

魏虹羽,李世超,王伟安.地球动力学数值模拟算法的应用现状与展望.吉林大学学报(地球科学版),2025,55(1):98-124.  
doi:10.13278/j.cnki.jjuese.20240106.

Wei Hongyu, Li Shichao, Wang Weian. Current Status and Future Prospects of Numerical Simulation Algorithms in Geodynamics. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 2025, 55(1): 98 - 124. doi: 10.13278/j.cnki.jjuese.20240106.

# 地球动力学数值模拟算法的应用现状与展望

魏虹羽,李世超,王伟安

吉林大学地球科学学院,长春 130061

**摘要:**当前,数值模拟技术已成为探究地球动力学过程的重要手段。本文综述了数值模拟在地球动力学研究中的应用现状、主要算法和代码并探讨了发展前景。数值模拟通过对连续方程组进行离散化,并利用数值算法求解,从而高效模拟地质过程,预测地球系统的动态变化。本文系统阐述了有限元法、有限差分法、边界元法和有限体积法等主流数值方法的原理、特点和适用条件;并重点探讨了有限元法在构造应力场和断层动力学模拟中的应用、有限差分法在地震波传播模拟中的应用、边界元法和有限体积法在断层力学和孔隙流体流动模拟中的应用。通过对比分析不同方法的优缺点,揭示了多种数值方法耦合是未来地球动力学数值模拟的重要发展方向;随着高性能计算技术的进步和大数据时代的到来,数值模拟技术将在地球系统科学研究中发挥越来越重要的作用。

**关键词:**数值模拟;地球动力学;地质建模;数值方法;地球系统;有限元法;多物理场耦合模拟

doi: 10.13278/j.cnki.jjuese.20240106

中图分类号:P541

文献标志码:A

## Current Status and Future Prospects of Numerical Simulation Algorithms in Geodynamics

Wei Hongyu, Li Shichao, Wang Weian

College of Earth Science, Jilin University, Changchun 130061, China

**Abstract:** Numerical simulation technology has emerged as a crucial tool for exploring geodynamic processes. This paper reviews the current applications of numerical simulations in geodynamics, focusing on key methods, algorithms, and codes, with outlining future development prospects. By discretizing continuous equations and employing numerical algorithms, these simulations efficiently model geological processes and predict dynamic changes in the Earth's system. The paper systematically discusses the principles, characteristics, and applicable conditions for mainstream numerical methods, including the

收稿日期:2024-05-12

作者简介:魏虹羽(1996—),女,硕士研究生,主要从事矿产普查与勘探方面的研究,E-mail:weihiy21@mails.jlu.edu.cn

通信作者:李世超(1980—),男,教授,博士,博士生导师,主要从事构造地质学方面的研究,E-mail:lsc@jlu.edu.cn

基金项目:国家自然科学基金项目(41872234)

Supported by the National Natural Science Foundation of China (41872234)

finite element method, finite difference method, boundary element method, and finite volume method. It explores the finite element method for simulating tectonic stress fields and fault dynamics, the finite difference method for seismic wave propagation, and the boundary element and finite volume methods for fault mechanics and pore fluid flow. A comparative analysis highlights the strengths and weaknesses of each method, indicating that coupling various numerical methods is a key future direction in geodynamics. Furthermore, this paper anticipates the growing significance of numerical simulation technology in Earth system scientific research, propelled by advancements in high-performance computing and the era of big data.

**Key words:** numerical simulation; geodynamic; geological modeling; numerical methods; Earth system; finite element method; multiphysics coupling simulation

## 0 引言

地球动力学是研究地球内部和表面动力过程及其相互作用的科学,涉及地质学、地球物理学、地球化学等多个学科领域。近年来,随着计算机技术和数值模拟方法的快速发展,地球动力学数值模拟已经成为认识和理解地球动力过程的重要途径。利用数值模拟方法可以在不同时空尺度上模拟地球动力过程,为探索地球内部结构、物质运动和能量转换提供了新的视角和途径。

数值模拟技术在地球动力学多个领域得到了广泛应用。在地质学领域,数值模拟被应用于研究岩石变形、断层滑移和流体运移等问题<sup>[1-3]</sup>;在地球化学领域,数值模拟被应用于研究元素迁移、化学反应和流体-岩石相互作用等问题<sup>[4-6]</sup>;在地球物理学领域,数值模拟被应用于研究地幔对流、板块运动、地磁场演化、地震波传播、震源机制和地震灾害预测等问题<sup>[7-9]</sup>。

尽管地球动力学数值模拟如今已经取得了巨大进展,但仍然面临着诸多挑战。首先,地球动力过程涉及从微观的原子尺度到宏观的行星尺度等多个时空尺度,如何在不同尺度之间进行耦合和跨尺度模拟仍然是一个难题<sup>[10]</sup>;其次,地球物质的材料特性复杂多变,如何准确描述岩石圈本构关系和流变学行为也是一个挑战<sup>[11-12]</sup>;此外,如何有效地整合不同来源的观测数据,并用于约束和验证数值模型,也是一个亟待解决的问题。但影响数值模拟方法的有效性和模拟效率的最大挑战是数值模拟方法的选择。

近年来,地球动力学数值模拟算法取得了长足进展。高性能计算技术的发展使得大规模并行计算成为可能,也极大地提高了数值模拟的效率和精

度<sup>[13]</sup>。与此同时,各种新的数值方法也不断涌现,如自适应有限元法、多重边界元法、Crank-Nicolson方法等,为解决复杂的地球动力学问题提供了更多选择。

本文综述地球动力学数值模拟算法的最新进展和应用现状,重点针对地球动力学数值模拟中主流数值计算方法的最新进展,阐述其原理、特点和适用条件,以及这些方法在地质学、地球物理学、地球化学等领域的应用。同时,也简要介绍了目前流行的成熟模拟软件/代码,为地球动力学数值模拟的应用提供参考。

## 1 数值模拟基本概念

数学建模通过一组由偏微分方程和特定边界条件以及初始条件搭建起来的数学模型,定量模拟地球动力学中的复杂地质过程,比如模拟地壳和地幔在地质时间尺度上的缓慢变形。这些变形过程通常伴随着热传输、地球深部的相变、复杂的流变学行为、熔融和熔体迁移、化学反应以及固体运动等现象。

要求解数学模型,首先需要通过前期实验获取相应的数据,设定模型的初始条件和边界条件参数;然后根据具体问题选择合适的数值方法求解相应的地球物理过程。虽然解析解可以提供精确的结果,但由于模型的复杂性,许多情况下无法通过解析解得到答案。因此,我们使用计算方法和计算机来获得近似解。随着计算机硬件技术的不断进步,计算机底层运算方式的改变也促进了数值模拟算法的改进,更快、更精确的算法不断产生,这使得数值模拟可以解决更为复杂的地质问题。

数值模拟算法使我们能够利用先进的计算机技术来模拟和分析现实世界中各种复杂的地质作用过

程。搭建数值模型的步骤如下:①确定物理参数。收集或测量模拟系统中的关键物理量。②建立物理模型。根据物理现象构建对应的物理模型。③建立数学模型。将物理模型转化为数学模型,通过微分方程描述物理量随时间和空间的变化,并定义边界条件和初始条件。④校准模型准确性。通过与观测数据的比较,对模型进行校正以提高其准确性。⑤选择合适的数值模拟算法。根据问题的性质和需求,选择合适的数值方法。⑥构建对应的数值代码。将连续的数学方程转换为离散方程,便于数值求解。⑦求解。利用计算机程序对离散方程进行求解。⑧可视化。对数值模拟的结果进行可视化,以便分析和解释。数值模拟算法本质上是一系列指令。

相对于上述步骤中数值模拟算法的选择,我们更关心模拟结果的准确性,需要注意的是,模型的简化程度、理想化数学模型的选择、求解离散方程时离散质量的差异、迭代方法是否充分等因素都有可能导致计算结果精确度发生变化。因此,对数值模拟算法的选择分析和解释都需要仔细考量,比如通过采取更精确的插值近似或将近似应用于更小的域来减少离散化误差等。在数值计算方法的选择上,有限元法、有限差分法和有限体积法是目前广泛应用于建模领域的主流方法。谱方法在复杂几何处理上存在局限性,但也被用于特定情况下的三维建模,比如需要高精度解的中小规模问题。边界元法和离散元法则常用于地球动力学建模,尤其是在处理非均质介质和复杂边界条件时有较大优势。从理论层面考虑,当计算网格足够精细时,不同的数值方法都应当收敛于相同的解。但在实际运用过程中,由于计算资源和时间的限制,研究者仍需要根据具体的研究问题和条件选择最为合适的数值方法。这就要求研究者对各种数值方法的理论基础、适用条件以及计算效率有深入地理解。

## 2 理论基础

### 2.1 控制方程

地球动力学中建立模型一般基于质量、动量和热量三大守恒方程,根据这三大守恒方程揭示速度、压力和温度等变量的值,以及它们如何随时间演变和如何在空间中变化。由于地球动力学领域研究问题的时间尺度通常在数千年到数百万年,所以建模过程中通常将地球内部视为黏性流体,采用斯

托克斯方程描述高黏性流体在引力场驱动下的运动。

质量守恒方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1)$$

式中: $\rho$ 为密度; $t$ 为时间; $\mathbf{v}$ 为速度向量。式(1)表明了任何给定的材料体积内流入/流出质量随时间的局部变化。

当然根据研究问题的具体情况,上述质量守恒方程也会进行相应的调整。如假设物质不可压缩,或者考虑地球为黏弹性(局部质量变化与地球整体质量通量对比可以忽略不计)时,方程应进行简化来匹配具体的研究问题。

动量守恒方程:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = 0. \quad (2)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量; $\mathbf{g}$ 为重力加速度矢量。对于地幔对流和长期构造模型来说,其他物体力相较于重力可以忽略不计,所以只考虑重力即可。在岩石圈尺度的研究中, $\mathbf{g} = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ 。

能量守恒方程:

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) - \nabla \cdot (k \nabla T) = \rho H + S. \quad (3)$$

式中: $C_p$ 为等压热容( $p$ 为压力); $T$ 为温度; $k$ 为导热系数; $H$ 为体积产热项; $S$ 为其他热源。热能量随时间的变化可以由几个不同的过程引起。 $\rho C_p \partial T / \partial t$ 项对应的是对流热输运,即热能随物质运动的输运。它取决于物质运动的速度 $v$ ,以及温度和热能在空间中的变化( $\nabla T$ )。热也通过传导传递,以 $\nabla \cdot (k \nabla T)$ 表示。当导热系数 $k$ 较大或以梯度 $\nabla T$ 表示的温度变化更陡时,热量扩散更多。如果模型中不包含额外的加热过程,可以将 $\rho C_p$ 简化为常数。

上述三大守恒方程需要针对具体模型的物理过程进行选择,以便得出更符合实际的模拟结果<sup>[14]</sup>。

### 2.2 流变学

除上述守恒方程外,我们还需要对固体地球对外力的响应做出假设,通过本构方程将材料性质与守恒方程的变量(温度等)联系起来。其中流变性对岩石圈和地壳的模型至关重要,它体现了外部施加板块驱动力区域模型中应力与变形之间的关系。不同研究问题需要不同的流变学性质。如岩石的非弹性变形在长时间尺度上的变化过程在模拟中一般视

为高黏性流体的非弹性变形,通过 Stokes 方程来描述。物理模型通常可以充分解释地球内部与地幔对流和观测有关的许多过程。但也有一些与流体无关的过程,如板块构造、涉及应变局部化和强滞后等。这些流变学超出了黏性流体的基本假设,包括塑性屈服、应变、应变速率减弱和硬化。因此如何解决黏性流体的假设也是建模时需要考虑的问题。常见流变学过程如下。

黏弹性形变流变学过程:

$$\eta_{\text{viscoelastic}} = (\dot{\epsilon}_{\parallel})^{\frac{1-n}{n}} A^{-\frac{1}{n}} \exp\left(\frac{E + PV}{nRT}\right). \quad (4)$$

式中: $\eta_{\text{viscoelastic}}$  为黏滞系数; $A$  为指前因子; $E$  为活化能; $V$  为活化体积; $R$  为气体常数; $\dot{\epsilon}_{\parallel}$  为应变率张量二阶不变量; $n$  为应力指数。

塑性形变流变学过程:

$$\eta_{\text{plastic}} = \frac{\sigma_{\text{yield}}}{2 \dot{\epsilon}_{\parallel}}; \sigma_{\text{yield}} = C_0 + p \sin(\varphi_{\text{dry}}) \lambda. \quad (5)$$

式中: $\eta_{\text{plastic}}$  为黏滞系数; $\sigma_{\text{yield}}$  为屈服应力; $C_0$  为内聚力; $\varphi_{\text{dry}}$  为内摩擦角; $\lambda$  为比例因子,用于调整屈服应力与平均主应力之间的关系。

地壳和地幔内较短时间尺度过程的建模应考虑弹性性质,低温条件下岩石会产生脆性或塑性变形,由此导致的剪切带等研究问题需要考虑黏-弹-塑性特性。其他复杂地质变化过程需要在基础方程上增加相应依赖项,使方程能够准确描述物理过程。具体推导过程及解析可参考经典地球动力学教科书<sup>[15]</sup>。

### 3 数值计算方法

在现实生活中,宏观运动和微观运动均基于物质和能量的基本性质。因此数值模拟的第一步就是搭建相应的物理模型(一组方程)来描述对应物理或者化学变化。对于简单的物理模型,通常使用解析解和半解析解进行求解。然而,在地球动力学研究领域,所研究的问题往往涉及较为复杂的时空关系和多物理场耦合。为了与现实相符合,搭建模型方程时需要根据需求增加多个依赖关系式,由此产生的复杂方程需要选择合适的数值模拟算法来求解。

#### 3.1 有限元法

有限元法用于解决由偏微分方程描述或可表述为泛函最小化问题的方法。研究域通常被表示为有限元素的集合。有限元中近似函数是根据所寻找物理场的节点值来确定的。将一个连续的物理问题

转化为具有未知节点值的离散有限元问题。

有限元法具有以下特性:

1) 高精度近似。有限元法可以通过简单的近似函数提供较高的近似值,通过变分原理或加权余值技术构建的有限元方程,确保了数学模型与物理现象的一致性,这种方法的精确度可以通过增加元素数量或提高近似函数的阶数来提高。误差为  $O(h^{m+1-s})$ , 其中  $h$  为元素尺寸,  $m$  为近似函数的多项式阶数,  $s$  为平滑指数。

2) 收敛性高。有限元法可系统化为矩阵形式运算,适合计算机编程。当前计算机水平已经可以处理多物理场耦合的复杂情况,随着有限元法的不断改良,通过网格加密和细化策略,已开发出不需要特殊处理振荡项和内节点性质的针对 2D 弹性问题的自适应有限元法<sup>[16]</sup>。在特定条件下,有限元解或其导数在某些特殊点上可能表现出超过标准误差估计的精确性。这种现象被称为超收敛性,它在实际计算中已被广泛观察到,并从理论上得到了研究和证明<sup>[17-18]</sup>。

3) 灵活性和适应性。有限元法在几何形状、边界条件等不同的情况下有很高的灵活性和通用性,可以选用任意形状的单元,且可以针对不同的物理问题选用不同的单元拓扑结构。最简单单元是两个节点的一维单元,同时也可以设置成三角单元或者四面体。此外,有限元法不限制场函数满足的方程类型,延展性强,不会局限于某一特定问题。

有限元法是目前最常见的数值方法,广泛应用于应力分析、热分析、流体动力学、电磁学和多物理场耦合等问题中。

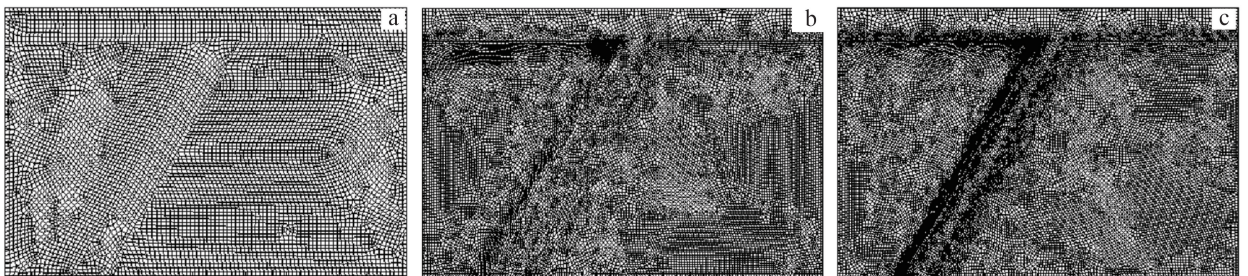
最早 17 世纪,Newton 等<sup>[19]</sup>确立了积分运算的全局可加性质。18 世纪,Gauss 引入了加权残差法和线性代数系统的解决方案。Galerkin 于 1915 年提出了一种选择位移函数中形函数的方法,即著名的 Galerkin 方法,该方法后来被广泛应用于有限元法<sup>[20]</sup>。Hrennikoff<sup>[21]</sup>首次将有限元法应用于求解弹性力学问题,探索一维杆中应力,这是有限元法应用的开端。Courant<sup>[22]</sup>于 1943 年首先在定义域内局部采用位移函数来表示未知函数的方法,尽管当时计算机尚未出现,没有得到广泛关注,但这一方法实质上奠定了有限元法的基础。Turner 等<sup>[23]</sup>于 1956 年首次提出在二维单元中利用单元刚度矩阵分析构建整体结构刚度矩阵的程序。Clough<sup>[24]</sup>在

1960 发表的论文中首次引进了“有限元”的概念,并在这篇论文中将有限元法应用到了土木工程领域。到 20 世纪 60 年代,有限元法几乎可被应用于所有连续介质力学所涉及的领域。我国冯康教授<sup>[25]</sup>《基于变分原理的差分格式》一书的发表代表着有限元的概念首次在中国提出,奠定了中国有限元法的基础。随着越来越多的数学家参与到有限元法的研究工作中,有限元法逐步脱离了针对无法解决复杂工程问题的局限性,取而代之的是统一的观点和严密的数学描述,使这种方法被更多科学家接受并广泛应用于各种实际问题中。

20 世纪 60 年代末,有限元法被地学界采用进行构造解析,并因为其独特优势被广泛应用于地学的各项领域中。70 年代中期开始,中国地学界也开始采用有限元数值模拟技术,使得科学家能够创建精细的地质构造模型,以便更直观地洞察构造应力场的动态特性及演化路径,并对未来的演变趋势进行科学预测。尤其随着计算机处理速度显著地提升,数值模拟技术实现了跨越式发展。各项领域的科研工作者可以执行更为复杂和精确的二维或三维数值模拟,得到更精确的研究成果。

在地质构造方面,臧绍先等<sup>[26]</sup>通过有限元法分析俯冲板块不同参数变化对俯冲带负浮力及其变化过程的影响,揭示了俯冲过程中负浮力的动态变化特性。石耀霖等<sup>[27]</sup>针对活动海岭俯冲进行数值模拟研究,利用有限元法对该地区进行了热模拟,结果表明岛弧一定深度下摩擦剪切生热会形成地温反转,该过程对岛弧火山活动具有重要影响。刘亚静等<sup>[28]</sup>采用二维黏弹性数值模拟技术,深入研究了俯冲带深部的应力场特性,试验结果表明采用适当的俯冲板块黏度参数时,橄榄石和尖晶石相变界面下

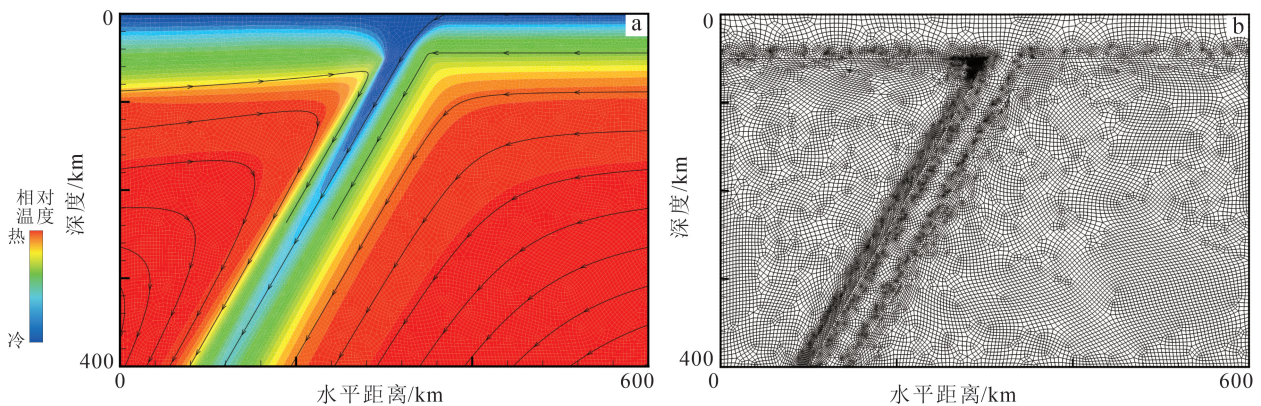
方低黏度区两侧会出现应力集中区,相变过渡区等效黏度对应力场的影响不大。唐湘蓉等<sup>[29]</sup>采用连续介质有限元数值模拟法,运用弹性理论和岩石力学性质,研究裂缝发育带的宏观平面分布,为裂缝预测提供了新的研究思路。沈海超等<sup>[30]</sup>利用有限元分析方法讨论了断层如何影响地应力场,分析过程中需要考虑多个因素,例如模型需要设置合适的断层力学特性参数(弹性模量、泊松比等)、断层介质的力学属性参数、断层的几何形状设置以及边界条件设置;研究结果表明,这些参数均在不同程度上影响断层附近的地应力场分布,同时导致地应力大小方向变化。白玉柱等<sup>[31]</sup>模拟逆冲断层在受到垂直于断层走向的应力作用下发生的逆冲构造运动,通过使用摩擦接触单元,并在模型中将断层面设计成曲面的几何形态,更精确地模拟断层错动导致的应力分量场改变以及地表在垂直走向和垂直地表上的变化。Davies 等<sup>[32]</sup>提出了一种自适应有限元法,改进地球动力学中以对流为主的俯冲带问题的模拟质量。这种自适应有限元法在模拟过程中可以根据误差自动调整网格(图 1),提高研究领域流动特征的分辨率。这种自适应网格变化由自动非结构化的网格生成器、有限元流求解器以及基于插值的局部误差估计器实现。Davies 等在实验中验证了该方法可以有效提高洋脊和俯冲带模拟的精确度(图 2)。戴黎明等<sup>[33]</sup>通过有限元法讨论亚洲大陆构造变形的主要影响因素,根据当今亚洲大陆的构造现状搭建二维有限元模型,模拟主要活动块体当前的构造应力分布;将模拟结果与 GPS 数据、震源机制解和地质调查数据进行比较,得到主要活动地块应力的分布特征,并对影响构造变形的主要因素进行了讨论分析。袁杰等<sup>[34]</sup>模拟了断层自发破裂的动力学



a. 初始网格; b. 误差指导的网格细化; c. 最终网格。据文献<sup>[32]</sup>。

图 1 自适应有限元法网格在模拟过程中的自适应调整过程

Fig.1 The adaptive adjustment process of adaptive finite element meshes during the simulation



a. 俯冲带模拟得到的稳态热场; b. 最终网格。据文献[32]。

图 2 自适应有限元法模拟俯冲过程

Fig.2 Adaptive finite element method simulation of subduction process

过程,对滑移弱化摩擦关系进行了改进,通过动态数值模拟研究了断层的自发破裂行为;模拟结果表明,相较于经典的滑移弱化关系,经过优化的摩擦关系可以形成脉冲型(pulse-like)的破裂模式。该实验还分析了地震破裂过程中的应力和应变分布,为揭示大地震的破裂机制提供了新的视角。

在地震研究方面,有限元法主要用于地震期间应力场的模拟研究,通过分析地震的相关参数和结果探究地震的成因以及未来预测。王仁等<sup>[35-36]</sup>通过数值模拟技术对华北地区地震迁移规律进行了研究,将华北地区看作多条由主要断裂带组成的地质构造骨架,并在特定深处将模型设置成理想塑性体,通过分析模拟结果对华北地区未来出现强震的可能性作了初步分析;通过模拟实验,计算出在均匀边界外力作用下华北地区发生地震危险的地带,以及近十二年来历次大地震后应力场的变化,并以此总结出了一套反演方法。张郅珍等<sup>[37]</sup>通过有限元法模拟鲁南地区大震的震源应力场,研究地震对区域应力场的影响,结合数值模拟结果与实际情况对比,分析震后应力应变的积累情况,进而对鲁南地区未来地震活动的危险性和可能性进行了评估和预测。梅世蓉等<sup>[38]</sup>利用有限元法对唐山地震的孕震过程进行研究,采用二维 Maxwell 黏弹性模型分析唐山地区地震的前兆异常机制和力学特征,结果表明唐山地区可能由于定常边界力作用,再加上地壳介质的非均匀性,导致弹性应变得以在局部地区长期积累形成震源体。王继存等<sup>[39]</sup>模拟了川滇菱形块的构造应力场,根据实验结果分析讨论了该区域的构造应力状况与强震分布之间的联系,模拟结果

与实测地震数据基本一致,揭示了该地区构造应力分布状况,为强震发生的可能性分布提供了参考。梁海华等<sup>[40]</sup>根据地震震源机制解和壳幔变形理论建立有限元模型,分析了中国境内活动断裂带上大震复发周期的差异性,结合古地震资料进行区域板块边界力反演,以及构造应力产生的弹性应变能分布特征分析;通过分析应变能与板块边界距离的衰减关系,计算得出达到相同应变能所需的累积时间,与已知的断层带大震复发周期进行比较后,得出应力衰减的图像可以有效地解释不同地区大震复发周期的显著差异。Parsons<sup>[41]</sup>利用三维有限元模拟技术研究了1906年旧金山大地震后圣安地列斯断层系统的应力恢复问题。相较于前人,Parsons的模型仅关注断层的构造应力,显示了更为均匀的地壳应力分布。研究结果为理解大地震后应力阴影对后续地震活动的影响提供了新的模拟技术支持,同时提供更为准确的数据参考,对旧金山湾区的未来地震的危险性和可能性进行了评估。朱守彪等<sup>[42]</sup>采用了有限单元法模拟苏门答腊俯冲带大地震的发生过程,通过建立两种描述了影响速率中黏着和滑移摩擦接触运动状态的数学模型,采用时间积分方法对模型求解来保证力学变化的稳定性,模拟结果表明俯冲带上大地震的发生必须满足大规模、均匀介质和相同摩擦系数的区域这3个条件。李平恩等<sup>[43]</sup>利用三维黏弹性有限元模型技术,依据青藏高原巴颜喀拉块体及其周缘地区的地质构造特征搭建深部速度模型,模型设置考虑了巴颜喀拉块体区域地质构造、活动块体、活动断裂带以及边界断裂带的分层。Qu等<sup>[44]</sup>基于库仑破裂应力,利用数值模拟

建立模型,讨论了应力变化与强震之间的关系、强震之间的互相作用,以及长时间的构造加载如何影响强震的发生;模拟结果表明 2011 年日本  $M_w$  9.0 东北地震和 2008 年汶川  $M_w$  7.9 地震对华北地区的地壳构造活动产生了显著影响。Bahuguna 等<sup>[45]</sup>研究了印度板块的板内应力分布,实验采用三维力学模型,设置模型过程中充分考虑了印度次大陆和洋区 19 个地质区域的弹性特性,建模采用 ABAQUS 软件,最终的模拟结果与板块速度一致。Bahuguna 等的研究能够提升地震和地质研究的解释性,建模方法可用于识别地震活跃区域并进一步对地震危险性进行评估,通过解释应变率、变形率和应力分布数据,该研究为印度板块地震活跃区域的活动板内变形提供了新的解释。Karabulut 等<sup>[46]</sup>通过有限元法对 Main Marmara Fault(MMF)进行了三维构造建模,并评估不同网格类型在揭示地震潜力方面的准确性。三维模型数据来源于位于 MMF 周围 GNSS 站点的速度数据,并选择 ANSYS 有限元软件进行模拟,检验使用不同网格类型构建模型的准确性。通过比较模型中断层滑移亏缺值的最低和最高均方根误差,得出了可能的地震矩震级差异在 0.010~0.014 之间。该研究侧重点在于进行有限元分析时选择合适网格类型的重要性,同时实验结果也为地震潜力评估和风险评评估提供了新方法。马峰等<sup>[47]</sup>利用数值模拟方法对雄安新区容城地热田蓟县系碳酸盐岩的热储进行模拟,通过实验验证在不同的采灌条件下热储的温度和压力反应。Xu 等<sup>[48]</sup>提出了一种多尺度扩展有限元法(MS-XFEM),适用于模拟地质构造中多重断裂的传播。该方法通过局部更新基函数来追踪断裂尖端的动态变化,无须额外的自由度,因此有效降低了计算成本。MS-XFEM 通过结合预处理的 GMRES(generalized minimum residual)迭代策略控制最终解的精度,确保断裂路径的正确预测。通过测试结果来看,MS-XFEM 方法能够有效地模拟复杂的断裂模式,即使在较大的误差容限下也能保持较高的预测准确性,为断裂模拟研究提供了一种新的计算方法。Chen 等<sup>[49]</sup>提出了一种在交错断层带中生成层状地质体三维有限元网格的方法。在三维地质建模过程中,断层带空间关系复杂,需要模型具备一定的精确性。该研究通过分析交错断层带中不同网格类型之间的空间关系,提出了一种封闭流形处理方法,并通过该方法建立交错断层带的封闭流形空间网格模型来划分地质

体 3D 网格。

常见有限单元法对比见表 1。

### 3.2 有限差分法

有限差分法是最早的数值模拟算法,具有简单直观的优势,其基本思想就是用泰勒级数展开式在覆盖计算域的网格或节点上,有限差分替换无限微分,利用离散数值集合来近似原有的连续函数场。一般情况下需要对边界条件作特殊处理。该方法在处理规则几何体时优势明显。

有限差分法最早由欧拉(L. Euler)<sup>[50]</sup>在 1768 年提出,用于求解一维问题的差分格式。1908 年,龙格(C. Runge)<sup>[51]</sup>将差分法延展到了二维的问题上。Alterman 等<sup>[52]</sup>于 1968 年提出使用差分算子代替波动方程中的微分项,将波动方程离散化,并成功实现了 2D 层状模型中的弹性波模拟。这一开创性的工作采用显式有限差分法得到了二阶弹性波方程对应的离散数值解。随后学者们对该方法的原理和精度进行了深入分析和研究,并进一步将其推广应用到声波介质和非均匀介质中。1986 年,Virieux<sup>[53]</sup>基于交错网格进行了非均匀介质中 P-SV(pressure-shear)波有限差分模拟,指出基于完全交错网格可将弹性波模拟的方法推广到 S(shear)波速度为零的液体介质,且不需要对液-固界面做特殊处理,并通过解析解对比以及相应的数值模型验证了此结论;Dablain<sup>[54]</sup>指出可以使用二阶中心差分格式的高阶来近似提高模拟精度和效率;Bayliss 等<sup>[55]</sup>推导并实现了空间四阶、时间二阶差分格式下的弹性波正演模拟,同时将四阶格式与二阶格式的精度进行了对比分析;Levander<sup>[56]</sup>基于 Virieux 给出的交错网格推导了精确空间四阶、时间二阶差分算子以及二维 P-SV 波有限差分格式,并指出每个波长内至少需要 5 个网格才能满足精度需求;Jastram 等<sup>[57]</sup>提出了一种垂向变间距的网格格式,增加了灵活性并提高了计算效率;在此基础上,Falk 等<sup>[58]</sup>又提出一种变时间步长的有限差分格式,大大降低了计算成本;Graves<sup>[59]</sup>提出了一种交错网格有限差分技术,并应用于三维弹性介质模型中的地震波传播,提出了具有有效材料参数的三维四阶速度-应力格式,同时介绍了一种内存优化算法,使得在标准工作站上进行大规模三维模拟成为可能。

20 世纪 60 年代后期,有限差分法才被应用到地震波传播的模拟当中,这也是有限差分法最先在地学中应用的开端。1972 年,Boore<sup>[60]</sup>提出了一种

表 1 有限单元法对比  
Table 1 Comparison of finite element methods

求解算法	求解特点	最小时间步长	收敛性	求解时长	求解精度	适用类型
有限元位移法	基于位移的近似,适用于静态和动态问题	不适用静态问题;对于动态问题,取决于问题的时间依赖性	良好,受网格划分和材料属性的影响	中等,受问题的复杂性和网格的大小影响	高,可以通过细化网格进一步提高精度	静态和动态结构分析
有限元力法	基于节点力的近似,适用于静力问题	不适用	良好,受边界条件和结构刚度的影响	短,只考虑静态平衡	高,受限于位移函数的选择	静力分析
有限元混合法	结合位移法和力法,适用于复杂的静态和动态问题	关于动态问题,取决于问题的时间依赖性	良好,受混合策略的影响	长,同时处理位移和力的近似	中等,可通过调整位移和力的近似来提高	复杂的静态和动态结构分析
有限元谱元法	结合有限元和谱方法,适用于波动问题	取决于波动问题的特性	良好	长,需要解决波动方程	高	声学、波动传播分析
有限元-有限体积耦合方法	结合有限元法和有限体积法,适用于多物理场问题	取决于耦合的物理过程	良好,但需要确保耦合界面的准确性	长,涉及多个物理过程	取决于耦合策略和网格划分	流体-结构相互作用(FSD)问题
非线性有限元法	处理材料和几何非线性问题	取决于非线性特性,通常时间步较小	困难,需要迭代求解和收敛检查	长,非线性问题求解复杂	取决于非线性模型的准确性和求解策略	大变形、材料失效分析
动态有限元分析	分析结构在动态载荷下的响应	取决于动态响应的的时间尺度	良好,但对时间步长敏感	长,涉及长时间动态响应	取决于时间步长和网格划分	地震工程、冲击响应分析
热-结构耦合有限元分析	同时考虑热效应和结构响应	取决于热传递和结构响应的的时间尺度	良好,但需要精确的耦合处理	长,涉及热和结构两个领域的求解	取决于热和结构模型的准确性	热应力分析、热机耦合问题
多物理场有限元分析	多个物理过程的相互作用	取决于耦合物理过程的时间尺度	复杂,需要特别的耦合技术和迭代求解	长,涉及多个耦合的物理过程	取决于多物理场模型的准确性和求解策略	电磁-结构耦合、流体-热耦合问题
自适应有限元法	网格自动细化以提高解的准确性	取决于问题的特性和自适应策略	良好,自适应过程旨在提高解的准确性	长,需要多次求解和网格更新	高,自适应过程针对解的不确定性进行细化	复杂几何和不规则解的问题
随机有限元法	处理含有随机变量的问题	不适用静态问题;对于动态问题,取决于问题的时间依赖性	复杂,涉及随机变量的统计特性	长,需要进行多次随机样本的计算	取决于随机变量的分布和样本数量	不确定性量化、随机振动分析
基于纽曼法的隐式时间积分方法	隐式时间积分,需要迭代求解,适用于非线性问题	较大,依赖于问题稳定性要求	良好,需要良好的初始猜测和迭代求解	长,每一步求解可能需要多次迭代	依赖于时间步长和迭代求解的精度	非线性问题,如塑性、大变形等
基于中心差分法的显式时间积分方法	显式时间积分,不需要迭代求解,适用于动态问题	必须足够小以保证数值稳定性,通常与波速和网格尺寸有关	条件收敛,依赖于时间步长的选择	短,每一步求解不需要迭代	依赖于时间步长和网格划分	动态响应分析,如冲击、振动等
扩展有限元法	处理不连续性,如裂纹扩展,不需要重新网格化	取决于问题的时间演化特性	良好,受到断裂路径选择的影响	中等,取决于问题的复杂性和断裂分析的难度	高,尤其是裂纹和裂纹扩展的模拟	断裂力学分析,如裂纹扩展和应力集中问题

有限差分法,并用于模拟在非均质介质中的 P-SV 波传播。该方法在原有 SH (shear horizontal) 波传播模型基础上,通过在离散网格中使用速度和应力进行扩展,验证了稳定性条件与泊松比无关,同时也表明了相同的代码可以用于弹性介质和液体介质,其中 S 波速度为零,且液体-固体界面无须做特殊处理。Kelly 等<sup>[61]</sup>研究如何利用有限差分法生成合成地震图,利用该方法在复杂的地下结构几何和任意源-接收器距离条件下产生合成地震图。该研究不仅提供了对地震图解释的见解,同时也对利用有限差分法模拟过程中各种现象做出了论述,如网格色散、模型边缘的人工反射以及空间和时间采样间隔的选择。Madariaga<sup>[62]</sup>于 1976 年研究了通过数值模拟方法模拟平面圆形摩擦断层模型的动力学,详细讨论了远场辐射,并区分了三个频谱区域:通常的恒定低频水平、受断层尺寸控制的中间区域,以及高频渐近线。由此提出了拐角频率与远场位移脉冲宽度成反比的观点,这为断层尺寸的测量提供了物理依据,断层体大小与前者存在定量关系。高孟潭等<sup>[63]</sup>利用三维有限差分法对北京地区地震动进行了模拟研究,并通过模拟实验讨论了盆地效应对地震动的影响。Virieux<sup>[53]</sup>提出了一种用于模拟非均质介质中 P-SV 波传播的有限差分法,该方法解决了 P-SV 波传播的源建模和表面波 (Rayleigh 波) 建模两个问题。并将该方法的模拟结果与简单解析解进行了比较,验证了方法的有效性,最后展示了在不同泊松比下液体-固体界面的复杂几何形状的模拟结果。Hernlund 等<sup>[64]</sup>基于三维地幔对流模型提出了求解 poloidal 速度势的有限差分法。Igel 等<sup>[65]</sup>于 1992 年首次推导出各向异性介质中交错网格有限差分形式,并在文章中详细讨论了该形式模拟精度及影响因素,这种有限差分法可以实现强各向异性介质中的地震波模拟。Pitarka<sup>[66]</sup>将非均匀间距的网格应用到三维弹性介质中,大大降低了内存消耗,同时提高了三维数据的处理效率。Bohlen 等<sup>[67]</sup>也提出了一种旋转交错网格 (RSG) 有限差分技术,并将这种方法成功应用到各向异性黏弹性介质的地震波模拟中,最终得到了较为准确的模拟结果。

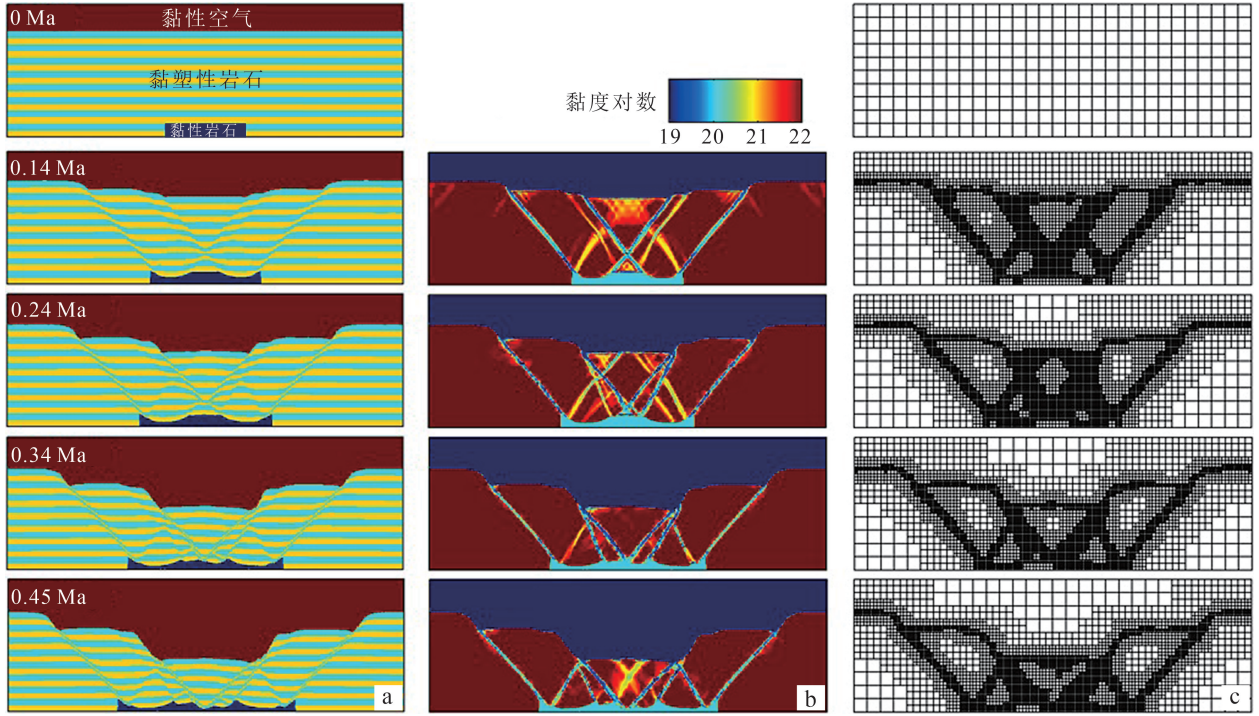
进入 21 世纪,有限差分法在模拟近地表复杂介质方面的应用得到了进一步的发展,研究者开始关注如何在有限差分法框架下处理复杂地表地形的起伏问题。近年来,有限差分法在地学领域的应用继续延展,当前已广泛应用于地震波传播、地下结构分

析、资源勘探等方面。李建平等<sup>[68]</sup>采用球坐标系下的交错网格有限差分法进行地磁测深的三维正演模拟。该方法主要基于 Maxwell 方程的积分形式,数学模型离散后的方程组采用 PARDISO 求解器处理,避免迭代求解中的散度校正问题。该研究中还与已有的有限元法和有限差分法进行了比较,该方法在一维层状模型和双半球模型中显示出较高的计算精度,相对误差优于 5%。韩丽等<sup>[69]</sup>利用基于 Maxwell 全方程的频域有限差分法对地下多孔介质中震电效应进行数值模拟,通过精确模拟地震波与电磁波场的相互作用,研究不同介质分界面处的电磁波场反射和透射现象,准确识别异常体位置,有助于更好地理解震电效应产生的机制。张志佳等<sup>[70]</sup>利用有限差分法和起伏多重变加密网格技术对复杂地表波动方程进行数值模拟,误差控制在  $10^{-12}$  内,计算效率较高,可以很好地适应实际复杂地质条件。Gerya 等<sup>[71]</sup>提出了一种新的交错网格有限差分法,对网格分辨率转换过程中内部的速度节点施加了应力守恒约束,使网格在离散化的过程中得以保持矩阵稀疏性,大大降低了计算成本,提高了求解效率。该方法适用于强烈可变黏度情况的模拟,Gerya 等利用该方法进行了岩石圈结构模拟(图 3)和行星尺度模拟(图 4),结果显示在黏度发生显著变化的区域或复杂计算域地区,该方法会自动增加网格密度,保证计算效率同时也保证了准确率。目前研究者们仍在不断改进算法,以提高计算效率和精度,将有限差分法和其他数值方法结合,如有限元法和边界元法等,以此来解决更加复杂的地学问题。Chávez-Negrete 等<sup>[72]</sup>使用广义有限差分法模拟地下水流,提出了一种新的界面公式来应对非饱和多孔层状介质中的地下水流现象,确保了在不同介质层之间的界面节点处水的平衡。

常见有限差分法对比见表 2。

### 3.3 边界元法

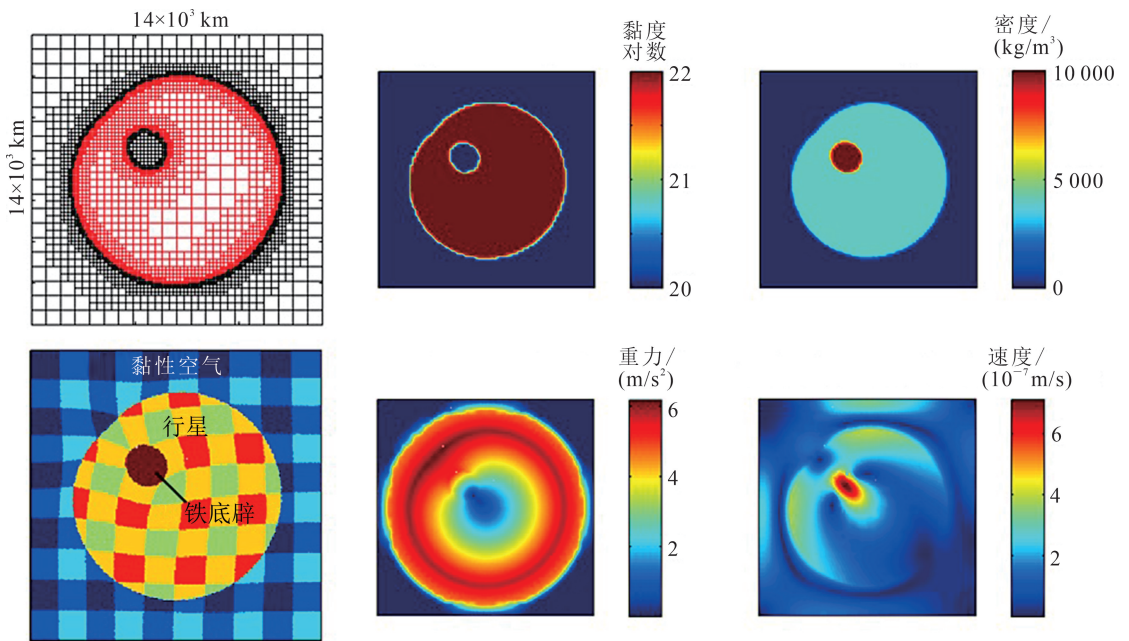
边界元法是一种求解边界积分方程中边界值或初值问题的数值方法框架,主要用于求解边界条件对解起主导性作用的物理问题。边界元法将问题域的求解过程转换为边界上的积分方程,并应用数值离散化手段,将连续的问题转化为线性代数方程组的形式。与其他基于问题域的数值方法相比较,边界元法相当于将问题降维,更容易生成网格。边界元法擅长求解大规模边界问题,例如地壳和地幔建模、计算流体动力学和热传导问题等。



据文献[71]。

图 3 自适应交叉网格有限差分法岩性结构(a)、黏度场(b)和网格结构(c)的演化

Fig.3 Evolution of lithological structure (a), viscosity field (b) and grid structure (c) of adaptive staggered grid finite difference method



据文献[71]。

图 4 自适应交叉网格有限差分法模拟的行星变形试验结果

Fig.4 Results for the planetary deformation experiment simulated by the adaptive staggered grid finite difference method

表 2 有限差分法对比

Table 2 Comparison of finite difference methods

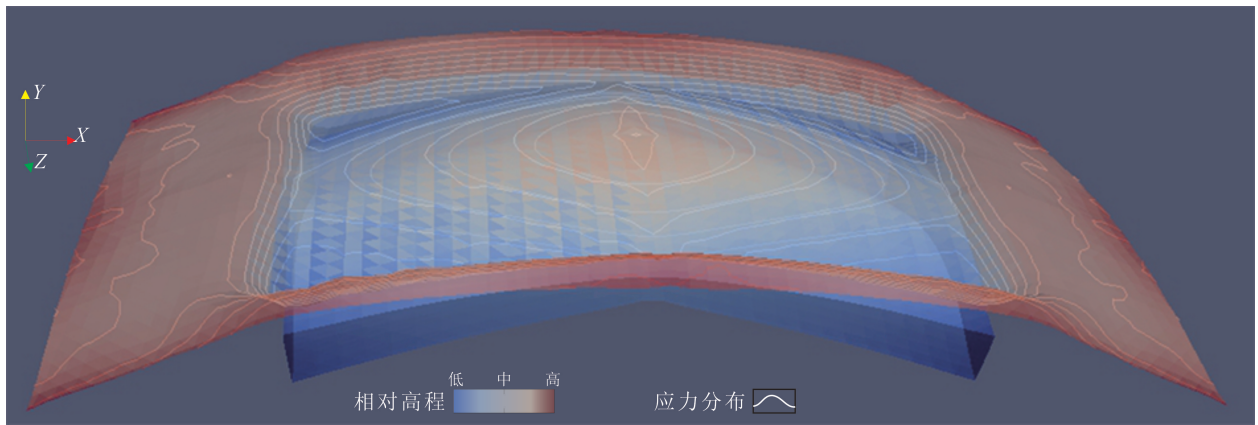
求解算法	求解特点	最小时间步长	收敛性	求解时长	求解精度	适用类型
显式有限差分法	直接迭代方法,易于实现,适合处理非线性问题	受限于 Courant 稳定性条件,通常为最小网格尺寸除以波速	在满足稳定性条件下收敛,但受数值耗散和频散的影响	快,无须求解大型方程组	取决于时间步长和空间网格划分,通常为二阶精度	动态问题,如流体动力学、热传导、地震波传播
隐式有限差分法	需要求解大型线性或非线性方程组,可能需要迭代方法	大于显式方法,不受 Courant 条件限制	良好,收敛性依赖于迭代求解器的性能	长,需要求解大型方程组	取决于时间步长和空间网格划分,可以达到更高阶精度	稳定或非线性问题,如地质建模、热传导
Crank-Nicolson 方法	半隐式方法,结合了显式和隐式方法的优点	与隐式方法相似,但需要更小的时间步长以保持稳定性	良好,提高了稳定性和精度	中等,介于显式和隐式方法之间	高	需要高精度和稳定性的问题,如波动方程求解
交错网格有限差分法	在不同的网格点上处理不同的变量,减少伪扩散和伪耗散	取决于具体问题和所用的差分格式	良好,尤其是在处理自由表面问题时	快,近似于显式方法,取决于问题的复杂性	高,尤其是处理流体动力学问题	流体动力学问题,尤其是涉及自由表面的情况
高阶有限差分法	使用高阶差分近似来提高解的精度	允许更大的时间步长	良好	长,需要更多运算	提供更高的数值解精度	对精度要求较高的问题,如地震波形反演

边界元法的理论根基在于积分方程的数学理论,其中基本解(Green 函数)为从边界到问题域内部任意点的影响关系提供了数学描述。边界元法能够有效地处理无限或半无限域问题,该问题在传统的基于域的数值方法中需要在无限处引入额外的条件,处理通常较为复杂。此外,边界元法在处理边界条件变化或边界形状不规则的问题时具有很好的灵活性和高效性。但同时也需要注意边界元法的精确性很大程度上依赖于边界离散化的质量,以及数值积分方案是否严格。

边界元法的出现相较于有限元法晚了约 20 年,最早是 Jaswon<sup>[73]</sup> 于 1963 年讨论了 Fredholm 积分方程与 Green 边界公式在位势理论和弹性力学的应用。同时该方法的提出也为困难边界问题,如非弹性动力学问题以及其他梁或板组成的结构提供了解决方法。Rizzo<sup>[74]</sup> 提出一种基于矢量边界公式的方法,无须复杂映射函数就能处理多连通域问题。这种方法展示了边界元法处理弹性静力学问题的能力。Sweedlow 等<sup>[75]</sup> 利用边界元法对三维弹性标本进行了数值应力分析,展示了裂纹尖端附近应力分布及其三维特性。同年,Cruse 等<sup>[76]</sup> 又进一步探讨了边界元法在三维弹塑性流动问题中的应用,通过

扩展 Somigliana 恒等式,在边界上评估材料关系降低维度,这种方法适用于一般性弹塑性流动理论。Mendelson<sup>[77]</sup> 研究了边界元在弹塑性扭转问题的应用,并与有限差分法进行了比较,精度与之类似,收敛速度更快。Yin 等<sup>[78]</sup> 提出一种新的正则化公式,有效提高了数值解的准确性和稳定性,其通过直接法和间接法将二维流固耦合问题转化为三组不同的边界积分方程,并引入边界算子进行求解。其中直接法基于 Green 公式和基本解来表示经典解,间接法基于势层理论,这两种方法都可以将问题转化为边界值问题。数值模拟结果表明该方法可以有效解决流固耦合问题。Quevedo 等<sup>[79]</sup> 利用快速多极边界元法模拟了岩石圈-地表相互作用动力演化形成的洋中脊地形演变(图 5)。该方法融合了边界元和多极方法能够提高计算应力和应变的效率,减少了所需的网格元素数量,使求解问题所需的内存和时间需求大大降低。该方法适用于处理地壳断层和地壳内物质转换的复杂性问题,能够处理大规模的地球动力学模型(如全球地壳动力学模拟)。

我国关于边界元的研究始于 20 世纪 70 年代后期,冯康教授在 1978 年根据椭圆边值的特性,首次提出边界归化思想;同一时期清华大学杜庆华教授、



据文献[79]。

图 5 利用边界元模拟岩石圈-地表相互作用动力演化形成的洋中脊地形

Fig.5 Mid ocean ridge topography emerging from dynamic evolution of lithosphere-mantle-surface interaction by the boundary element method

姚振汉教授,以及嵇醒、申光宪等学者也开始从事边界元的研究,并在弹性分析等领域作出重要贡献<sup>[80]</sup>。在 20 世纪的 80 年代,张永元、祝家麟、黄玉盈、胡海昌、王有成等为代表的科学家对边界元法在流固相互作用、弹塑性接触以及板壳结构分析等领域进行了广泛应用和研究<sup>[81]</sup>。在 20 世纪 90 年代,边界元法的研究继续深化,被应用于更复杂的领域,如复杂弹性力学、多相流、复合材料结构分析、非线性弹塑性和流固耦合等,算法精度也得到进一步提升<sup>[82]</sup>。进入 21 世纪后,边界元法在地球动力学的非线性问题求解中得到了广泛的采纳和应用。金朝嵩<sup>[83]</sup>通过 Sobole 空间框架对一般算子方程的 Galerkin 逼近进行了深入分析,并给出了后验误差估计的结果。针对以有限平面为屏蔽物的声散射问题,该研究为自适应边界元法的解法提供了具体的后验误差估计表达式。该研究能够有效地处理边界积分方程中的奇点问题,提高数值解的精度和效率。2003 年,吴云等<sup>[84]</sup>提出了一种基于边界元的非连续(块体系统)形变反分析法,采用边界元法和最小二乘原理,以边界单元的位移和表面力作为未知参数,以观测到的位移作为观测值,来确定边界上的相对运动、位移和应力场。该研究讨论了如何确定实验建模过程中为保证系统整体的正确性和合理性所需的应力参数和其他约束条件,以及如何判断块体间接触状态。2010 年,焦龙等<sup>[85]</sup>实现了对川西地区形变场与应变场的研究,分析了巴颜喀拉地块和四川地块在汶川地震前的地壳形变特征。本次研究将 GPS 位移数据作为输入,计算块状边界应力数值,

以及内部应力应变和位移。研究结果表明研究地块南北向的张应变作用以及东西向应变能的积累可能是触发汶川地震的关键因素。

常见边界元法对比见表 3。

### 3.4 有限体积法

有限体积法最早可以追溯到 20 世纪 50 年代,该方法的主要应用领域为航空航天领域的计算流体力学。

有限体积法的基本思想与有限差分类似,均以问题的积分公式入手,将计算域转化为一组控制体积,这些控制体积通常与网格单元相关联;之后对每个控制体积应用守恒定律进行离散化得到一组离散方程。这种方法使得离散方程不仅具有明确的物理意义,同时也确保了物理量的守恒特性。

有限体积法在地学领域的应用虽然起步较晚,但发展迅速。首次被引入地学领域是为了解决地下水流动和污染物运移的问题。随着时间的推移,有限体积法在地学中的应用被广泛扩展到多个领域,包括地质建模、地震模拟、滑坡分析、海洋流体力学和气候变化研究等。

最早使用有限体积法离散化的计算代码为 Ogawa 等<sup>[86]</sup>在 1991 年开发的三维笛卡尔模型,该模型采用了迭代求解器。之后, Tackley<sup>[87]</sup>利用三维笛卡尔代码 Stag3D 实现了该网格上的速度-压力多网格求解器,并将该方法应用于模拟可压缩对流,目前该代码已在众多科学研究中得到推广应用。Stag3D 软件采用了 MPDATA 平流方法(一种有限体积法)。

表 3 边界元法对比

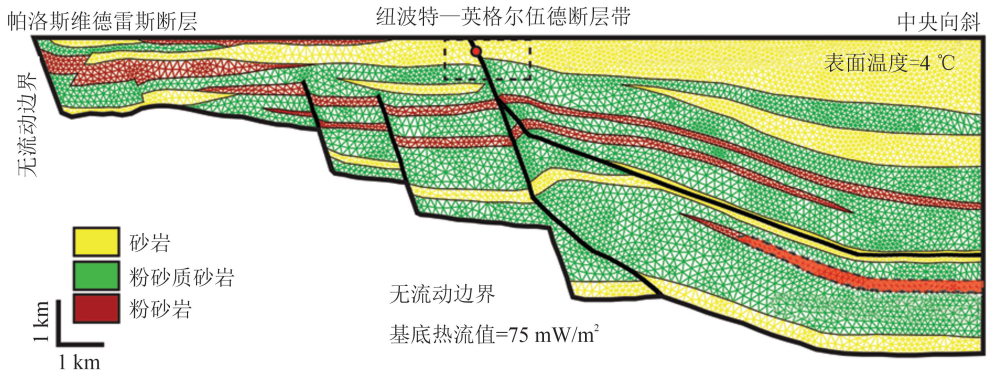
Table 3 Comparison of boundary element methods

求解算法	求解特点	收敛性	求解时长	求解精度	适用类型
直接边界元法	直接在边界上离散化,适用于边界条件已知的问题,通常用于封闭区域的求解	依赖于边界的离散化质量和数值求解方法的选择	取决于问题的复杂性和边界的离散化程度	依赖于边界离散化的精细程度和数值积分的准确性	封闭区域的问题
间接边界元法	先求解边界上的未知数,然后利用这些解来计算内部解,适用于开放区域或半无限域问题	依赖于边界的离散化质量和数值求解方法的选择	取决于问题的复杂性和边界的离散化程度	依赖于边界离散化的精细程度和数值积分的准确性	开放区域或半无限域的问题,如声学 and 电磁场问题
双重边界元法	结合了直接边界元法和间接边界元法的特点,可以同时求解内部和外部问题,适用于更复杂的情况	引入了额外的边界或多个边界,可能需要更精细的网格和更复杂的数值技术来保证收敛性	长,需要处理更多的边界或复杂的几何形状	高,通过双重或多重边界提高了精度,但需要更多的计算资源	同时考虑内部和外部解或处理复杂几何形状的问题
多重边界元法	通过引入多个边界来处理复杂的几何形状或多层介质问题,增加了方法的适用性	引入了额外的边界或多个边界,可能需要更精细的网格和更复杂的数值技术来保证收敛性	长,需要处理更多的边界或复杂的几何形状	高,通过双重或多重边界提高了精度,但需要更多的计算资源	同时考虑内部和外部解或处理复杂几何形状的问题
边界积分方法	基于边界积分方程,重点在于边界上的解,适用于边界条件容易施加的情况	良好,因基于精确的边界积分方程	短,主要关注边界上的计算	高,尤其是在边界条件明确的情况下	边界条件容易施加且主要关注边界解的问题
边界-体积元法	结合了边界元和体积元法,提高了求解的准确性,尤其适用于具有复杂内部结构的问题	良好	长,需要同时处理边界和体积内的计算	高	具有复杂内部结构的问题,需要同时考虑边界和体积内的解
谱边界元法	引入谱方法,使用高阶多项式提高精度,适用于对解的精度要求较高的问题	良好,尤其在高阶多项式的使用下	长,需要同时处理边界和体积内的计算	高	对解的精度要求较高的研究中使用,尤其是在声学和振动分析领域

随后开发的若干计算软件或者代码虽然同样采用了基础的有限体积/有限差分多网格方法,但都根据具体研究问题进行了相应的改进。Gerya 等<sup>[88]</sup>开发的二维代码采用了相同的错开网格,但包含了许多额外的复杂物理特性,如弹性、自由表面和多种成分物质的追踪等。Choblet 等<sup>[89]</sup>采用非多网格迭代求解器实现了有限体积法在经度-纬度-半径网格上三维球面几何的应用。使用立方球体网格、阴阳网格以及螺旋网格实现了多网格版本。

Aziz 等<sup>[90]</sup>在石油储层模拟中应用有限体积法,介绍了黑油模型和组分模型的数值求解,为油气资源的高效开发提供了重要工具。Jung 等<sup>[91]</sup>采用有

限元和有限体积混合方法,使用隐式压力-显式饱和度和数值方案处理了流体相之间的毛细力和其他非线性效应,模拟了石油在盆地中的长距离迁移和积累过程(图 6)。该方法能有效地处理地质结果中非均质性和流体动力学的复杂性,为油气勘探提供了有效模拟方法。马瑞杰等<sup>[92]</sup>提出了一种新的有限体积法数学模型。该模型根据水流连续性原理、质量守恒定律和达西定律,其中岩溶裂隙介质被定义为双重孔隙度介质,以此建立非稳定流双重介质数学模型对裂隙地下水流动问题进行求解。Jenny 等<sup>[93]</sup>开发一种高效的有限体积法用于多相流和传输的多尺度模拟,处理非线性流动和传输问题。Zhang<sup>[94]</sup>



据文献[91]。

图 6 基于有限体积法构建的洛杉矶盆地压实模型中使用的数值网格(12 532 个三角元素)

Fig.6 The numerical grid (12 532 triangular elements) used in the LA basin compaction model based on the finite volume method

利用有限体积法对复杂地质构造中的地下水流动和污染物运移进行了数值模拟实验,为环境保护和管理提供了新的技术手段和研究视角。Cui 等<sup>[95]</sup>采用有限体积法对地热储层中的水热耦合过程进行了模拟,模拟结果展示了该方法在地热资源评估和开发中的应用。Huang 等<sup>[96]</sup>对裂隙岩中的地下水流动和溶质运移进行了数值模拟,结果表明有限体积法能高效准确地对裂隙介质中的水流和溶质迁移进行研究。

### 3.5 无网格法

无网格法克服了传统方法对网格的依赖性,通过一系列散布在求解域内的节点来近似表示未知函数。该方法适用于涉及网格不规则、边界移动、形变较大及高维复杂几何域的问题。这种特性使得无网格法在地质领域的复杂问题建模中具有较高的应用价值。

无网格数值技术的研究最早出现于 20 世纪 70 年代,当时主要围绕任意网格有限差分法进行研究。1977 年 Lucy<sup>[97]</sup>提出了一种创新的粒子模拟方法——光滑粒子流体动力学法,该方法被应用于天体物理学中的复杂现象,如行星碰撞和星系演化。随着研究的深入,光滑粒子流体动力学法的应用逐渐扩展到流体动力学等更广泛的领域。尽管光滑粒子流体动力学法最初在处理边界条件和非均匀粒子分布方面存在一定的局限性,但后续的研究工作对其不断进行了有效的改进和优化。

在无网格法的发展过程中,Nayroles 等<sup>[98]</sup>于 1992 年提出了离散单元法,该方法通过加权最小二

乘多项式拟合实现了局部近似解的构建。Belytschko 等<sup>[99]</sup>在 1994 年提出了无单元 Galerkin 法,该方法采用拉格朗日乘子技术确保满足强边界条件,显著提升了数值解的收敛速度。无单元 Galerkin 法在边界条件处理方面表现优越的同时,其较高的计算成本和对背景网格的依赖性成为这种方法被广泛应用的制约因素。

Liu 等<sup>[100]</sup>在 1995 年提出了再生核粒子法,该方法通过修正函数保证了边界条件的满足,又进一步提升了数值解的精度。与此同时提出有限点法和径向基点插值法等技术,它们由于无须背景网格的特性在流体力学和跨学科数值模拟中得到了广泛应用。

径向基函数法的研究最早来源于 Hardy<sup>[101]</sup>在 1971 年提出的无网格法,通过稀疏数据描述复杂的地形表面。这种方法的优势在于构建形函数无须考虑复杂情况,只需要考虑离散点间的距离,有助于高维问题的降维处理。随后,引入正定紧支径向函数和紧支径向基函数,有效解决了无网格法中系数矩阵的稀疏性问题,也为后续大型问题的求解奠定了基础。局部微分求积的径向基函数法和结合高斯函数的方法能够进一步增强数值解的稳定性和精度。

无网格数值技术已经形成了一个包含光滑粒子流体动力学法、离散元法、无单元 Galerkin 法、再生核粒子法、有限点法、径向基点插值法等多种方法的丰富体系,这些技术在各自的应用领域内展现出独特的优势和潜力。尽管无网格技术在理论完备性、计算效率和实用性方面仍需进一步的研究和改进,

但在计算力学领域的研究热潮和应用前景不容忽视。学术界对此领域进行了深入研究,如张雄等<sup>[102]</sup>的著作和 Nguyen 等<sup>[103]</sup>的综述文章,为无网格技术的理解 and 应用提供了宝贵的知识和资源。

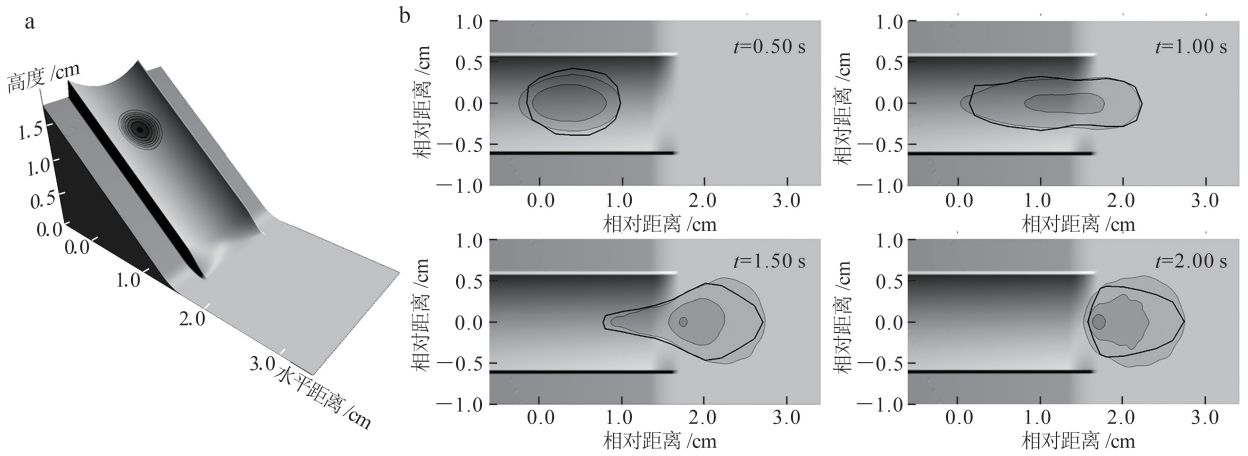
焦玉玲等<sup>[104]</sup>利用无网格法实现了地下水水位的预测,分析了鞍山市首山区水文地质条件对水位变化的影响。该研究采用移动最小二乘理论的无网格法,通过构建场函数、基函数和权函数的选取,形函数及其导数的计算,建立了双层渗流二维平面系统的数学模型。模拟预测得到的结果与实际水位变化规律基本一致,验证了无网格法在水量模拟计算中的有效性。王月英<sup>[105]</sup>采用无单元 Galerkin 法进行了地震波正演模拟,并对其影响因素进行了深入分析。该方法的优势在于通过局部支撑域上的权函数实现最佳逼近,突破了传统网格剖分的局限。但需要注意的是基函数的选择对模拟精度和计算负荷有显著影响,基函数阶数越高,精度越高,导致运算量越大;同时节点的分布和编号方式会影响数据量和运算效率。该研究展示了无单元 Galerkin 法在地震波模拟中应用的潜力。李坤等<sup>[106]</sup>采用无网格法求解二阶时域波动方程,依据径向基函数逼近空间导数以及 Crank-Nicolson 时间离散化技术进行数值模拟。该研究采用的方法可提供与有限元相似的精度,同时与有限元法相比采用了更少的数据点。该研究证明了无网格法在处理复杂几何问题时的优势,相较于其他数值计算方法简化了计算流程,避免了网格划分和重构的步骤。由于该方法采用的径向基函数与问题维度无关,所以可扩展到更高维度问题的求解。Wang 等<sup>[107]</sup>提出了一种基于径向基函数的无网格法用于求解逆波传播问题。该方法结合了配点法和径向基函数,通过 Tikhonov 正则化技术和 L-曲线准则处理噪声测量数据,提高了解决问题的稳定性。研究对比分析了传统有限元法和流行的弱形式无网格法,相较而言该方法具有更少的色散误差,并通过稳定性分析预测了显式时间积分的关键时间步长。冯德山等<sup>[108]</sup>基于滑动最小二乘法拟合场函数采用无单元 Galerkin 法对探地雷达进行正演模拟。无单元 Galerkin 法避免了复杂的网格剖分,简化计算流程,保持了高计算精度和解的高次连续性。该研究对无单元 Galerkin 法处理强加边界条件的策略进行了创新,采用罚因子法和透射边界条件提高模拟的准确性。通过与基于线性插值的有限元法正演剖面图的对比,证明无单元

Galerkin 法在相同节点数条件下具有更高的精度,能更好地解释探地雷达数据。无网格法也被用于模拟地震波与建筑物、桥梁等结构的相互作用。例如,嵇艳鞠等<sup>[109]</sup>将无网格法应用于起伏地形各向异性 2D 大地电磁响应模拟,分析了起伏地形对电磁响应的影响,为电磁法勘探中的地形校正和数据解释提供了新的研究方法。李俊杰等<sup>[110]</sup>利用无网格点插值法对大地电磁场响应进行数值模拟,研究分析了无网格点插值法在处理复杂地质模型时的优势,特别是在与有限元法和无单元 Galerkin 法的比较中展示了无网格点插值法在计算精度和效率方面的显著提升。魏德敏等<sup>[111]</sup>将无单元 Galerkin 法应用于土质边坡的弹塑性稳定分析,通过与有限元法计算结果的对比分析,发现使用无单元 Galerkin 法计算弹塑性问题收敛速度快、稳定性高。该研究为弹塑性问题的求解提供了一种新的数值计算方法。McDougall 等<sup>[112]</sup>利用无网格法提出了一种可以用来动态分析快速流动滑坡、泥石流和雪崩的数值模型,该模型基于平滑粒子流体动力学 (SPH) 模拟复杂三维地形上的流动。该方法适用于非静水压力和各向异性内部应力分布,使得快速流动现象的动态特性能够在模拟中被展示出来,同时能够消除长距离位移网格扭曲问题。他们在实验室水槽实验中分析了真实岩石雪崩案例(图 7),从而证明了该模型模拟实际滑坡、岩屑流和雪崩问题的能力。Lin 等<sup>[113]</sup>提出了一种改进的无网格数值流形方法。该方法采用移动最小二乘插值,解决了传统方法在模拟复杂边界渗透问题时出现的低精度和网格依赖性问题。Cao 等<sup>[114]</sup>提出了一种无网格数值流形方法的改进版,用于边坡稳定性分析。该研究通过结合强度折减法和 Mohr-Coulomb (M-C) 准则的多屈服面控制方程,解决了有限元法在计算具有软弱夹层的边坡时对网格数量和非线性方程求解算法的依赖性和敏感性问题。研究中引入了主应力空间中的子空间跟踪方法来处理 M-C 多屈服面的角点问题,并结合  $k$  ( $k$  为聚类中心数) 均值聚类算法和小波变换,开发了一种智能且高效的临界滑移面自动提取方法。

常见无网格法对比见表 4。

### 3.6 数值计算方法对比

在地球动力学数值模拟研究中,不同的数值计算方法各有优缺点和适用领域。选择合适的数值计算方法对于准确模拟地球内部过程至关重要。例如有限元法处理复杂几何形状和材料属性具有优势,



据文献[112]。

图 7 基于无网格法模拟雪崩过程计算机模型-雪崩材料的初始位置(a)和无网格法模拟滑动位置(b)

Fig.7 Avalanche process by meshless methods computer model-initial position of avalanche material (a) and sliding location by meshless methods (b)

表 4 无网格法对比

Table 4 Comparison of meshless methods

求解算法	求解特点	最小时间步长	收敛性	求解时长	求解精度	适用类型
光滑粒子流体动力学法	基于粒子的方法,适用于流体动力学问题	取决于粒子之间的相互作用和流体的黏度	通常需要适当的核函数和光滑长度参数来保证收敛	取决于粒子数量和相互作用的复杂性	受核函数选择和粒子分布均匀性的影响	流体动力学、天体物理学
无单元 Galerkin 法	使用移动最小二乘法构造近似函数,适用于固体力学问题	不适用,一般涉及的是静态或准静态问题	良好,需选择合适的权函数和形函数	长,涉及复杂的形函数计算	高,能够处理大变形和裂纹扩展问题	固体力学、断裂力学
径向基函数法	基于径向基函数的插值方法,适用于多变量逼近问题	不适用,一般涉及的是静态问题	良好,但全局收敛性取决于节点分布	取决于径向基函数的选择和节点数量	高,受到条件数影响	静态结构分析、表面建模
无单元局部 Galerkin 法	结合了局部 Petrov-Galerkin 方法的优点,适用于多物理场问题	不适用,一般涉及的是静态或准静态问题	通过局部积分和适当的权函数选择保证收敛性	长,需要局部积分	高,尤其是局部区域内	多物理场问题、复合材料分析
移动最小二乘法	通过移动最小二乘近似构造形函数,适用于复杂几何形状的问题	不适用,主要用于静态问题	良好,可能需要调整权函数以优化全局收敛	取决于节点数量和形函数的复杂性	高,尤其是局部区域内	复杂几何形状的结构分析
扩展有限元法	能够处理材料内部的裂纹和不连续性,适用于断裂力学问题	不适用,主要用于静态和准静态问题	良好,通过引入局部加强函数保持	长,需要处理复杂的局部近似函数	高,尤其是在裂纹尖端附近的模拟	断裂力学、材料损伤分析

有限差分法在规则网格和简单边界问题时展现出较高的计算效率,有限体积法更擅长处理流体动力学,边界元法能高效处理边界问题,无网格法则能够灵活处理大变形和复杂运动。表 5 对几种主要的数值

计算方法进行了对比分析,以帮助研究人员更好地理解这些方法的特点和适用范围,从而在实际研究中根据实际情况做出最优选择。

表 5 不同数值计算方法对比

Table 5 Comparison of various numerical calculation methods

数值模拟方法	优点	缺点	研究领域
有限元法	能够处理复杂的地质结构和边界条件,适用于大尺度和长时间尺度的模拟	对于小尺度和高频率的动力学过程可能不够精确,需要高质量的初始模型和参数	地球动力学
有限差分法/ 有限体积法	对于流体流动和热传导问题效率高,适合于规则几何和均质介质的模拟	对于复杂地质介质和非均质问题处理困难,难以精确模拟复杂边界条件	资源勘探
边界元法	适合处理无限或半无限域问题,只需要对边界进行离散,减少计算量	对于内部源项的处理较为复杂,对非边界值问题需要额外处理	环境监测
无网格法	适用于大变形和破坏问题的模拟,不需要传统网格,适用于复杂几何形状	计算复杂度可能较高	灾害风险评估

### 3.7 数值模拟软件、代码

基于上述各种数值计算方法,研究者在地球动力学数值模拟领域内开发了众多软件和代码,每个工具都具有独特的应用领域和特点,以满足不同的研究需求。这些软件和代码在地球动力学研究中

扮演着至关重要的角色,它们使研究人员能够将更多的精力集中在科学问题而非算法上,进而帮助研究人员模拟和理解复杂的地球演化过程,为推动地球科学发展做出了卓越的贡献。表 6 展示常见数值模拟软件、代码的特点和应用领域。

表 6 不同数值模拟软件、代码

Table 6 Various numerical simulation software and codes

软件/代码名称	算法	应用领域	特点
SEPRAN	有限元法	地幔对流 <sup>[115]</sup>	适用于模拟复杂地质过程,可同时解决多物理场耦合
PyLith	有限元法	地壳变形 <sup>[116-117]</sup> 和火山建模 <sup>[118]</sup>	采用阈分解方法允许同一模型同时处理断层的准静态和动态行为
SPECFEM	谱元法	地震波传播 <sup>[119-121]</sup>	兼顾有限元法的灵活性和谱方法的高精度,适合处理波动问题
ABAQUS	有限元法	岩石力学 <sup>[122-124]</sup> 、构造地质学 <sup>[125-126]</sup>	非线性分析能力强,具有丰富的单元库,可模拟多种问题
COMSOL	有限元法	多物理场耦合分析 <sup>[127-128]</sup>	应力分析能力强,可自定义模型求解器以适应复杂问题
FLAC	有限差分法	岩土工程、地震模拟 <sup>[129]</sup>	流变分析能力强,前处理能力需要配合其他软件一同使用
SimPEG	有限体积法	应用地球物理 <sup>[130-131]</sup>	提供地球物理领域更专业的工具和方法
Tectosaur	边界元法	地壳应力 <sup>[132]</sup>	适用于求解复杂的几何静态弹性边界值问题,无须体积网格划分
BEMLIB	边界元法	流体动力学 <sup>[133]</sup>	不适合求解大规模复杂问题,但在流体力学方面有优势
Clawpack	有限体积法	流体动力学及天文物理学等 <sup>[134-135]</sup>	更侧重于双曲型方程的波传播问题
OpenFOAM	有限体积法	流体力学及热力学等 <sup>[136-137]</sup>	适合多相流和多物理场耦合问题

续表 6

软件/代码名称	算法	应用领域	特点
GALE	有限元法	构造地质学、地壳动力学 <sup>[138-139]</sup>	可通过粒子集合追踪物质属性,模拟物质在地质过程中流动和变形
Underworld	粒子有限元法	地壳与地幔动力学 <sup>[140-141]</sup>	粒子群可以确保给定材料获得准确的速度解,不受流体演变几何形态限制
CitcomS	多网格有限元法	热化学对流 <sup>[142-143]</sup>	模块化设计,可扩展性高,可与其他模型或软件集成
ASPECT	自适应网格细化的有限元法	热对流与构造地质学 <sup>[144-145]</sup>	高度模块化,方法易于扩展
LitMod2D/LitMod3D	有限元法	地幔和岩石圈结构模拟 <sup>[146-148]</sup>	两款软件均用于研究岩石圈和上地幔的热、密度和结构。2D_2.0 简化了代码输出,使操作更简便
CDEM2D	离散元法	地质断层模拟 <sup>[149]</sup>	无需网格化,适用于处理复杂边界条件和不规则形状的地质体
Ellipsis3D	有限元法	地球动力学及岩石变形 <sup>[150-151]</sup>	使用固定计算网格和移动材料点的混合方案,允许追踪材料接口和历史依赖属性
Energy2D	有限差分法	热力学模拟 <sup>[152]</sup>	辅助热传递和流体力学的教学工具,易于短时间内多次迭代
I2ELVIS/ I3ELVIS	有限差分法	地球动力学模拟 <sup>[153-154]</sup>	适合精细模拟岩石圈尺度的地质过程,以及处理较大黏度比的复杂问题
ANSYS	有限元法	岩石圈结构模拟、板块构造 <sup>[155-156]</sup>	可用于多物理场模拟,但收敛速率较差
LaMeM	有限差分法	岩石圈和地幔演化 <sup>[157-158]</sup>	计算效率较高
Milamin	多网格有限元法	热力学及流体动力学 <sup>[159]</sup>	可在个人电脑端处理百万级别自由度问题
StagLab	有限元法	板块构造 <sup>[160-161]</sup> 、地幔对流 <sup>[162]</sup>	提供多种模型数据支持,兼容 StagYY/Aspect 等代码

## 4 总结及展望

本文综述了数值模拟在地球动力学研究中的应用现状与进展,分析了各种数值方法在模拟地球系统动力学过程中的优势与局限。通过对比有限元法、有限差分法、有限体积法、边界元法和无网格法等主要数值计算方法,我们可以发现每一种方法都有其特定的适用场景和要求。

有限元法因其高度的灵活性和适应性,在处理复杂地质结构和边界条件方面表现出色,尤其适用于大尺度和长时间尺度的模拟;有限差分法和有限体积法在流体流动和热传导问题上具有高效率,适合于规则几何和均质介质的模拟;边界元法在处理无限或半无限域问题时具有明显优势,能有效减少计算量;无网格法则在处理大变形和破坏问题时显示出其强大的能力,尤其是在不需要传统网格的复杂几何形状模拟中。

未来的发展趋势将聚焦于以下几个方面:第一,多物理场耦合模拟技术的进步将推动地球系统模拟

的深入发展,这将有助于更全面地理解地球系统的复杂性,揭示其内在机理和演变规律。通过耦合多种物理场,模拟结果将更加真实和可靠,能够更好地支持气候预测、灾害预警和资源管理等实际应用。第二,高性能计算技术的应用将极大提升模拟的效率和规模。特别是随着并行计算和分布式计算技术的不断发展,模拟计算将能够更好地利用多核处理器和集群系统的计算资源,实现更高的计算速度和更大的计算规模。这使得研究人员能够更快地获得模拟结果,并且能够处理更大的数据规模和更复杂的模拟问题。第三,算法精度和稳定性的提升将是未来发展的关键。为了适应更加复杂的模拟需求,算法必须具备更高的精度和稳定性。研究人员需要不断优化和改进算法,提高其计算效率和结果的准确性。第四,网格优化和自适应算法的研究将是提高计算效率和结果准确性的重要手段。通过优化网格结构和自适应算法,模拟计算能够更好地适应复杂的地形和边界条件,提高计算结果的准确性和可靠性。第五,数据驱动和机器学习技术的融合将为

地球动力学研究带来新的视角和方法。通过将机器学习算法应用于模拟数据,研究人员能够发现新的模式和关系,其应用包括提高气候预测和灾害预警的准确性等密切关乎人类生活的场景。

地球动力学数值计算方法的应用与发展是一个不断进化的领域。随着计算技术的持续进步和算法的不断创新,我们相信数值模拟将在解决地球动力学领域的重大科学问题和推动该领域的发展中发挥更加关键的作用。未来的研究将更加注重跨学科的合作,以及新算法和新技术的开发,以期达到对地球甚至行星演化更深层次的理解和更精确的预测。

#### 参考文献(References):

- [1] Xiong F, Zhu C, Feng G, et al. A Three-Dimensional Coupled Thermo-Hydro Model for Geothermal Development in Discrete Fracture Networks of Hot Dry Rock Reservoirs[J]. *Gondwana Research*, 2023, 122: 331 - 347.
- [2] Liu J, Yang H, Xu K, et al. Genetic Mechanism of Transfer Zones in Rift Basins: Insights from Geomechanical Models[J]. *GSA Bulletin*, 2022, 134 (9/10): 2436 - 2452.
- [3] Liu Z, Zheng L, Zuo Y, et al. Investigation of Three-Dimensional Model Reconstruction and Fractal Characteristics of Crack Propagation in Jointed Sandstone[J]. *Geomechanics and Geophysics for Geo-Energy and Geo-Resources*, 2024, 10(1): 75.
- [4] Kulik D A, Wagner T, Dmytrieva S V, et al. GEM-Selektor Geochemical Modeling Package: Revised Algorithm and GEMS3K Numerical Kernel for Coupled Simulation Codes [J]. *Computational Geosciences*, 2013, 17(1): 1 - 24.
- [5] Steefel C I, Appelo C A J, Arora B, et al. Reactive Transport Codes for Subsurface Environmental Simulation[J]. *Computational Geosciences*, 2015, 19 (3): 445 - 478.
- [6] Zhang X, Wu Y, Zhai E, et al. Coupling Analysis of the Heat-Water Dynamics and Frozen Depth in a Seasonally Frozen Zone [J]. *Journal of Hydrology*, 2021, 593(1): 125603.
- [7] Tsuboi S, Ando K, Miyoshi T, et al. A 1.8 Trillion Degrees-of-Freedom, 1.24 Petaflops Global Seismic Wave Simulation on the K Computer [J]. *The International Journal of High Performance Computing Applications*, 2016, 30(4): 411 - 422.
- [8] Sabah M, Ameri M J, Hofmann H, et al. Numerical Modeling of Injection-Induced Earthquakes Based on Fully Coupled Thermo-Poroelastic Boundary Element Method[J]. *Geothermics*, 2022, 105: 102481.
- [9] Yuen R, De Vahl Davis G, Leona E. The Influence of Moisture on the Combustion of Wood [J]. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 2000, 38(3): 257 - 280.
- [10] Gmeiner B, Rde U, Stengel H. Performance and Scalability of Hierarchical Hybrid Multigrid Solvers for Stokes Systems [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2015, 37(2): C143 - C168.
- [11] Omlin S, Rss L, Podladchikov Y Y. Simulation of Three-Dimensional Viscoelastic Deformation Coupled to Porous Fluid Flow [J]. *Tectonophysics*, 2018, 746: 695 - 701.
- [12] Rss L, Duretz T, Podladchikov Y Y. Resolving Hydromechanical Coupling in Two and Three Dimensions: Spontaneous Channelling of Porous Fluids Owing to Decompaction Weakening [J]. *Geophysical Journal International*, 2019, 218(3): 1591 - 1616.
- [13] Morra G, Yuen D A, Tufo H M, et al. Fresh Outlook on Numerical Methods for Geodynamics: Part 2: Big Data, HPC, Education [M]. Amsterdam: Elsevier, 2021.
- [14] Rene G, Juliane D, Wolfgang B, et al. On Formulations of Compressible Mantle Convection [J]. *Geophysical Journal International*, 2020, 221(2): 1264 - 1280.
- [15] Gerya T. Introduction to Numerical Geodynamic Modelling [M]. Zürich: Cambridge University Press, 2019.
- [16] 刘春梅, 钟柳强, 舒适, 等. 平面弹性问题自适应有限元方法的收敛性分析 [J]. *应用数学和力学*, 2014, 35 (9): 969 - 978.
- Liu Chunmei, Zhong Liuqiang, Shu Shi, et al. Convergence of an Adaptive Finite Element Method for 2D Elasticity Problems [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, 35(9): 969 - 978.
- [17] Barlow J. Optimal Stress Locations in Finite Element Models [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1976(10): 243 - 251.
- [18] Strang G, Fix G J. An Analysis of the Finite Element Method [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, 55(11): 696 - 697.
- [19] Newton I S, Huygens C, Motte A, et al.

- Mathematical Principles of Natural Philosophy[M]. London: H D Symonds, 1803.
- [20] Gander M J, Wanner G. From Euler, Ritz, and Galerkin to Modern Computing[J]. SIAM Review, 2012, 54(4): 627-666.
- [21] Hrennikoff A. Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method [J]. Journal of Applied Mechanics, 1941, 8(4): A169-A175.
- [22] Courant R. Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1943, 49(1): 1-24.
- [23] Turner M J, Clough R W, Martin H C, et al. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures[J]. Journal of the Aeronautical Sciences, 1956, 23(9): 805-823.
- [24] Clough R W. The Finite Element Method in Plane Stress Analysis [C]//2nd Conference on Electronic Computation. Pittsburgh, PA: American Society of Civil Engineers, 1960: 345-378.
- [25] 冯康. 基于变分原理的差分格式[J]. 应用数学和计算数学, 1965(1/2/3/4): 238-262.  
Feng Kang. Difference Schemes Based on Variational Principles[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1965(1/2/3/4): 238-262.
- [26] 臧绍先, 宁杰远. 俯冲带的负浮力及其影响因素[J]. 地球物理学报, 1994, 37(2): 174-183.  
Zang Shaoxian, Ning Jieyuan. Subduction Zone Negative Buoyancy and Its Influencing Factors [J]. Chinese Journal of Geophysics, 1994, 37(2): 174-183.
- [27] 石耀霖, 张健. 活动海岭俯冲与岛弧火山活动的热模拟研究[J]. 地球物理学报, 1998, 41(2): 174-181.  
Shi Yaolin, Zhang Jian. Thermal Simulation Study on the Subduction of Active Ridges and Volcanic Activity of Island Arcs [J]. Chinese Journal of Geophysics, 1998, 41(2): 174-181.
- [28] 刘亚静, 叶国扬, 毛兴华, 等. 俯冲带深部应力场的二维粘弹性有限元数值模拟[J]. 地震学报, 2002, 24(3): 285-292.  
Liu Yajing, Ye Guoyang, Mao Xinghua, et al. 2-D Viscoelastic FEM Simulation on Stress State in the Deep Part of a Subducted Slab [J]. Earthquake Science, 2002, 24(3): 285-292.
- [29] 唐湘蓉, 李晶. 构造应力场有限元数值模拟在裂缝预测中的应用[J]. 特种油气藏, 2005, 12(2): 25-28.  
Tang Xiangrong, Li Jing. Application of Finite Element Numerical Simulation of Tectonic Stress Field in Fracture Prediction [J]. Special Oil & Gas Reservoirs, 2005, 12(2): 25-28.
- [30] 沈海超, 程远方, 王京印, 等. 断层对地应力场影响的有限元研究[J]. 大庆石油地质与开发, 2007, 26(2): 34-37.  
Shen Haichao, Cheng Yuanfang, Wang Jingyin, et al. Study of Finite Element on Effects of Faults on Ground Stress Field [J]. Petroleum Geology and Oilfield Development in Daqing, 2007, 26(2): 34-37.
- [31] 白玉柱, 周庆. 逆冲断层错动形成变形场及应力场的有限元模型: 以映秀—青川断层为例[J]. 地震地质, 2013, 35(4): 721-730.  
Bai Yuzhu, Zhou Qing. The Study on the Finite Element Model of Deformation and Stress Fields Due to the Structural Motion of Inverse Fault: A Case of Yingxiu-Qingchuan Fault [J]. Seismology and Geology, 2013, 35(4): 721-730.
- [32] Davies D R, Davies J H, Hassan O, et al. Adaptive Finite Element Methods in Geodynamics: Convection Dominated Mid-Ocean Ridge and Subduction Zone Simulations[J]. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 2008, 18(7/8): 1015.
- [33] 戴黎明, 李三忠, 楼达, 等. 亚洲大陆主要活动块体的现今构造应力数值模拟[J]. 吉林大学学报(地球科学版), 2013, 43(2): 469-483.  
Dai Liming, Li Sanzhong, Lou Da, et al. Numerical Modeling of Present-Day Structural Stress of Major Active Blocks in the Asian Continent [J]. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 2013, 43(2): 469-483.
- [34] 袁杰, 朱守彪. 断层自发破裂动力过程的有限单元法模拟[J]. 地球物理学报, 2014, 57(1): 138-156.  
Yuan Jie, Zhu Shoubiao. FEM Simulation of the Dynamic Processes of Fault Spontaneous Rupture [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2014, 57(1): 138-156.
- [35] 王仁, 何国琦, 殷有泉, 等. 华北地区地震迁移规律的数学模拟[J]. 地震学报, 1980, 2(1): 32-42.  
Wang Ren, He Guoqi, Yin Youquan, et al. Mathematical Simulation of the Seismic Migration Pattern in the North China Region [J]. Earthquake Science, 1980, 2(1): 32-42.
- [36] 王仁, 黄杰藩, 孙苟英, 等. 华北地震构造应力场的模拟[J]. 中国科学: 地球科学: B 辑, 1982, 12(4):

- 337 - 344.
- Wang Ren, Huang Jiefan, Sun Xunying, et al. Simulation of the Stress Field in the Seismotectonic Structure of North China[J]. *Science China: Earth Sciences: Series B*, 1982, 12(4): 337 - 344.
- [37] 张郢珍, 粟生平, 梁北援. 鲁南地区历史地震活动特征及未来地震趋势的有限元分析[J]. *中国地震*, 1988, 4(3): 92 - 95.
- Zhang Yingzhen, Su Shengping, Liang Beiyuan. Finite Element Analysis of the Characteristics of Historical Earthquake Activity and Future Seismic Trends in the Southern Shandong Region [J]. *Earthquake Research in China*, 1988, 4(3): 92 - 95.
- [38] 梅世蓉, 梁北援. 唐山地震孕震过程的数值模拟[J]. *中国地震*, 1989, 5(3): 11 - 19.
- Mei Shirong, Liang Beiyuan. Numerical Simulation of the Seismic Rupture Process of the Tangshan Earthquake[J]. *Earthquake Research in China*, 1989, 5(3): 11 - 19.
- [39] 王继存, 黄清阳, 续春荣, 等. 川滇菱形块构造应力场的数值模拟[J]. *地震地质*, 1991, 13(1): 67 - 72.
- Wang Jicun, Huang Qingyang, Xu Chunrong, et al. Numerical Simulation of the Stress Field in the Sichuan-Yunnan Rhomboid Block Tectonics [J]. *Seismology and Geology*, 1991, 13(1): 67 - 72.
- [40] 梁海华, 侯建军, 刘树文, 等. 中国构造应力场与大震复发周期关系的数值模拟[J]. *地震地质*, 1999, 21(1): 51 - 57.
- Liang Haihua, Hou Jianjun, Liu Shuwen, et al. Numerical Simulation of the Relationship Between the Tectonic Stress Field and the Recurrence Interval of Major Earthquakes in China [J]. *Seismology and Geology*, 1999, 21(1): 51 - 57.
- [41] Parsons T. Post - 1906 Stress Recovery of the San Andreas Fault System Calculated from Three-Dimensional Finite Element Analysis[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2002, 107(B8): 2162.
- [42] 朱守彪, 邢会林, 谢富仁, 等. 地震发生过程的有限单元法模拟: 以苏门答腊俯冲带上的大地震为例[J]. *地球物理学报*, 2008, 51(2): 460 - 468.
- Zhu Shoubiao, Xing Huilin, Xie Furen, et al. Simulation of Earthquake Processes by Finite Element Method: The Case of Megathrust Earthquakes on the Sumatra Subduction Zone [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2008, 51(2): 460 - 468.
- [43] 李平恩, 廖力, 奉建州, 等. 1900 年以来巴颜喀拉块体应力演化与周缘强震关系的数值模拟研究[J]. *地球物理学报*, 2019, 62(11): 4170 - 4188.
- Li Ping'en, Liao Li, Feng Jianzhou, et al. Numerical Simulation of Relationship Between Stress Evolution and Strong Earthquakes Around the Bayan Har Block Since 1900[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2019, 62(11): 4170 - 4188.
- [44] Qu W, Gao Y, Zhang Q, et al. Present Crustal Deformation and Stress-Strain Fields of North China Revealed from GPS Observations and Finite Element Modelling[J]. *Journal of Asian Earth Sciences*, 2019, 183(Oct.1): 103959.
- [45] Bahuguna A, Shanker D. Simulation of Intraplate Stress Distribution of the Indian Tectonic Plate Using the Finite Element Method [J]. *Pure and Applied Geophysics*, 2022, 179(1): 125 - 148.
- [46] Karabulut M F, Güral V E. Accuracy Assessment of Mesh Types in Tectonic Modeling to Reveal Seismic Potential Using the Finite Element Method: A Case Study at the Main Marmara Fault [J]. *Applied Sciences*, 2023, 13(24): 13297.
- [47] 马峰, 高俊, 王贵玲, 等. 雄安新区容城地热田碳酸盐岩热储采灌数值模拟[J]. *吉林大学学报(地球科学版)*, 2023, 53(5): 1534 - 1548.
- Ma Feng, Gao Jun, Wang Guiling, et al. Numerical Simulation of Exploitation and ReInjection of Carbonate Geothermal Reservoir in Rongcheng Geothermal Field, Xiong'an New Area[J]. *Journal of Jilin University (Earth Science Edition)*, 2023, 53(5): 1534 - 1548.
- [48] Xu F, Hajibeygi H, Sluys L J. Adaptive Multiscale Extended Finite Element Method (MS-XFEM) for the Simulation of Multiple Fractures Propagation in Geological Formations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2023, 486(C): 112 - 114.
- [49] Chen Y, Yang H, Ye Y, et al. Generation of 3D Finite Element Mesh of Layered Geological Bodies in Intersecting Fault Zones[J]. *Plos One*, 2024, 19(1): e0293193.
- [50] Euler L. *Institutionum Calculi Integralis Volumen Primum*[M]. St Petersburg: Imperial Academy of Sciences, 1768.
- [51] Runge C, Precht. Über die Beziehungen des Atomgewichts der Elemente zu Deren Spektrum[J]. *Zeitschrift für Analytische Chemie*, 1905, 44(3): 265.

- [52] Alterman Z S, Karal F C J. Propagation of Elastic Waves in Layered Media by Finite Difference Methods[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1968, 58(1): 367 - 398.
- [53] Virieux J. P - SV Wave Propagation in Heterogeneous Media: Velocity-Stress Finite-Difference Method[J]. Geophysics, 1986, 51(4): 889 - 901.
- [54] Dablain M A. The Application of High-Order Differencing to the Scalar Wave Equation [J]. Geophysics, 1986, 51(1): 54 - 66.
- [55] Bayliss A, Jordan K E, LeMesurier B J, et al. A Fourth-Order Accurate Finite-Difference Scheme for the Computation of Elastic Waves[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1986, 76 (4): 1115 - 1132.
- [56] Levander A R. Fourth-Order Finite-Difference P - SV Seismograms[J]. Geophysics, 1988, 53(11): 1425 - 1436.
- [57] Jastram C, Tessmer E. Elastic Modelling on a Grid with Vertically Varying Spacing [J]. Geophysical Prospecting, 1994, 42(4): 357 - 370.
- [58] Falk J, Tessmer E, Gajewski D. Efficient Finite-Difference Modelling of Seismic Waves Using Locally Adjustable Time Steps[J]. Geophysical Prospecting, 1998, 46(6): 603 - 616.
- [59] Graves R W. Simulating Seismic Wave Propagation in 3D Elastic Media Using Staggered-Grid Finite Differences[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1996, 86(4): 1091 - 1106.
- [60] Boore D. Finite Difference Methods for Seismic Wave Propagation in Heterogeneous Materials [M]. Amsterdam; Elsevier, 1972.
- [61] Kelly K R, Ward R W, Treitel S, et al. Synthetic Seismograms: A Finite-Difference Approach [J]. Geophysics, 1976, 41(1): 2 - 27.
- [62] Madariaga R. Dynamics of an Expanding Circular Fault [J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1976, 66(3): 639 - 666.
- [63] 高孟潭,俞言祥,张晓梅,等. 北京地区地震动的三维有限差分模拟[J]. 中国地震, 2002, 18(4): 356 - 364.  
Gao Mengtan, Yu Yanxiang, Zhang Xiaomei, et al. 3D Finite-Difference Simulation of Ground Motion in the Beijing Area[J]. Earthquake Research in China, 2002, 18(4): 356 - 364.
- [64] Hernlund J W, Tackley P J. Three-Dimensional Spherical Shell Convection at Infinite Prandtl Number Using the Cubed Sphere' Method[M]. Amsterdam; Elsevier, 2003.
- [65] Igel H, Rioulet B, Mora P. Accuracy of Staggered 3 - D Finite-Difference Grids for Anisotropic Wave Propagation[C]//SEG Technical Program Expanded Abstracts 1992. Houston; Society of Exploration Geophysicists, 1992: 1244 - 1246.
- [66] Pitarka A. 3D Elastic Finite-Difference Modeling of Seismic Motion Using Staggered Grids with Nonuniform Spacing[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1999, 89(1): 54 - 68.
- [67] Bohlen T, Saenger E H. Accuracy of Heterogeneous Staggered-Grid Finite-Difference Modeling of Rayleigh Waves[J]. Geophysics, 2006, 71(4): T109 - T115.
- [68] 李建平,翁爱华,李世文,等. 基于球坐标系下有限差分的地磁测深三维正演[J]. 吉林大学学报(地球科学版), 2018, 48(2): 411 - 419.  
Li Jianping, Weng Aihua, Li Shiwen, et al. 3 - D Forward Method for Geomagnetic Depth Sounding Based on Finite Difference Method in Spherical Coordinate [J]. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 2018, 48(2): 411 - 419.
- [69] 韩丽,胥铁潇,金胜昔,等. 基于双电层模型的频域震电响应数值模拟[J]. 吉林大学学报(地球科学版), 2022, 52(3): 737 - 743.  
Han Li, Xu Tiexiao, Jin Shengxi, et al. Numerical Simulation of Seismoelectric Response in the Frequency Domain Based on Double Electric Layer Model[J]. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 2022, 52(3): 737 - 743.
- [70] 张志佳,孙章庆,王瑞湖,等. 复杂地表起伏多重变加密网格有限差分法波动方程数值模拟[J]. 吉林大学学报(地球科学版), 2023, 53(2): 598 - 608.  
Zhang Zhijia, Sun Zhangqing, Wang Ruihu, et al. Numerical Simulation of Wave Equation Using Finite Difference Method with Rugged Variable Refined Multigrid in Complex Surface [J]. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 2023, 53(2): 598 - 608.
- [71] Gerya T V, May D A, Duretz T. An Adaptive Staggered Grid Finite Difference Method for Modeling Geodynamic Stokes Flows with Strongly Variable Viscosity [J]. Geochemistry, Geophysics, Geosystems, 2013, 14(4): 1200 - 1225.
- [72] Chávez-Negrete C, Domínguez-Mota F J, Román-Gutiérrez R. Interface Formulation for Generalized Finite Difference Method for Solving Groundwater

- Flow[J]. *Computers and Geotechnics*, 2024, 166: 105990.
- [73] Jaswon M A. Integral Equation Methods in Potential Theory: I[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1963, 275: 23 - 32.
- [74] Rizzo F J. An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics [J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1967, 25 (1): 83 - 95.
- [75] Sweedlow J L, Cruse T A. Formulation of Boundary Integral Equations for Three-Dimensional Elastoplastic Flow[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1971, 7(12): 1673 - 1683.
- [76] Cruse T A, Vanburen W. Three-Dimensional Elastic Stress Analysis of a Fracture Specimen with an Edge Crack [J]. *International Journal of Fracture Mechanics*, 1971, 7(1): 1 - 15.
- [77] Mendelson A. Solution of Elastoplastic Torsion Problem by Boundary Integral Method [R]. Washington D C: NASA, 1975.
- [78] Yin T, Hsiao G C, Xu L. Boundary Integral Equation Methods for the Two-Dimensional Fluid-Solid Interaction Problem[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2017, 55(5): 2361 - 2393.
- [79] Quevedo L, Morra G, Müller R D. Parallel Fast Multipole Boundary Element Method for Crustal Dynamics [J]. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2010, 10(1): 012012.
- [80] Liu Y, Wen Y, Li Z, et al. Coseismic Fault Model of the 2017 M<sub>w</sub> 6.5 Jiuzhagou Earthquake and Implications for the Regional Fault Slip Pattern[J]. *Geodesy and Geodynamics*, 2022, 13(2): 104 - 113.
- [81] 杜庆华,姚振汉,岑章志.我国工程中边界元法研究的十年[J].*力学与实践*, 1989, 11(1):5.  
Du Qinghua, Yao Zhenhan, Cen Zhangzhi. A Decade of Boundary Element Method Research in Chinese Engineering [J]. *Mechanics in Engineering*, 1989, 11 (1): 5.
- [82] 董春迎. 弹塑性边界元法的若干基础性研究及在接触问题上的应用[D]. 北京:清华大学,1992.  
Dong Chunying. Some Basic Studies on Elastoplastic Boundary Element Method and Its Application in Contact Problems [D]. Beijing: Tsinghua University, 1992.
- [83] 金朝嵩. 自适应边界元法的后验误差估计[J]. *重庆建筑大学学报*,2000, 22(6): 16 - 19.
- Jin Chaosong. A Posteriori Error Estimates for Adaptive Boundary Element Methods[J]. *Journal of Chongqing University*, 2000, 22(6): 16 - 19.
- [84] 吴云,申重阳,周硕愚,等. 基于边界元的非连续(块体系统)形变反分析法[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2003, 28(3): 345 - 350.
- Wu Yun, Shen Chongyang, Zhou Shuoyu, et al. An Inversion Method of DDA with BEM[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2003, 28(3): 345 - 350.
- [85] 焦龙,吴云,张跃刚. 用边界元法研究川西地区的形变场与应变场[J]. *大地测量与地球动力学*,2010, 30 (3): 35 - 38.
- Jiao Long, Wu Yun, Zhang Yuegang. Research on Deformation Field and Strain Field in Western Sichuan Area by BEM [J]. *Geodesy and Geodynamics*, 2010, 30(3): 35 - 38.
- [86] Ogawa M, Schubert G, Zebib A. Numerical Simulations of Three-Dimensional Thermal Convection in a Fluid with Strongly Temperature-Dependent Viscosity[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1991, 233(1): 299 - 328.
- [87] Tackley P J. Self-Consistent Generation of Tectonic Plates in Time-Dependent, Three-Dimensional Mantle Convection Simulations [J]. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 2000, 1(8): 1021.
- [88] Gerya T V, Yuen D A. Characteristics-Based Marker-in-Cell Method with Conservative Finite-Differences Schemes for Modeling Geological Flows with Strongly Variable Transport Properties [J]. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 2003, 140(4): 293 - 318.
- [89] Choblet G, Čadež O, Couturier F, et al. ŒDIPUS: A New Tool to Study the Dynamics of Planetary Interiors [J]. *Geophysical Journal International*, 2007, 170(1): 9 - 30.
- [90] Aziz K, Settari A. Petroleum Reservoir Simulation [M]. Radarweg: Elsevier Applied Science Publishers, 1986.
- [91] Jung B, Garven G, Boles J R. The Geodynamics of Faults and Petroleum Migration in the Los Angeles Basin, California[J]. *American Journal of Science*, 2015, 315(5): 412 - 459.
- [92] 马瑞杰,李欣. 岩溶裂隙地下水流数学模型求解的有限体积法及应用[J]. *吉林大学学报(地球科学版)*, 2005, 35(6): 84 - 87.
- Ma Ruijie, Li Xin. The Finite Volume Method and

- Application of Mathematical Model of Karst Groundwater Flow [J]. *Journal of Jilin University (Earth Science Edition)*, 2005, 35(6): 84 - 87.
- [93] Jenny P, Lee S H, Tchelepi H A. Adaptive Fully Implicit Multi-Scale Finite-Volume Method for Multi-Phase Flow and Transport in Heterogeneous Porous Media[J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, 217(2): 627 - 641.
- [94] Zhang Z. Error Estimates of Finite Volume Element Method for the Pollution in Groundwater Flow[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2009, 25(2): 259 - 274.
- [95] Cui X, Wong L N Y. A 3D Thermo-Hydro-Mechanical Coupling Model for Enhanced Geothermal Systems[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2021, 143(6): 104744.
- [96] Huang Y, Zhou Z F, Yu Z B. Simulation of Solute Transport Using a Coupling Model Based on Finite Volume Method in Fractured Rocks[J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2010, 22(1): 129 - 136.
- [97] Lucy L B. A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis [J]. *The Astronomical Journal*, 1977, 82(12): 1013 - 1024.
- [98] Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the Finite Element Method; Diffuse Approximation and Diffuse Elements [J]. *Computational Mechanics*, 1992, 10(5): 307 - 318.
- [99] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-Free Galerkin Methods [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37(2): 229 - 256.
- [100] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing Kernel Particle Methods [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, 20(8): 1081 - 1106.
- [101] Hardy R L. Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces [J]. *Journal of Geophysical Research*, 1971, 76(8): 1905 - 1915.
- [102] 张雄,刘岩,马上. 无网格法的理论及应用[J]. *力学进展*, 2009, 39(1): 1 - 36.  
Zhang Xiong, Liu Yan, Ma Shang. The Theory and Application of Meshfree Methods[J]. *Progress in Mechanics*, 2009, 39(1): 1 - 36.
- [103] Nguyen V P, Rabczuk T, Bordas S, et al. Meshless Methods; A Review and Computer Implementation Aspects [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, 79(3): 763 - 813.
- [104] 焦玉玲,刘金英,杨天行,等. 无网格法在地下水水位预测中的应用[J]. *吉林大学学报(地球科学版)*, 2007, 37(3): 535 - 540.
- Jiao Yuling, Liu Jinying, Yang Tianxing, et al. Application of Meshless Method in Groundwater Level Forecast[J]. *Journal of Jilin University (Earth Science Edition)*, 2007, 37(3): 535 - 540.
- [105] 王月英. 地震波正演模拟中无单元 Galerkin 法初探[J]. *地球物理学进展*, 2007, 22(5): 1539 - 1544.  
Wang Yueying. Study of Element-Free Galerkin Method in Seismic Forward Modeling[J]. *Progress in Geophysics*, 2007, 22(5): 1539 - 1544.
- [106] 李坤,黄其柏,林立广. 二阶时域波动方程的无网格方法求解[J]. *华中科技大学学报(自然科学版)*, 2011, 39(3): 26 - 29.  
Li Kun, Huang Qibai, Lin Liguang. Solving Second-Order Time Domain Wave Equations by Meshless Method [J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2011, 39(3): 26 - 29.
- [107] Wang L, Wang Z, Qian Z. A Meshfree Method for Inverse Wave Propagation Using Collocation and Radial Basis Functions [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 322: 311 - 350.
- [108] 冯德山,王洪华,戴前伟. 基于无单元 Galerkin 法探地雷达正演模拟[J]. *地球物理学报*, 2013, 56(1): 298 - 308.  
Feng Deshan, Wang Honghua, Dai Qianwei. Forward Simulation of Ground Penetrating Radar Based on the Element-Free Galerkin Method [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2013, 56(1): 298 - 308.
- [109] 嵇艳鞠,黄廷哲,黄婉玉,等. 起伏地形下各向异性的 2D 大地电磁无网格法数值模拟[J]. *地球物理学报*, 2016, 59(12): 4483 - 4493.  
Ji Yanju, Huang Tingzhe, Huang Wanyu, et al. 2D Anisotropic Magnetotelluric Numerical Simulation Using Meshfree Method Under Undulating Terrain [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2016, 59(12): 4483 - 4493.
- [110] 李俊杰,严家斌. 无网格点插值法大地电磁二维正演数值模拟[J]. *石油物探*, 2014, 53(5): 617 - 626.  
Li Junjie, Yan Jiabin. Magnetotelluric Two-Dimensional Forward Numerical Modeling by Meshfree Point Interpolation Method [J]. *Geophysical Prospecting for Petroleum*, 2014, 53(5): 617 - 626.

- [111] 魏德敏, 胡源喆, 江雪玲. 边坡弹塑性稳定性分析的无网格法[J]. 力学与实践, 2012, 34(3): 12-17.  
Wei Demin, Hu Yuanzhe, Jiang Xueling. Application of Meshless Method in Analysis of Elastic-Plastic Stability of an Edge Slope [J]. Mechanics in Engineering, 2012, 34(3): 12-17.
- [112] McDougall S, Hungr O. A Model for the Analysis of Rapid Landslide Motion Across Three-Dimensional Terrain [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2004, 41(6): 1084-1097.
- [113] Lin S, Cao X, Zheng H, et al. An Improved Meshless Numerical Manifold Method for Simulating Complex Boundary Seepage Problems [J]. Computers and Geotechnics, 2023, 155: 105211.
- [114] Cao X, Lin S, Liang Z, et al. Meshless Numerical Manifold Method with Novel Subspace Tracking and CSS Locating Techniques for Slope Stability Analysis [J]. Computers and Geotechnics, 2024, 166: 106025.
- [115] Van Keken P E, Wada I, Sime N, et al. Thermal Structure of the Forearc in Subduction Zones; A Comparison of Methodologies [J]. Geochemistry, Geophysics, Geosystems, 2019, 20(7): 3268-3288.
- [116] Aagaard B T, Knepley M G, Williams C A. A Domain Decomposition Approach to Implementing Fault Slip in Finite-Element Models of Quasi-Static and Dynamic Crustal Deformation [J]. Journal of Geophysical Research; Solid Earth, 2013, 118(6): 3059-3079.
- [117] Ward L A, Smith-Konter B R, Xu X, et al. Seismic Moment Accumulation Response to Lateral Crustal Variations of the San Andreas Fault System [J]. Journal of Geophysical Research; Solid Earth, 2021, 126(4): e2020JB021208.
- [118] Holden L, Cas R, Fournier N, et al. Modelling Ground Deformation Patterns Associated with Volcanic Processes at the Okataina Volcanic Centre [J]. Journal of Volcanology and Geothermal Research, 2017, 344: 65-78.
- [119] Aochi H, Tsuda K. Dynamic Rupture Simulations Based on Depth-Dependent Stress Accumulation [J]. Geophysical Journal International, 2022, 233(1): 182-194.
- [120] Oral E, Ampuero J P, Ruiz J, et al. A Method to Generate Initial Fault Stresses for Physics-Based Ground Motion Prediction Consistent with Regional Seismicity [J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 2022, 112(6): 2812-2827.
- [121] 祝贺君, 刘沁雅, 杨继东. 地震学全波形反演进展 [J]. 地球与行星物理论评, 2023, 54(3): 287-317.  
Zhu Hejun, Liu Qinya, Yang Jidong. Recent Progress on Full Waveform Inversion [J]. Reviews of Geophysics and Planetary Physics, 2023, 54(3): 287-317.
- [122] 陈卫忠, 伍国军, 戴永浩, 等. 废弃盐穴地下储气库稳定性研究 [J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(4): 848-854.  
Chen Weizhong, Wu Guojun, Dai Yonghao, et al. Stability Analysis of Abandoned Salt Caverns Used for Underground Gas Storage [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(4): 848-854.
- [123] 张广明, 熊春明, 刘合, 等. 复杂断块地应力场数值模拟方法研究 [J]. 断块油气田, 2011, 18(6): 710-713.  
Zhang Guangming, Xiong Chunming, Liu He, et al. Numerical Simulation Method for In-Situ Stress Field in Complex Fault Block [J]. Fault-Block Oil & Gas Field, 2011, 18(6): 710-713.
- [124] 李帆, 杨建国. 黄土边坡稳定性分析方法研究 [J]. 铁道工程学报, 2008, 30(12): 33-36.  
Li Fan, Yang Jianguo. Study of Analysis Method for Loess Slope Stability [J]. Journal of Railway Engineering Society, 2008, 30(12): 33-36.
- [125] Hampel A, Lüke J, Krause T, et al. Finite-Element Modelling of Glacial Isostatic Adjustment (GIA): Use of Elastic Foundations at Material Boundaries Versus the Geometrically Non-Linear Formulation [J]. Computers & Geosciences, 2019, 122: 1-14.
- [126] Volpini C, Douglas J, Nielsen A H. Guidance on Conducting 2D Linear Viscoelastic Site Response Analysis Using a Finite Element Code [J]. Journal of Earthquake Engineering, 2021, 25(6): 1153-1170.
- [127] Zhou S, Zhuang X, Rabczuk T. A Phase-Field Modeling Approach of Fracture Propagation in Poroelastic Media [J]. Engineering Geology, 2018, 240: 189-203.
- [128] Xu J, Lan W, Ren C, et al. Modeling of Coupled Transfer of Water, Heat and Solute in Saline Loess Considering Sodium Sulfate Crystallization [J]. Cold Regions Science and Technology, 2021, 189: 103335.

- [129] 叶海林,郑颖人,杜修力,等. 边坡动力破坏特征的振动台模型试验与数值分析[J]. 土木工程学报, 2012, 45(9): 128 - 135.
- Ye Hailin, Zheng Yingren, Du Xiuli, et al. Shaking Table Model Test and Numerical Analysis on Dynamic Failure Characteristics of Slope[J]. China Civil Engineering Journal, 2012, 45(9): 128 - 135.
- [130] Mitchell M A, Peacock J R, Burgess S D. Imaging the Magmatic Plumbing of the Clear Lake Volcanic Field Using 3 - D Gravity Inversions[J]. Journal of Volcanology and Geothermal Research, 2023, 435: 107758.
- [131] Heagy L J, Cockett R, Kang S, et al. A Framework for Simulation and Inversion in Electromagnetics[J]. Computers & Geosciences, 2017, 107: 1 - 19.
- [132] Herrera M T, Crempien J G F, Cembrano J, et al. Seismic Cycle Controlled by Subduction Geometry: Novel 3 - D Quasi-Dynamic Model of Central Chile Megathrust[J]. Geophysical Journal International, 2024, 237(2): 772 - 787.
- [133] Hassard P. Comparison of Lattice Boltzmann and Boundary Element Methods for Stokes and Viscous-Inertial Flow in a Two-Dimensional Porous Medium [J]. Transport in Porous Media, 2023, 150 (3): 675 - 707.
- [134] Dhanya J, Raghukanth S T G. Implication of Source Models on Tsunami Wave Simulations for 2004 (Mw 9. 2 ) Sumatra Earthquake [ J ]. Natural Hazards, 2020, 104(1): 279 - 304.
- [135] Fisher T L, Harris R A. Reconstruction of 1852 Banda Arc Megathrust Earthquake and Tsunami[J]. Natural Hazards, 2016, 83(1): 667 - 689.
- [136] Guo Z, Rüpke L, Tao C. Hydrothermal Foam v1.0: A 3 - D Hydrothermal Transport Model for Natural Submarine Hydrothermal Systems[J]. Geoscientific Model Development, 2020, 13(12): 6547 - 6565.
- [137] Douglas S, Nistor I. On the Effect of Bed Condition on the Development of Tsunami-Induced Loading on Structures Using OpenFOAM[J]. Natural Hazards, 2015, 76(1): 1335 - 1356.
- [138] Li Y, Qi J. Salt-Related Contractional Structure and Its Main Controlling Factors of Kelasu Structural Zone in Kuqa Depression: Insights from Physical and Numerical Experiments [ J ]. Procedia Engineering, 2012, 31: 863 - 867.
- [139] Cruz L, Malinski J, Wilson A, et al. Erosional Control of the Kinematics and Geometry of Fold-and-Thrust Belts Imaged in a Physical and Numerical Sandbox [ J ]. Journal of Geophysical Research, 2010, 115(B9): B09404.
- [140] Sandiford D, Moresi L. Improving Subduction Interface Implementation in Dynamic Numerical Models[J]. Solid Earth, 2019, 10(3): 969 - 985.
- [141] Liu H, Ban S, Bédard K, et al. Characteristics of Precambrian Basement Intruded by Cretaceous Geological Intrusions in Montereign Igneous Province and Their Impacts on Regional Thermal Structure[J]. Advances in Geo-Energy Research, 2022, 6(3): 206 - 220.
- [142] Li M. The Influence of Uncertain Mantle Density and Viscosity Structures on the Calculations of Deep Mantle Flow and Lateral Motion of Plumes [ J ]. Geophysical Journal International, 2023, 233 (3): 1916 - 1937.
- [143] Yuan Q, Li M, Desch S J, et al. Moon-Forming Impactor as a Source of Earth's Basal Mantle Anomalies[J]. Nature, 2023, 623: 95 - 99.
- [144] Xu H, Li J, Wang L, et al. Influence of Mantle Plume on Continental Rift Evolution: A Case Study of the East African Rift System[J/OL]. Petroleum Research, 2024. [2024 - 05 - 10]. doi: 10.1016/j.ptlrs.2024.02.001.
- [145] Dong M, Hao T, Xu L, et al. Subduction Without Volcanic Arc Magma: Insights from Two Young Subduction Zones in the Western Pacific [ J ]. Tectonophysics, 2024, 874: 230231.
- [146] Chambers E L, Bonadio R, Fulla J, et al. Determining Subsurface Temperature & Lithospheric Structure from Joint Geophysical-Petrological Inversion: A Case Study from Ireland [J]. Tectonophysics, 2023, 869: 230094.
- [147] Mousavi N, Tatar M, Moghadam H S, et al. Integrated Geophysical-Petrological Model of Damavand Volcano, North Iran: Compositional Structure of Crust and Upper Mantle from Seismic Temperature Profiling and Gravity Anomaly Fitting [ J ]. Journal of Volcanology and Geothermal Research, 2023, 442: 107913.
- [148] Oualid M, Ebong E D. Lithospheric and Asthenospheric Properties of the Saharan Platform Inferred from Potential Field, Geoid, and Heat Flow Data[J]. Journal of African Earth Sciences, 2024, 209(1): 105124.
- [149] Hardy S. Discrete Element Modelling of

- Extensional, Growth, Fault-Propagation Folds[J]. *Basin Research*, 2019, 31(3): 584 - 599.
- [150] Meng W J, Chen Z A, Bai W M. Numerical Simulation on Process of the Plume-Lithosphere Interaction [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2015, 58(2): 495 - 503.
- [151] Fan B, Chen Z A, Bai W M. Numerical Simulation on the Melting Process of the Mantle Plume-Lithosphere Interaction [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2018, 61(4): 1341 - 1351.
- [152] Hernández P A, Calvari S, Ramos A, et al. Magma Emission Rates from Shallow Submarine Eruptions Using Airborne Thermal Imaging [J]. *Remote Sensing of Environment*, 2014, 154: 219 - 225.
- [153] Lichtenberg T, Schaefer L K, Nakajima M, et al. Geophysical Evolution During Rocky Planet Formation[J/OL]. *arXiv Preprint*, 2022. [2024 - 05 - 10].doi:10.48550/arXiv.2203.10023.
- [154] Lichtenberg T, Krijt S. System-Level Fractionation of Carbon from Disk and Planetesimal Processing [J]. *The Astrophysical Journal Letters*, 2021, 913 (2): L20.
- [155] Giunchi C, Sabadini R, Boschi E, et al. Dynamic Models of Subduction: Geophysical and Geological Evidence in the Tyrrhenian Sea [J]. *Geophysical Journal International*, 1996, 126(2): 555 - 578.
- [156] Song R, Cui M, Liu J, et al. A Pore-Scale Simulation on Thermal-Hydromechanical Coupling Mechanism of Rock[J]. *Geofluids*, 2017, 2017(1): 1 - 12.
- [157] Kaus B J P, Popov A, May D A. Recent Progress in Modelling 3D Lithospheric Deformation[C]//EGU General Assembly Conference Abstracts. Vienna: Copernicus Publications, 2012: 14116.
- [158] Thielmann M, May D A, Kaus B J P. Discretization Errors in the Hybrid Finite Element Particle-in-Cell Method[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 2014, 171(9): 2165 - 2184.
- [159] Adamuszek M, Dabrowski M, Schmalholz S M, et al. Estimating Rheological Parameters of Anhydrite from Folded Evaporite Sequences: Implications for Internal Dynamics of Salt Structure [C]//Geophysical Research Abstracts. Vienna: EGU General Assembly Conference, 2015: 9954.
- [160] Okuwaki R, Yagi Y, Taymaz T, et al. Multi-Scale Rupture Growth with Alternating Directions in a Complex Fault Network During the 2023 South-Eastern Türkiye and Syria Earthquake Doublet[J]. *Geophysical Research Letters*, 2023, 50 (12): e2023GL103480.
- [161] Adams A C, Stegman D R, Mohammadzadeh H, et al. Plume-Induced Delamination Initiated at Rift Zones on Venus [J]. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 2023, 128(10): e2023JE007879.
- [162] Gülcher A J P, Golabek G J, Thielmann M, et al. Narrow, Fast, and “Cool” Mantle Plumes Caused by Strain-Weakening Rheology in Earth’s Lower Mantle [J]. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 2022, 23(10): e2021GC010314.