虚线所示,这意味着交通流被分为3个区域,包括稳定、亚稳定和不稳定区域。线性分析和非线性分析结果表明,密度离散度效应和信息传输延迟效应能有效提高交通稳定性。

## 4 数值仿真

为了论证密度离散度效应和信息传输延迟效应能够有效地抑制交通拥堵,使交通系统保持稳定状态。首先,对 DDITD 模型的交通演化进行数值仿真;然后,通过收敛性分析可以得到信息传输延迟项的反应系数  $\beta$ 、密度离散度的反应系数  $\lambda$  以及前方格点数  $n$  与交通稳定性的相关关系。通过不同参数的仿真结果比较,说明了密度离散度效应和信息传输延迟效应的有效性。

为了方便仿真,将式(12)改写成差分形式:

$$\rho_j(t + 2\tau) = \rho_j(t + \tau) - \beta(2\rho_{j+1}(t - \tau) - \rho_{j+1}(t - 2\tau) - \rho_{j+1}) -$$

$$\frac{\rho_0^2 \tau}{\sin^2 \theta_j} (V(\rho_{j+1}) - V(\rho_j)) - \frac{\rho_0^2 \lambda (V(\rho_{j+1}) - V(\rho_j))}{n \sin^2 \theta_j} \cdot \left( \sum_{l=1}^n \left| \rho_{j+1+l} - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \rho_{j+1+s} \right| - \sum_{l=1}^n \left| \rho_{j+l} - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \rho_{j+s} \right| \right) \quad (39)$$

对式(39)进行数值模拟,仿真的目的是检查 DDITD 模型在均匀交通流状态下抵抗小扰动的能力。仿真过程采用的周期性边界条件为:

$$\rho_j(0) = \rho_j(1) = \begin{cases} \rho_0, & j \neq \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1 \\ \rho_0 - \Delta\rho, & j = \frac{N}{2} \\ \rho_0 + \Delta\rho, & j = \frac{N}{2} + 1 \end{cases} \quad (40)$$

在仿真过程中,  $\Delta\rho = 0.05$ ,  $\tau = 0.1$ ,  $\rho_c = \rho_0 = 0.25$ ,  $v_{\max} = 2$ ,  $f_{rt} = 0.84$ ,  $f_{lt} = 0.88$ ,  $f_{cv} = 0.8$ ,  $R = 800$ ,  $u = 0.3$ ,  $g = 9.8$ ,  $N = 100$ 。为保证弯道区域的行车安全,弧度  $\theta_j$  受安全条件约束,所以设  $\theta_j = \pi/6$ 。

仿真采用控制变量法进行研究,测试信息传输延迟项的反应系数  $\beta$ 、密度离散度的反应系数  $\lambda$  以及前方格点数  $n$  是否都具有提高交通流稳定性的作用。图6、图7及图8是  $t = 1551000$  时步后的局域密度时空演化图。其中,图6的参数为  $\lambda = 0.2$ ,  $n = 8$ ,  $\beta = 0, 0.2, 0.4, 0.6$ ; 图7的参数为  $\lambda = 0.2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $n = 3, 6, 8, 10$ , 图8的参数为  $\beta = 0.2$ ,  $n = 8$ ,  $\lambda = 0, 0.2, 0.4, 0.6$ 。由图6~图8可知,车流处于不稳定状态,出现向上游传播的时走时停密度波;随着  $\lambda$ 、 $\beta$ 、 $n$  的增大,车流逐渐趋于稳定,这是由于密度离散度项和信息传输延迟项能够缓解车流的不稳定状态,当  $\lambda = 0.6$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $n = 8$  时,交通系统车辆的密度均匀分布在最佳密度附近,基本处于稳定均匀流状态(见图8(d))。

为了更清楚地展示信息传输延迟项的反应系数  $\beta$ 、密度离散度的反应系数  $\lambda$  以及前方格点数  $n$  对密度波产生的影响,本文将密度时空演化图的格子密度分布情况做进一步展示。图9、图10以及图11给出了  $t = 1551000$  时步分别对应图6、图7以及图8的密度剖面图。从图9、图10以及图11可以直观地看出,DDITD 模型的扰动密度波振幅

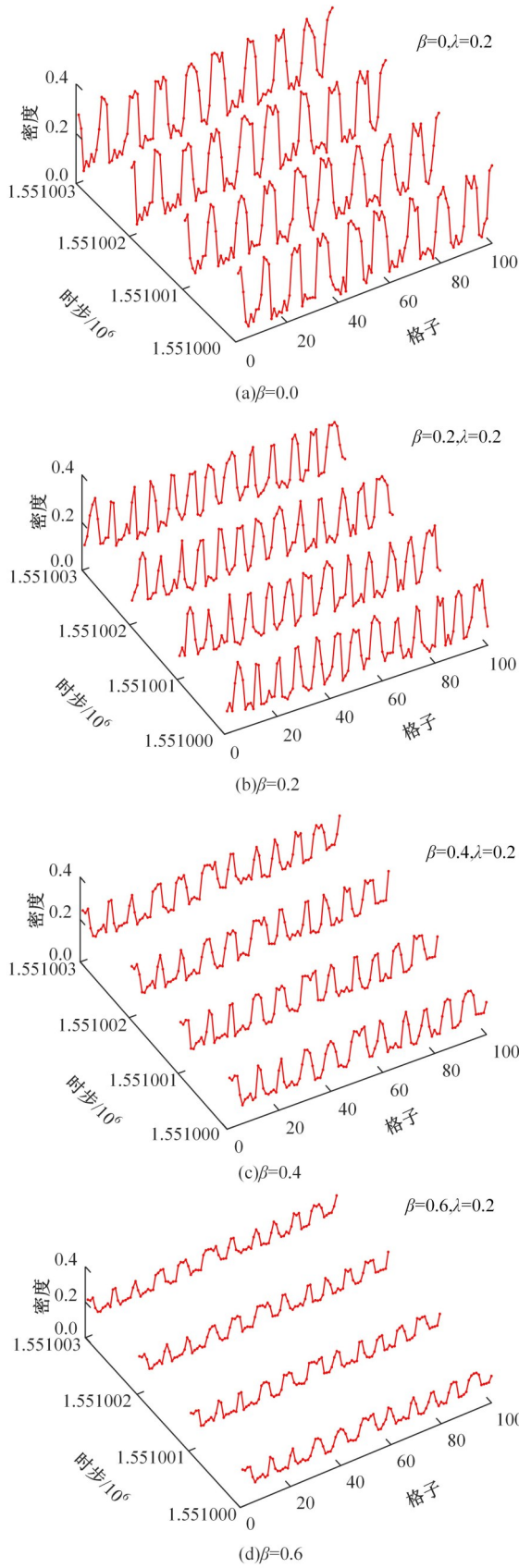


图 6  $t=1\,551\,000$  时步后的局域密度时空演化图  
Fig. 6 Local density of space-time evolution figure after  $t=1\,551\,000$  time step

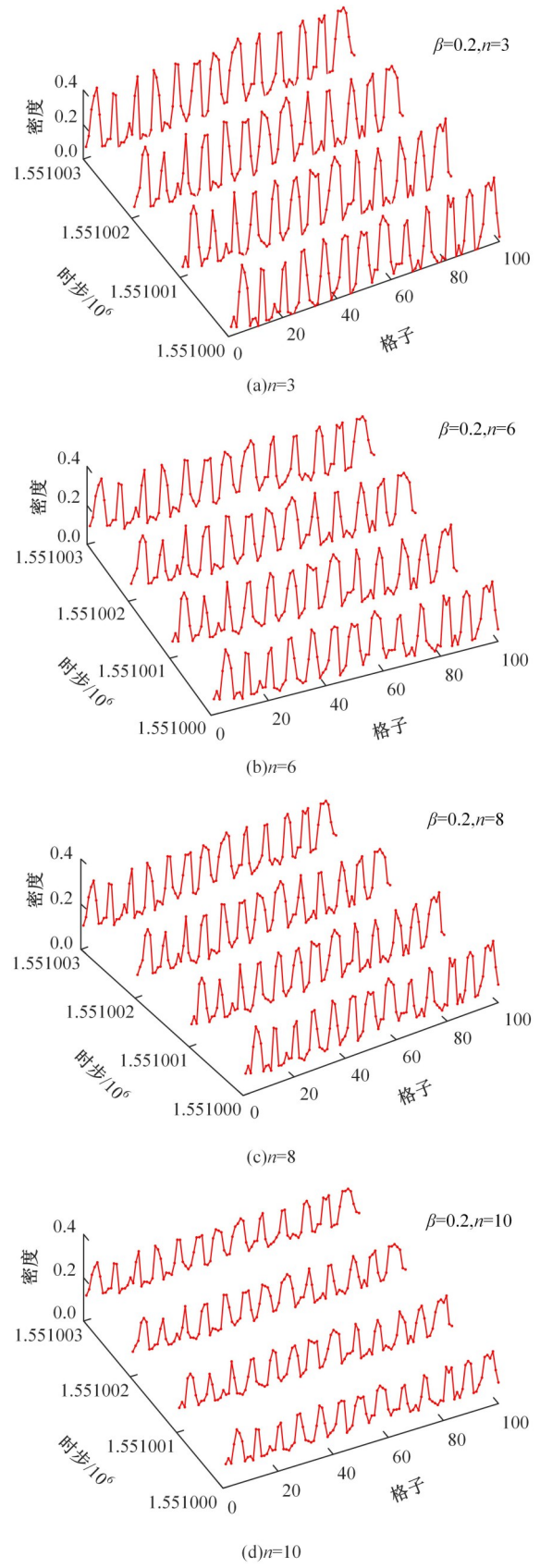


图 7  $t=1\,551\,000$  时步后的局域密度时空演化图  
Fig. 7 Local density of space-time evolution figure after  $t=1\,551\,000$  time step

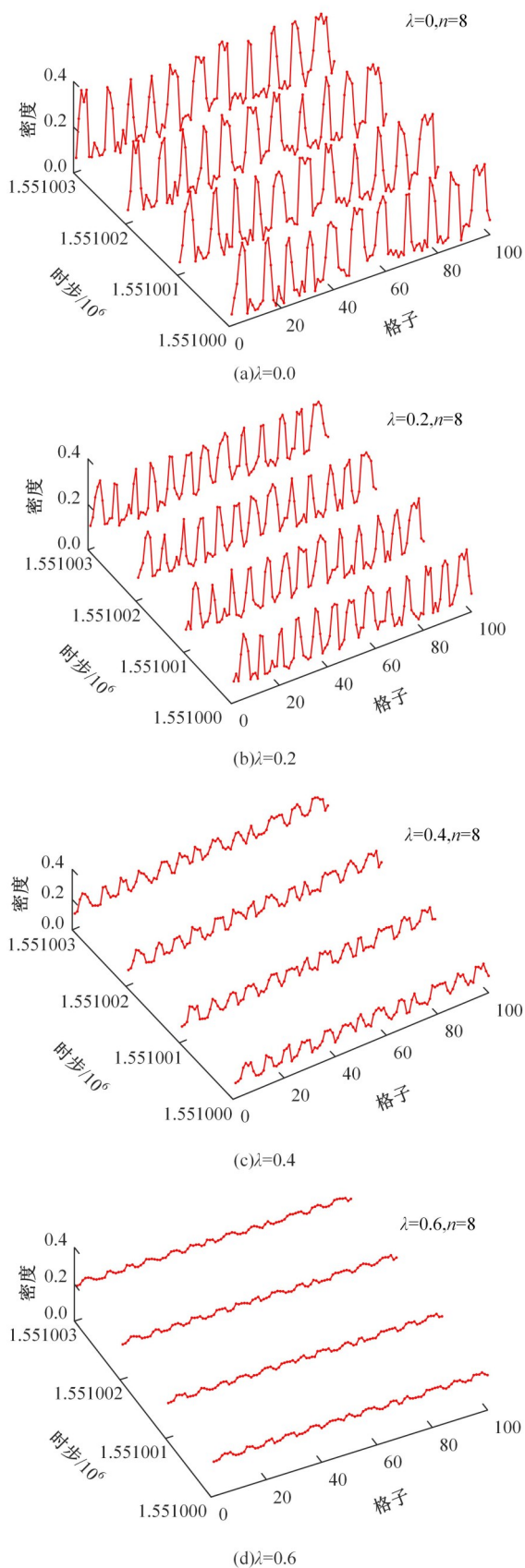


图 8  $t=1\ 551\ 000$  时步后的局域密度时空演化图  
 Fig. 8 Local density of space-time evolution figure after  $t=1\ 551\ 000$  time step

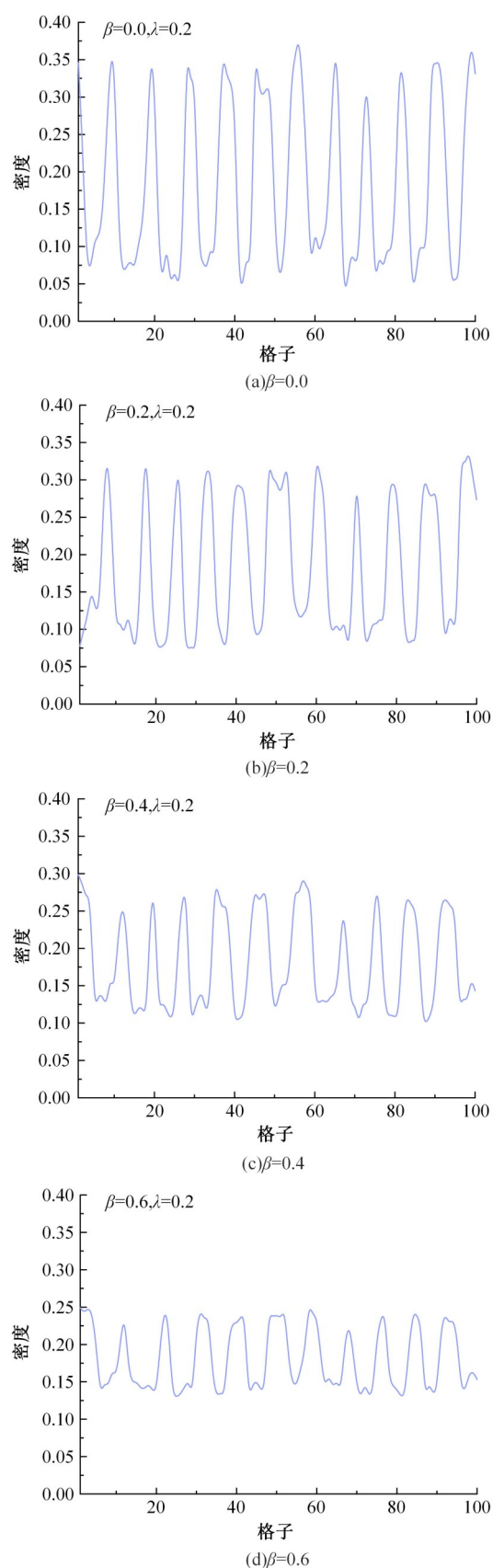


图 9  $t=1\ 551\ 000$  时步的密度剖面图  
 Fig. 9  $t=1\ 551\ 000$  time step density profile

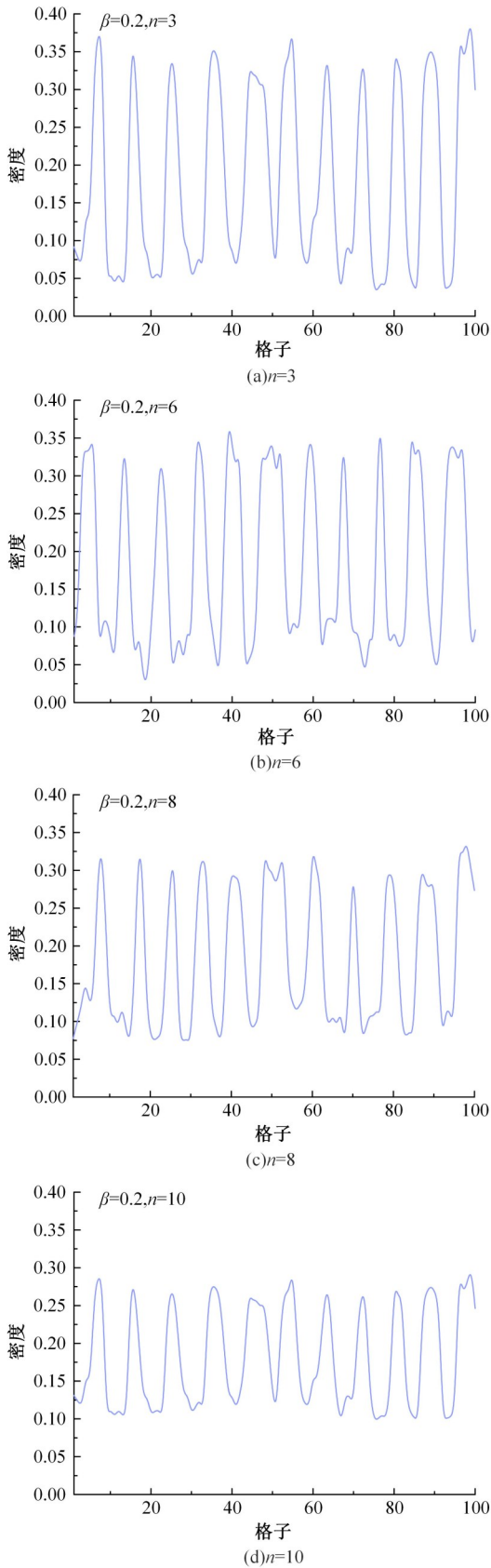


图 10  $t=1\,551\,000$  时步的密度剖面图

Fig. 10  $t=1\,551\,000$  time step density profile

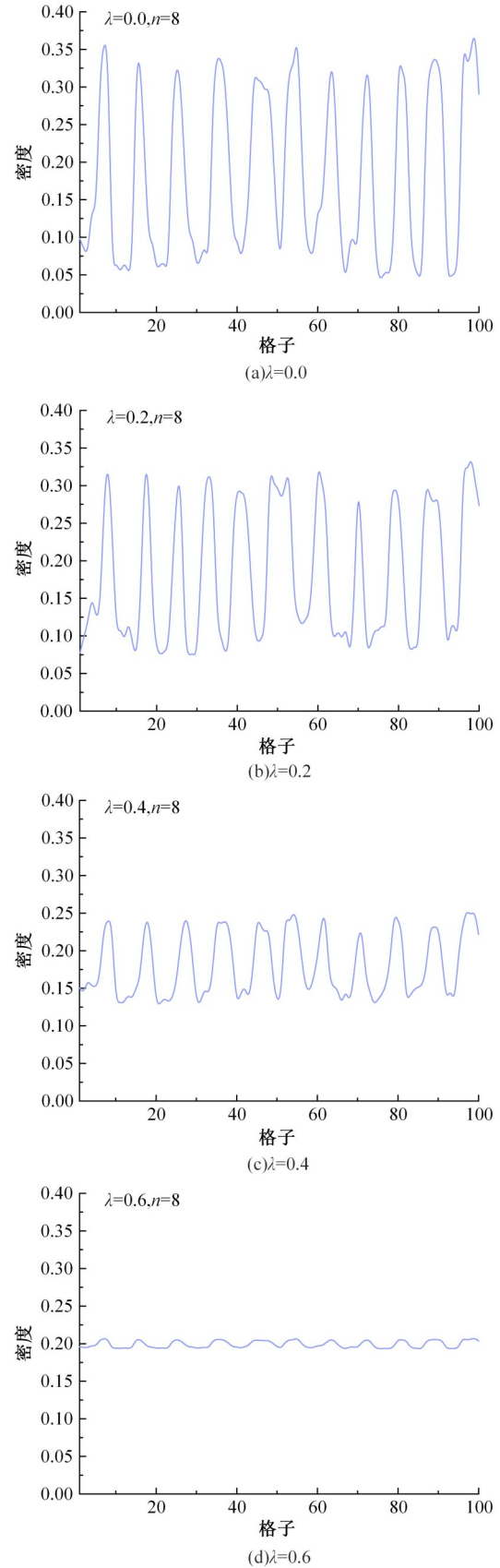


图 11  $t=1\,551\,000$  时步的密度剖面图

Fig. 11  $t=1\,551\,000$  time step density profile

随着 $\lambda, \beta$ 值的增大明显下降,  $n$ 值越大, 密度波振幅下降速度就越缓慢, 趋于一个极限值, 这表明存在最优的 $n$ 值。结合图 6(c)可知, 考虑前方 3 个格子的密度信息反馈可以使交通流系统稳定性达到最优化。当 $\lambda=0.6, \beta=0.2, n=8$ 时, 加入系统的微扰随长时间的演化, 其所产生的影响变得极其微弱。以上分析表明, 引入的密度离散度因素和信息传输延迟因素在一定程度上可以改善交通拥塞状况, 稳定车流, 符合上文的理论分析。

通过分析交通流的滞后性, 可以进一步反映密度离散度效应和信息传输延迟效应对交通流稳定的影响。图 12 描绘了密度与相邻时刻的密度差所组成的磁滞回环(模拟第 50 个格子), 其面积大小可表示交通系统的稳定性。图 12 显示, 当 $\lambda=0.2, \beta=0, n=3$ 时, 迟滞环面积最大, 而随着 $\lambda, \beta, n$ 的增大, 迟滞环面积呈缩小趋势, 这是由于信息传输延迟项和密度离散度项能够缓解交通滞后性的程度。同时, 观察图 12(f)可知, 当 $\lambda=$

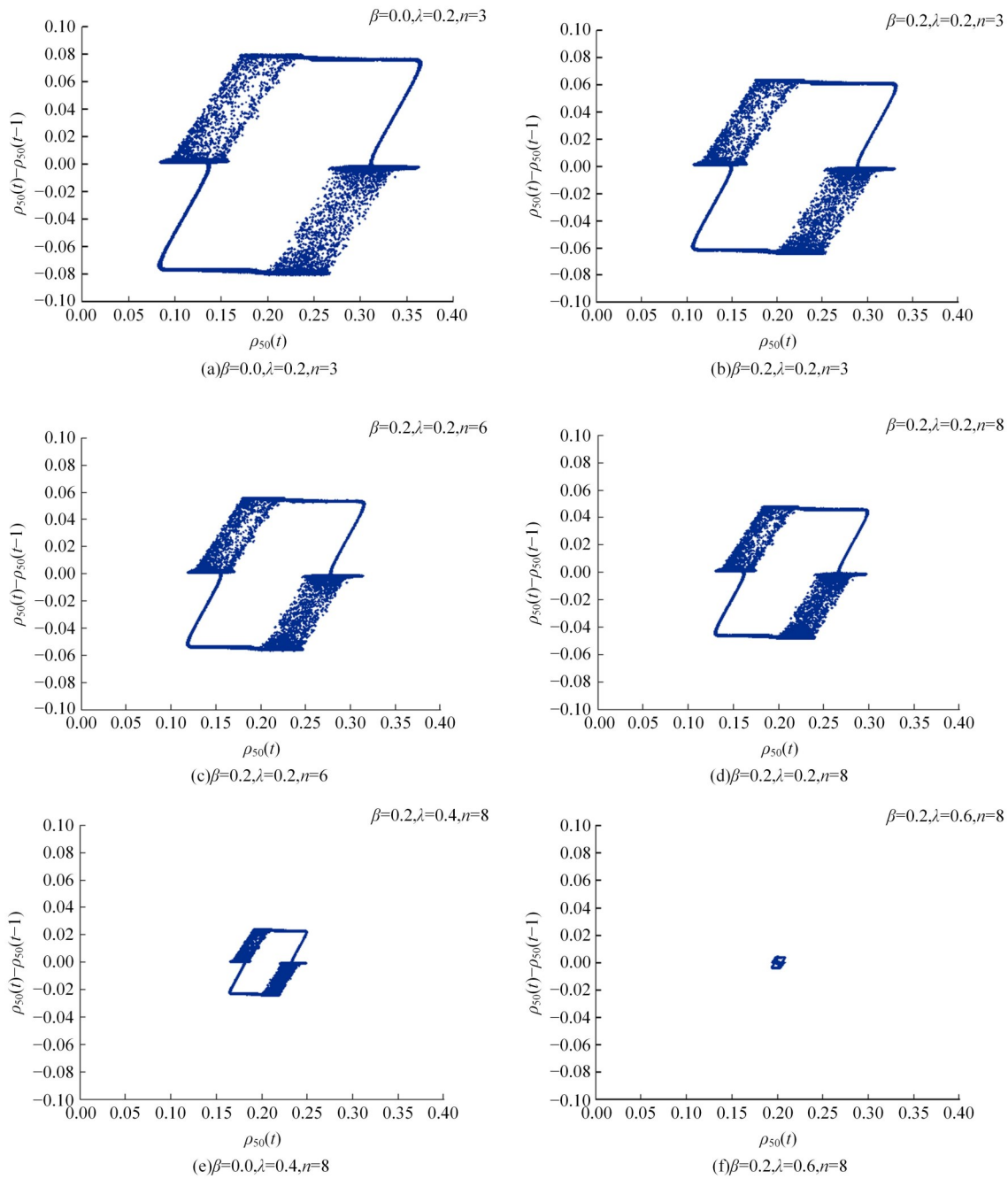


图 12 不同  $n, \beta, \lambda$  值下的迟滞环

Fig. 12 Hysteresis under different values of  $n, \beta$  and  $\lambda$

0.6、 $\beta=0.2$ 、 $n=8$ 时,迟滞环仍具有一定尺寸,但面积已然很小。说明此时交通滞后性已相当微弱,交通流已基本达到稳定状态。该结论与演化方程的曲线图一致。

从数值仿真结果看,在密度离散度和信息传输延迟程度较轻的情况下,弯道产生的持续扰动对交通系统有很大影响。交通系统不稳定,瞬时误差会被放大,对交通的运行效率和安全产生负面影响。本文提出的密度离散度效应和信息传输延迟效应能够有效抑制交通拥堵,保持交通系统处于稳定状态,提高交通运行的效率和安全性。

## 5 结 论

基于传统的弯道模型,通过引入密度离散度项和信息传输延迟项,建立了DDITD模型,并对DDITD模型的弧度值进行安全约束,以保证弯道区域的行车安全。DDITD模型描述的交通系统要比Zhou模型所描述的交通系统具备更高的抗失稳能力。数值模拟与理论分析结果完全相符,均表示引入的密度离散度项和信息传输延迟项可一定程度上增强交通系统的稳定性。

(1)在弯道场景下,针对混合车流中网联商用车的影响,考虑网联商用车的跟驰特性,创新性地提出密度离散度效应。基于格子流体力学模型表征前方多个格子密度分布的离散情况,构建了密度离散度效应,探究了网联商用车对交通流稳定性的影响机制。

(2)提出了密度离散度效应的概念,揭示了网联商用车跟驰特性对混合车流密度分布的影响。本文基于弯道环境下的格子流体力学模型,综合考虑网联商用车特性和信息传输延迟影响,得到前车密度离散度项和信息传输延迟项,建立了DDITD交通流模型以抑制交通堵塞,理论分析证明合理设置信息传输延迟项的反应系数 $\beta$ 、密度离散度的反应系数 $\lambda$ 以及前方格点数 $n$ ,可以使交通流很容易地达到稳定运行状态。数值仿真证明了理论分析的有效性和优越性,同时也证明了DDITD模型可以有效地抑制交通堵塞。

(3)开展实车试验,使用搭载多种传感器的智能网联商用车进行数据收集,对DDITD模型中提出的转弯系数 $f_{\text{H}}$ 和 $f_{\text{L}}$ 进行标定,使DDITD模型刻画的弯道环境下混合车流演化规律更加符合真实交通状况。

## 参考文献:

- [1] 陈龙,刘孟协,蔡英凤,等.车路协同环境下考虑坡度与前车信息的跟驰模型[J].东南大学学报:自然科学版,2022,52(4):787-795.  
Chen Long, Liu Meng-xie, Cai Ying-feng, et al. Car-following model considering road gradient and preceding vehicle information in vehicle-infrastructure cooperation environment[J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2022, 52(4): 787-795.
- [2] 谢济铭,彭博,秦雅琴.基于换道概率分布的多车道交织区元胞自动机模型[J].交通运输系统工程与信息,2022,22(3):276-285.  
Xie Ji-ming, Peng Bo, Qin Ya-qin. Cellular automata model of multi-lane weaving area based on lane-changing probability distribution[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2022, 22(3): 276-285.
- [3] Zhang H M. Driver memory, traffic viscosity and a viscous vehicular traffic flow model[J]. Transportation Research Part B, 2003, 37(1): 27-41.
- [4] Nagatani T. Jamming transition of high-dimensional traffic dynamics[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 1999, 272(3/4): 592-611.
- [5] Wang T, Gao Z, Zhang J, et al. A new lattice hydrodynamic model for two-lane traffic with the consideration of density difference effect[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 75(1): 27-34.
- [6] Nagatani T. Modified KdV equation for jamming transition in the continuum models of traffic[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 1998, 261(3/4): 599-607.
- [7] Ge H X, Cheng R J. The "backward looking" effect in the lattice hydrodynamic model[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2008, 387(28): 6952-6958.
- [8] Peng G H, Cai X H, Cao B F, et al. Non-lane-based lattice hydrodynamic model of traffic flow considering the lateral effects of the lane width[J]. Physics Letters A, 2011, 375(30/31): 2823-2827.
- [9] Wang T, Gao Z Y, Zhao X M, et al. Flow difference effect in the two-lane lattice hydrodynamic model [J]. Chinese Physics B, 2012, 21(7): No. 070507.
- [10] Gupta A K, Redhu P. Analysis of a modified two-lane lattice model by considering the density difference effect[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, 19(5): 1600-1610.

- [11] Peng G. A new lattice model of two-lane traffic flow with the consideration of optimal current difference [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, 18(3): 559-566.
- [12] Nagatani T. Jamming transitions and the modified Korteweg-de Vries equation in a two-lane traffic flow [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 1999, 265(1/2): 297-310.
- [13] Nagatani T. Jamming transition in a two-dimensional traffic flow model[J]. *Physical Review E*, 1999, 59(5): No. 4857.
- [14] Nagatani T. TDGL and MKdV equations for jamming transition in the lattice models of traffic[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 1999, 264(3/4): 581-592.
- [15] Cao J L, Shi Z K. A novel lattice traffic flow model on a curved road[J]. *International Journal of Modern Physics C*, 2015, 26(11): No. 1550121.
- [16] Kaur R, Sharma S. Analysis of driver's characteristics on a curved road in a lattice model[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2017, 471: 59-67.
- [17] Kaur R, Sharma S. Modeling and simulation of driver's anticipation effect in a two lane system on curved road with slope[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2018, 499: 110-120.
- [18] Cheng R, Wang Y. An extended lattice hydrodynamic model considering the delayed feedback control on a curved road[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2019, 513: 510-517.
- [19] Wang Z, Zhu W X. Modeling and stability analysis of traffic flow considering electronic throttle dynamics on a curved road with slope[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2022, 597: No. 127225.
- [20] Redhu P, Gupta A K. Delayed-feedback control in a Lattice hydrodynamic model[J]. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2015, 27(1/3):263-270.
- [21] Peng G, Yang S, Zhao H. A delayed-feedback control method for the lattice hydrodynamic model caused by the historic density difference effect[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2018, 509: 855-860.
- [22] Peng G, Yang S, Xia D, et al. Delayed-feedback control in a car-following model with the combination of V2V communication[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2019, 526: No. 120912.
- [23] Zhang Y, Wang S, Pan D, et al. Stability analysis for a new lattice hydrodynamic model with time-varying delay in sensing traffic flux[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2021, 561: No. 125269.
- [24] 罗春莉. V2X环境下基于交通信息协同传输的优化建模与能耗控制[D]. 桂林:广西师范大学物理科学与技术学院, 2023.  
Luo Chun-li. Optimization modeling and energy consumption control based on traffic information collaborative transmission under V2X environment[D]. Guilin: College of Physical Science and Technology, Guangxi Normal University, 2023.
- [25] 贾特提. V2X环境下基于协同信息传输延迟的交通系统优化建模与能耗控制[D]. 桂林:广西师范大学物理科学与技术学院, 2023.  
Jia Te-ti. Optimal modeling and energy consumption control of traffic system based on cooperative information transmission delay under V2X environment[D]. Guilin: College of Physical Science and Technology, Guangxi Normal University, 2023.
- [26] 贾洪飞, 隗志才, 魏丽英. 饱和流率的部分影响因素修正系数的标定[J]. *吉林大学学报: 工学版*, 2000, 30(2): 99-102.  
Jia Hong-fei, Juan Zhi-cai, Wei Li-ying. Calibration to the revision coefficients of some factors affecting saturation flow rate[J]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2000, 30(2): 99-102.
- [27] 王宪彬, 施树明, 裴玉龙. 面向网联商用车行驶工况优化设计的高速公路工况识别[J]. *中国公路学报*, 2022, 35(6): 355-362.  
Wang Xian-bin, Shi Shu-ming, Pei Yu-long. Identification of expressway driving cycles for optimization of commercial vehicle driving cycles[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2022, 35(6): 355-362.
- [28] 唐易, 刘诗昆, 刘恒. 基于多源数据的高速公路交通运行特征与治堵策略研究:以深圳市机荷高速为例[J]. *交通与运输*, 2022, 35(S1): 132-138.  
Tang Yi, Liu Shi-kun, Liu Heng. Research on traffic operation characteristics of expressway and control strategy of traffic congestion based on multi-source data: Taking Shenzhen Jihe Expressway as an example [J]. *Traffic & Transportation*, 2022, 35(Sup. 1): 132-138.
- [29] Zhou J, Shi Z K. Lattice hydrodynamic model for traffic flow on curved road[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 83: 1217-1236.