

基于低秩模型和残差模型的图像降噪

杨雅兰¹, 胡红萍^{1*}, 杨正民²

(1. 中北大学 数学学院, 山西 太原 030051; 2. 山西电子科技学院 信创产业学院, 山西 临汾 041099)

摘要: 现有基于组稀疏表示的图像恢复方法大多利用非局部自相似先验特性, 相似的小块聚类成组, 对每组系数施加稀疏度, 从而有效保留图像纹理信息。然而, 这些方法只对组中每个单独的块施加了简单稀疏性, 而忽略了其他有益的图像属性。基于此, 提出了一种基于低秩模型和残差模型的图像去噪算法, 不仅利用了每组相似块的稀疏性和低秩性, 还利用残差学习方法来自动估计图像块的真实稀疏表示。实验结果表明所提算法充分考虑了块之间的关系, 将块的相关性和特异性结合, 有效实现了图像去噪, 从而得到高质量的恢复图像。同时, 实验还表明所提算法的峰值信噪比平均增益比块匹配三维协同滤波(Block-Matching and 3D Filtering, BM3D)算法提高0.34 dB, 比非局部集中稀疏表示(Non-Local Centralized Sparse Representation, NCSR)提高0.48 dB, 比低秩正则联合稀疏(Low-Rank Regularized Joint Sparsity, LRJS)提高0.2 dB, 比低秩引导的组稀疏表示(Low-Rankness Guided Group Sparse Representation, LGSR)和GSR_SRLR提高0.04 dB, 且平均结构相似性值达到次高, 足以证明其优于许多流行或先进的去噪算法。

关键词: 图像去噪; 稀疏表示; 非局部自相似; 交替最小化

中图分类号: TP391.41 **文献标识码:** A **doi:** 10.62756/csjs.1671-7449.2025063

引用格式: 杨雅兰, 胡红萍, 杨正民. 基于低秩模型和残差模型的图像降噪[J]. 测试技术学报, 2025, 39(5): 548-557.

YANG Yalan, HU Hongping, YANG Zhengmin. Image denoising based on low rank model and residual model [J]. Journal of Test and Measurement Technology, 2025, 39(5): 548-557.

Image Denoising Based on Low Rank Model and Residual Model

YANG Yalan¹, HU Hongping^{1*}, YANG Zhengmin²

(1. School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China;

2. School of Information and Innovation Industry, Shanxi University of Electronic Science and Technology, Linfen 041099, China)

Abstract: Most existing group sparse representations based image restoration methods utilize the non-local self-similarity prior property to cluster similar small blocks into groups and apply sparsity to each group of coefficients, which effectively preserves image texture information. However, these methods only apply simple sparsity to each individual block in the group, but ignore other beneficial image attributes. Based on this, an image-denoising algorithm based on a low-rank model and a residual model is proposed. It not only utilizes the sparsity and low rank of each group of similar blocks, but also uses residual learning methods to automatically estimate the true sparse representation of image blocks. The experimental results show that the proposed algorithm fully considers the relationship between blocks, com-

收稿日期: 2024-08-12

基金项目: 山西省基础研究计划资助项目(20210302123019, 202103021224195, 202103021224212, 202103021223189); 山西省回国留学人员科研项目(2021-108)

作者简介: 杨雅兰(2001-), 女, 硕士生, 主要从事图像处理研究。E-mail: 1114377061@qq.com。

* 通信作者: 胡红萍(1973-), 女, 教授, 博士, 主要从事应用数学研究。E-mail: huhongping@nuc.edu.cn。

bines the correlation and specificity of blocks and then effectively performs image denoising to obtain high-quality restored images. The experimental results also show that the PSNR average gain of the proposed algorithm was 0.34 dB higher than BM3D, 0.48 dB higher than NCSR, 0.2 dB higher than LRJS, 0.04 dB higher than LGSR and GSR-SRLR, and the average SSIM value reached the second highest, which is sufficient to prove that it is superior to many popular or state-of-the-art denoising algorithms.

Key words: image denoising; sparse representation; nonlocal self-similarity; alternating minimization

0 引言

尽管现代成像设备性能不断提升,但图像采集过程中由传感器噪声、光照不足等因素导致的图像退化仍不可避免,这使得图像去噪成为计算成像领域长期存在的关键问题之一^[1-2]。从数学模型角度,图像去噪可表述为从含噪观测图像 Y 中恢复潜在干净图像 X 的逆问题,其关系通常建模为

$$Y = X + E, \quad (1)$$

式中: E 为加性高斯白噪声,其标准差为 σ_E 。由于该问题具有严重的不适定性,研究者常通过引入图像先验模型对解空间进行正则化约束^[3-4]。

而基于局部图像块的稀疏表示先验因其对自然图像统计特性的强表征能力,自 20 世纪 90 年代以来逐渐成为主流方向。例如,Elad 等^[5]提出 K 奇异值分解(K-Singular Value Decomposition, K-SVD)算法,通过完备字典学习将图像块表示为稀疏线性组合,显著提升了去噪性能。然而,此类方法以独立处理单个图像块为基本单元,虽能有效抑制噪声,却忽视了图像中广泛存在的非局部相似性(Non-local Self-Similarity, NSS)结构^[6],导致对纹理细节和全局结构保持不足,尤其在复杂边缘区域易产生过度平滑或伪影^[5]。

针对上述局限,Buades 等^[1]开创性地提出 NSS 先验理论,强调自然图像中相似结构在非局部区域的重复性特征。基于此,Dabov 等^[7]提出的块匹配三维协同滤波(Block-Matching 3D Filtering, BM3D)算法,通过构建三维相似块组并进行协同稀疏变换,首次将 NSS 先验与稀疏表示相结合,在去噪性能上取得突破性进展。受此启发,研究者进一步提出组稀疏表示(Group Sparse Representation, GSR)模型^[8],通过联合约束相似块组的稀疏性以增强表征能力。然而,传统 GSR 模型未充分考虑相似块组间的内在低维流形特性,导致对噪声敏感。为此,Yuan 等^[9]设计加权低秩稀疏表示模型,将卷积稀疏编码与非局部统计建模

相结合,进一步提升了局部平滑性与全局结构一致性;Zha 等^[10]提出低秩引导的组稀疏表示(Low-Rankness Guided GSR, LGSR)模型,通过低秩约束挖掘相似块组的子空间结构。尽管如此,上述方法在噪声干扰下仍难以准确恢复真实稀疏表示,尤其在噪声水平较高时易产生基字典偏移问题。

为解决该问题,残差学习框架被引入稀疏表示模型。Dong 等^[11]指出相似块组的真实表示与学习表示间应存在可建模的残差关系。基于此,非凸结构稀疏性残差约束(Nonconvex Structural Sparsity Residual Constraint, NSSRC)^[12]将结构稀疏表示和非凸稀疏性残差约束集成在一起估计真稀疏编码。Zha 等^[13]在 GSR 模型中引入结构残差约束,通过显式分离噪声成分提升恢复精度;Cai 等^[14]进一步提出基于组稀疏表示与残差学习的自适应模型,以数据驱动方式逼近真实表示。然而,现有方法多侧重对块间相关性(如低秩约束)或特异性(如残差建模)的单一利用,未能有效协同二者优势,过度强调低秩性可能导致局部特征丢失,而独立残差约束则可能忽略块间结构关联性。

针对这一核心挑战,本文提出一种融合低秩模型与残差模型的图像去噪算法。通过构建分层优化框架,在低秩约束下保持相似块组的全局相关性,同时利用残差学习自适应捕捉个体块的特异性差异,实现稀疏表示精度与结构一致性的均衡优化。实验表明,该方法在纹理保持与噪声抑制方面较现有方法具有显著优势。

1 相关工作

1.1 组稀疏表示

基于组的稀疏表示方法^[8]通常引入图像块分组策略。通过这种块分组策略,GSR 可以利用图像的非局部自相似性显著提升对纹理和边缘结构的保持能力。具体来说,就是给定一个图像 $y \in \mathbb{R}^N$,它被分割成 n 个大小为 $\sqrt{b} \times \sqrt{b}$ 的重叠

块 y_i 。对每个示例块 y_i ，在一个局部窗口 $L \times L$ 内执行 k 最近邻 (k Nearest Neighbor, KNN) 算法的一个变体^[15]，以搜索 m 个最相似的块。之后，选定的 m 个相似块构成一个组矩阵 $Y_i \in \mathbb{R}^{b \times m}$ ，即 $Y_i = \{y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,m}\}$ ，其中 Y_i 中的每一列 $y_{i,j}$ 表示与示例块 y_i 相似的第 j 个块 ($j = 1, \dots, m$)。因此，具有相似结构的块组成的矩阵 Y_i 被称为一个组。一般来说，GSR 模型从每个组 Y_i 中学习一个字典 D_i 。通过学习到的字典 D_i ，每个组 Y_i 可以通过解决以下最小化问题来稀疏表示^[4]，

$$\hat{A}_i = \arg \min_{A_i} \left(\frac{1}{2} \|Y_i - D_i A_i\|_F^2 + \lambda \|A_i\|_p \right), \forall i, \quad (2)$$

式中： $\|\cdot\|_F$ 表示 Frobenius 范数； $\|\cdot\|_p$ 表示 ℓ_p 范数，它施加在 A_i 的每一列上； λ 为一个非负常数。通过解决式(2)获得了所有组稀疏系数 $\{\hat{A}_i\}_{i=1}^n$ ，就可以通过 $\hat{x} = D\hat{A}$ 重构出潜在的期望图像 \hat{x} ，其中， D 和 \hat{A} 分别为 $\{D_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{\hat{A}_i\}_{i=1}^n$ 集合。

1.2 低秩模型

基于 1.1 节中的组构建过程， Y_i 由许多非局部相似块构成，被认为具有低秩 (Low Rank, LR) 性^[16]。受这一关键属性的启发，低秩近似方法被广泛应用于各种图像恢复任务，最具代表性的是核范数最小化 (Nuclear Norm Minimization, NNM)。具体来说，对一个矩阵 $Y_i \in \mathbb{R}^{b \times m}$ ，NNM 的目标是获得一个秩为 $r \ll \min(b, m)$ 的低秩矩阵 L_i ，NNM 形式如下

$$\hat{L}_i = \arg \min_{L_i} \left(\frac{1}{2} \|Y_i - L_i\|_F^2 + \lambda \|L_i\|_* \right), \forall i, \quad (3)$$

式中： $\|\cdot\|_*$ 为核范数。潜在的期望图像 \hat{x} 可通过聚合所有低秩矩阵 $\{\hat{L}_i\}_{i=1}^n$ 来重构。

1.3 残差模型

稀疏表示学期望 Y_i 学得的稀疏系数 A_i 应尽可能接近对应图像块组的真实表示，然而，由于 Y_i 上的各种退化 (如噪声、压缩等)，式(2)中的系数矩阵 A_i 可能偏离对应块组的真实表示。因此，Dong 等^[11] 在式(2)中加入残差约束，即

$$R_i = \|A_i - B_i\|_F^2, \forall i,$$

式中： B_i 为真实表示。显然，该约束迫使学习到的稀疏表示 A_i 尽可能接近真实表示 B_i ，即最小化残差 R_i 。

为解决这个问题，传统方法通常假设同一块组内所有图像块共享相同的真实表示。具体地，通过线性加权融合稀疏系数矩阵 A_i 的列向量，构造全局共享的真实表示 $b \in \mathbb{R}^d$ ，即

$$b = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m w_j A_{i,j}, \quad (4)$$

式中： w_j 为第 j 个块与组中心的欧氏距离权重； $A_{i,j}$ 为 A_i 的第 j 列。真实表示设置为 $B_i = [b, \dots, b]$ 。然而，这种全局共享机制完全忽略了块间特异性差异，导致对局部细节的适应性不足。

为了克服这个问题，Cai 等^[14] 提出了改进的残差模型，假设对于每个块组 Y_i ，学习到的表示和真实表示之间存在密切关系，即 B_i 可以从 A_i 中学习。具体来说，就是真实表示 B_i 可由 A_i 线性表示，即

$$B_i = A_i W_i, \quad (5)$$

式中： $W_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是一个权重矩阵。由于期望 A_i 与学习到真实表示足够接近，因此需要确定权重 W_i 。Cai 等^[14] 通过对 W_i 施加核范数约束来学习合适的 W_i ，具体为

$$\begin{aligned} \hat{W}_i = \arg \min_{W_i} & \|W_i\|_* + \frac{\gamma}{2} \|A_i - A_i W_i\|_F^2 \\ \text{s.t. } & W_i = W_i', \forall i. \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)可以看作是在式(2)的基础上对 A_i 施加自表示模型^[17] 的约束，期望通过学习好的权重来获得块的真实表示。

2 本文去噪算法

2.1 恢复模型

如前所述，现有的 GSR 模型大多利用非局部相似块的强相关性来有效地保留图像纹理信息。然而，他们只对群体中的单个块施加简单的稀疏性，忽略了其他有益的图像属性，从而限制了恢复效果。因此，考虑到分组后的非局部相似块组具有低秩性，以及偏离真实表示的稀疏系数会影响去噪效果。本文将低秩模型与基于自表示的残差模型相结合，提出算法的总体目标函数表述为

$$\begin{aligned} \arg \min_{\{A_i, L_i, W_i, X\}} & \frac{1}{2} \|Y - X\|_F^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_i \|Q_i Y - D_i A_i\|_F^2 + \\ & \beta \sum_i \|A_i\|_p + \frac{\rho}{2} \sum_i \|D_i A_i - L_i\|_F^2 + \tau_1 \sum_i \|L_i\|_* + \\ & \frac{\gamma}{2} \sum_i \|A_i - A_i W_i\|_F^2 + \tau_2 \sum_i \|W_i\|_* \\ \text{s.t. } & W_i = W_i', \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (7)$$

式中: α, ρ, γ 为使解可行的平衡因子; β, τ_1, τ_2 为正则化参数; Q_i 为从 X 中提取第 i 个补丁组的矩阵算子, 即 $Q_i Y = Y_i$; L_i 为低秩矩阵。

2.2 算法优化

本节通过交替最小化策略解决式(7)中提出的图像去噪问题。

2.2.1 L_i 子问题

更新矩阵 L_i : 固定 A_i, W_i, X , 去除不相关的项, 式(7)中的目标函数等同于关于 L_i 的以下形式

$$\hat{L}_i = \arg \min_{L_i} \frac{1}{2} \|D_i A_i - L_i\|_F^2 + \frac{\tau_1}{\rho} \|L_i\|_*, \forall i, \quad (8)$$

式中: $\|L_i\|_* = \sum_j \delta_{i,j}$, $\forall j = 1, \dots, d$, 且 $\delta_{i,j}$ 为矩阵 L_i 的第 j 个奇异值。基于奇异值阈值(Singular Value Thresholding, SVT)算法^[18], 可以得到式(8)的闭式解为

$$\hat{L}_i = U_i \text{Soft} \left(\Delta_i, \frac{\tau_1}{\rho} \right) V_i^T, \forall i, \quad (9)$$

式中: $D_i A_i = U_i \Delta_i V_i^T$ 为对重构组 $D_i A_i$ 的奇异值分解, 并且软阈值处理被应用于奇异值矩阵 Δ_i 的对角元素上。

2.2.2 W_i 子问题

更新权重矩阵 W_i : 固定 A_i, L_i, X , 去除不相关的项, 式(7)中的目标函数等同于关于 W_i 的以下形式

$$\hat{W}_i = \arg \min_{W_i} \frac{\gamma}{2} \|A_i - A_i W_i\|_F^2 + \tau_2 \|W_i\|, \quad (10)$$

s.t. $W_i = W_i', \forall i.$

式(10)也可以通过矩阵 A_i 的奇异值分解来有效求解, 即 $A_i = U_i \Delta_i V_i'$ 。根据文献[17], 式(9)的最优解可以表示为

$$\hat{W}_i = V_i P_{\tau_2/\gamma}(\lambda_i) V_i', \quad (11)$$

其中, $P_{\tau_2/\gamma}$ 定义为

$$P_{\tau_2/\gamma}(\lambda_i) = \begin{cases} 1 - \frac{\tau_2}{\gamma \lambda_i^2}, & \lambda_i > \sqrt{\tau_2/\gamma}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (12)$$

2.2.3 A_i 子问题

更新组稀疏表示 A_i : 固定 W_i, L_i, X , 去除不相关的项, 式(7)中关于 A_i 的目标函数可以近似表述为

$$\hat{A}_i = \arg \min_{A_i} \frac{\alpha}{2} \|Q_i Y - D_i A_i\|_F^2 + \frac{\rho}{2} \|D_i A_i - L_i\|_F^2 + \frac{\gamma}{2} \|A_i - A_i W_i\|_F^2 + \beta \|A_i\|_p =$$

$$\arg \min \frac{1}{2} \|G_i - D_i A_i\|_F^2 + \frac{\gamma}{2} \|A_i - A_i W_i\|_F^2 + \beta \|A_i\|_p, \forall i, \quad (13)$$

式中: $G_i = (\alpha Q_i X + \rho L_i) / (\alpha + \rho)$ 。为了更好地适应图像局部结构, Zha 等^[10]从每组 G_i 中使用主成分分析学习字典 D_i , 并使用广义软阈值(Generalized Soft Thresholding, GST)算法^[19]求解式(13)。具体地, A_i 的更新规则表述为

$$A_i = \text{GST}(S_i, \mu, p, t). \quad (14)$$

根据 Cai 等^[14]提出的残差模型, S_i 和 μ 定义为

$$\begin{cases} S_i = (A_i - D_i^T X) + \gamma A_i (I - W_i - W_i' + W_i W_i'), \\ \mu = \frac{\beta}{1 + \gamma \|I - W_i\|^2}, \end{cases}$$

式中: t 为迭代次数。

2.2.4 X 子问题

更新恢复图像矩阵 X : 固定矩阵 A_i, W_i, L_i , 图像的恢复可以表述为

$$\hat{X} = \arg \min_X \frac{1}{2} \|Y - X\|_F^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_i \|Q_i X - D_i A_i\|_F^2. \quad (15)$$

该问题具有唯一的闭合解, 通过将 X 的偏导数设置为零, 式(15)的封闭形式解推导为

$$\hat{X} = \left(I + \alpha \sum_i Q_i' Q_i \right)^{-1} \left(Y + \alpha \sum_i Q_i' D_i A_i \right), \quad (16)$$

式中: $D_i A_i$ 为已经去噪的图像相似块组, Q_i' 为将恢复后的块放回原始图像的操作符。实际上, 图像 \hat{X} 是通过稀疏表示重建图像和噪声图像 Y 加权平均而来。

2.3 参数选择

在所提模型式(7)中有 6 个超参数, 即 $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \tau_1, \tau_2$, 通常根据经验选择固定值。但是, 这不能保证整个算法的稳定性。因此, 本文采用自适应参数调整策略, 使所提算法更具鲁棒性和实用性。首先, 使用迭代正则化策略^[20]来更新噪声方差 σ_E^2 ,

$$\sigma_E^{(k)} = c_0 \sqrt{\left(\sigma_E^2 - \|Y - \hat{X}^{(k)}\|_F^2 \right)}, \quad (17)$$

式中: k 为第 k 次迭代; c_0 为一个正数。此外, Cai 等^[14]假设稀疏编码 A_i 服从超拉普拉斯分布^[21], 稀疏残差 R_i 遵循高斯分布, 则

$$\beta = \frac{(\sigma_E^{(k)})^2}{\delta_i + \epsilon}, \quad (18)$$

$$\gamma = \frac{(\sigma_E^{(k)})^2}{\delta_i^2 + \varepsilon} \quad (19)$$

在每次迭代中,正则化参数 τ_2 根据LR惩罚进行自适应调整^[22],

$$\tau_2 = \frac{(\sigma_E^{(k)})^2}{\theta_i + \varepsilon}, \quad (20)$$

式中: δ_i 和 θ_i 分别为 \hat{A}_i 和 $\hat{\Delta}_i$ 的标准方差; ε 为一个非常小的常数,避免除以零。

此外,动态地调整参数 α, ρ, τ_1 ,

$$\alpha = c_1 (\sigma_E^{(k)})^2, \quad (21)$$

$$\rho = c_2 (\sigma_E^{(k)})^2, \quad (22)$$

$$\tau_1 = c_3 \delta_i, \quad (23)$$

式中: c_1, c_2, c_3 为预定义的正数。这意味着参数 α, ρ 和 τ 分别与噪声方差 $(\sigma_E^{(k)})^2$ 和 A_i 的标准方差 δ_i 成比例。

2.4 算法流程

本文图像去噪算法通过构建分层交替优化框架实现,其核心在于对稀疏表示、低秩约束与残差学习的协同迭代更新。算法流程如表1所示。

3 实验结果与分析

图1所示为图像去噪中广泛使用的12幅测试图像。用所提图像去噪算法对这12张测试图像测试,同时选择2个经典的去噪算法(BM3D^[7]和非局部集中稀疏表示^[11](Non-Local Centralized Sparse Representation, NCSR))和3个先进的去噪算法(低秩正则联合稀疏(Low-rank Regularized Joint Sparsity, LRJS)^[3], LGSR^[10]和 GSR_SRLR^[14])作比较。



图1 12幅测试图像

Fig. 1 12 tested images

表1 算法流程

Tab. 1 Flowchart of proposed algorithm

算法流程

输入: 退化的图像 Y 。

输出: 恢复的图像 \hat{X} 。

1: 初始化 $\hat{X}^{(0)} = Y, k=0, \sigma_E^{(0)}$ 。

2: 设置参数 c_0, c_1, c_2, c_3 和 p 。

3: While $k \leq \text{Max} - \text{Iter}$

4: for $\hat{X}^{(k)}$ 中的每个参考块 x_i

5: 搜索非局部相似块构成块组 X_i

同时使 $D_i A_i = X_i$

6: end for

7: for $\hat{X}^{(k)}$ 中每个块组 X_i

8: $[U_i, \Delta_i, V_i] = \text{SVD}(D_i A_i)$

9: 根据(18), (20)计算 τ_2, ρ

10: 根据(7)更新 \hat{L}_i

11: 根据(16), (21)计算 γ, τ_1

12: 根据(9)更新 \hat{W}_i

13: 从 G_i 中使用PCA学习字典 D_i

14: 根据(16), (19)计算 β, α

15: 根据(12)更新 \hat{A}_i

16: end for

17: 根据(14)更新 $\hat{X}^{(k+1)}$

18: 根据(15)计算 $\sigma_E^{(k)}$

19: 直到满足收敛条件或达到最大迭代次数

20: end While

实验中使用6个噪声水平 $\sigma_E = 20, 30, 40, 50, 75$ 和100,在测试图像中加入不同噪声水平的加性高斯白噪声来生成噪声图像。本文去噪方法的参数设置为:当 $\sigma_E \leq 30, 30 < \sigma_E \leq 50$ 和 $50 < \sigma_E \leq 100$ 时,块大小分别为 $7 \times 7, 8 \times 8$ 和 9×9 。一组中相似块的数量根据不同的 σ_E 进行设置,当 $\sigma_E \leq 30, 30 < \sigma_E \leq 40, 40 < \sigma_E \leq 50, 50 < \sigma_E \leq 75$ 和 $75 < \sigma_E \leq 100$ 时,块数量分别为60、70、80、90和100。参数 p 也根据 σ_E 的不同范围设置,当 $\sigma_E \leq 30, 30 < \sigma_E \leq 40$ 和 $40 < \sigma_E \leq 100$ 时, p 为0.8、0.85和0.9。

本文使用峰值信噪比(Peak Signal to Noise Ratio, PSNR)和结构相似性(Structural Similarity, SSIM)^[23]对图像恢复效果进行评估。表 2 列出了本文算法和所有比较算法在不同噪声水平下这 12 幅测试图像的 PSNR 和 SSIM 的平均值,以及每个算法在不同噪声水平下 12 幅图像的 PSNR 和 SSIM 与相应平均 PSNR 和 SSIM 之间的绝对值最大误差。由表 2 所见,本文算法的平均 PSNR 在噪声水平 σ_E 分别为 20、30、40、50 和 75 时达到最高,在噪声水平 σ_E 为 100 时仅次于 LGSR,并且

在所有噪声水平下的平均 PSNR 也达到最高。特别是,本文算法 PSNR 的平均增益比 BM3D 高 0.34 dB,比 NCSR 高 0.48 dB,比 LRJS 高 0.2 dB,比 LGSR 和 GSR_SRLR 高 0.04 dB。同时由表 2 可见,本文算法的平均 SSIM 在噪声水平 σ_E 分别为 20 和 40 时达到最高,在噪声水平 σ_E 分别为 30 和 75 时达到次高,在噪声水平 σ_E 分别为 50 和 100 时达到第 3,并在所有噪声水平下的平均 SSIM 值达到次高。这充分说明了本文算法的先进性。

表 2 12 幅测试图像在不同噪声水平下的 PSNR 和 SSIM 值以及误差

Tab. 2 PSNRs and SSIMs, as well as errors, of 12 tested images under different noisy levels

σ_E	指标	BM3D	NCSR	LRJS	LGSR	GSR_SRLR	本文算法
20	PSNR/dB	30.80±3.8	30.82±3.4	30.93±3.3	31.03±3.5	31.05±3.6	31.07±3.5
	SSIM	0.872 8±0.07	0.871 6±0.07	0.872 8±0.08	0.875 2±0.08	0.875 5±0.08	0.876 0±0.07
30	PSNR/dB	28.93±4.0	28.84±3.7	29.03±3.6	29.16±3.8	29.14±3.9	29.22±3.8
	SSIM	0.829 9±0.08	0.827 5±0.09	0.833 0±0.09	0.835 2±0.09	0.833 6±0.09	0.835 1±0.09
40	PSNR/dB	27.45±4.3	27.46±4.0	27.70±3.8	27.85±4.0	27.84±4.1	27.90±4.0
	SSIM	0.788 5±0.09	0.787 7±0.10	0.797 2±0.10	0.801 5±0.10	0.800 2±0.10	0.801 6±0.09
50	PSNR/dB	26.56±4.2	26.44±4.0	26.67±3.8	26.85±4.0	26.89±4.1	26.91±4.1
	SSIM	0.759 5±0.09	0.755 9±0.10	0.767 9±0.10	0.772 8±0.10	0.771 5±0.10	0.771 1±0.10
75	PSNR/dB	24.77±4.1	24.46±4.1	24.87±3.7	25.10±4.1	25.13±4.1	25.14±4.1
	SSIM	0.691 0±0.15	0.685 6±0.19	0.707 2±0.10	0.709 5±0.13	0.710 2±0.13	0.709 7±0.13
100	PSNR/dB	23.49±4.0	23.16±4.0	23.64±3.6	23.82±4.1	23.76±4.4	23.78±4.4
	SSIM	0.634 3±0.22	0.620 4±0.28	0.659 8±0.14	0.660 7±0.21	0.653 2±0.26	0.653 2±0.26
平均	PSNR/dB	27.00±3.8	26.86±4.0	27.14±3.8	27.30±3.8	27.30±3.8	27.34±3.8
	SSIM	0.762 7±0.13	0.758 1±0.14	0.773 0±0.12	0.775 8±0.12	0.774 0±0.13	0.774 6±0.12

图 2~图 7 分别展示了在不同噪声水平下部分图像的去噪效果。

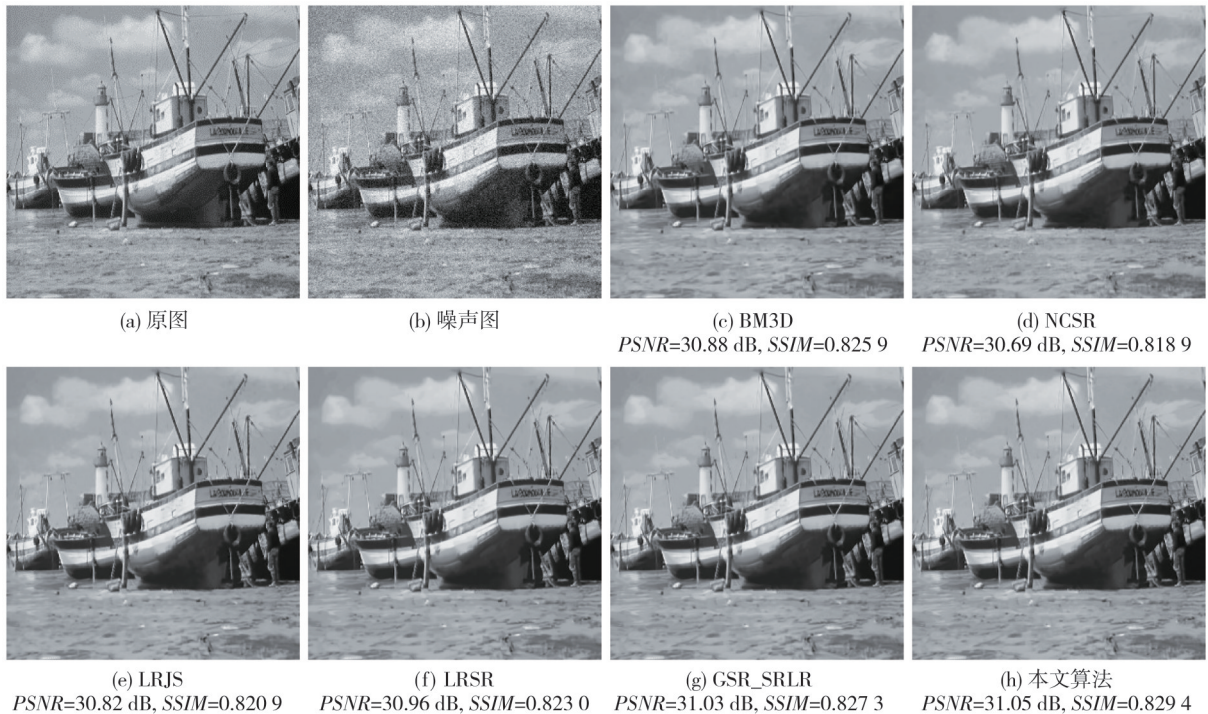


图 2 图像 Boat 在噪声水平 20 下的去噪结果

Fig. 2 Denoised results of image "Boat" under noisy level 20

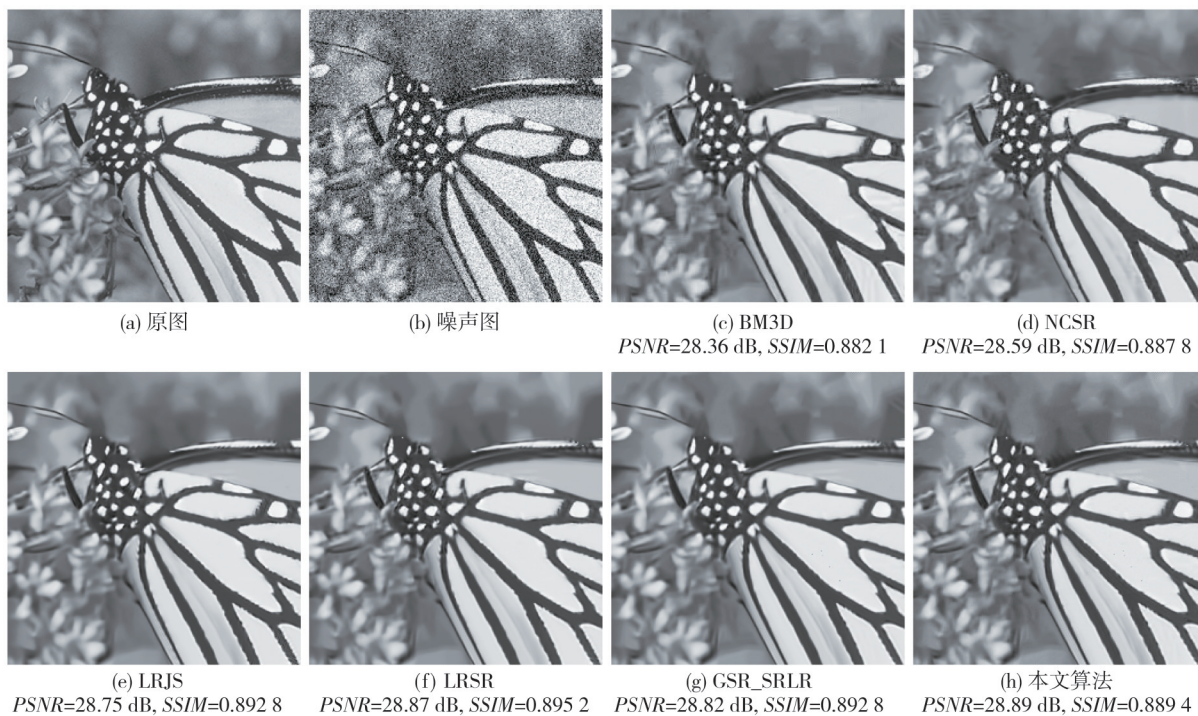


图3 图像 Monarch 在噪声水平 30 下的去噪结果

Fig. 3 Denoised results of image "Monarch" under noisy level 30

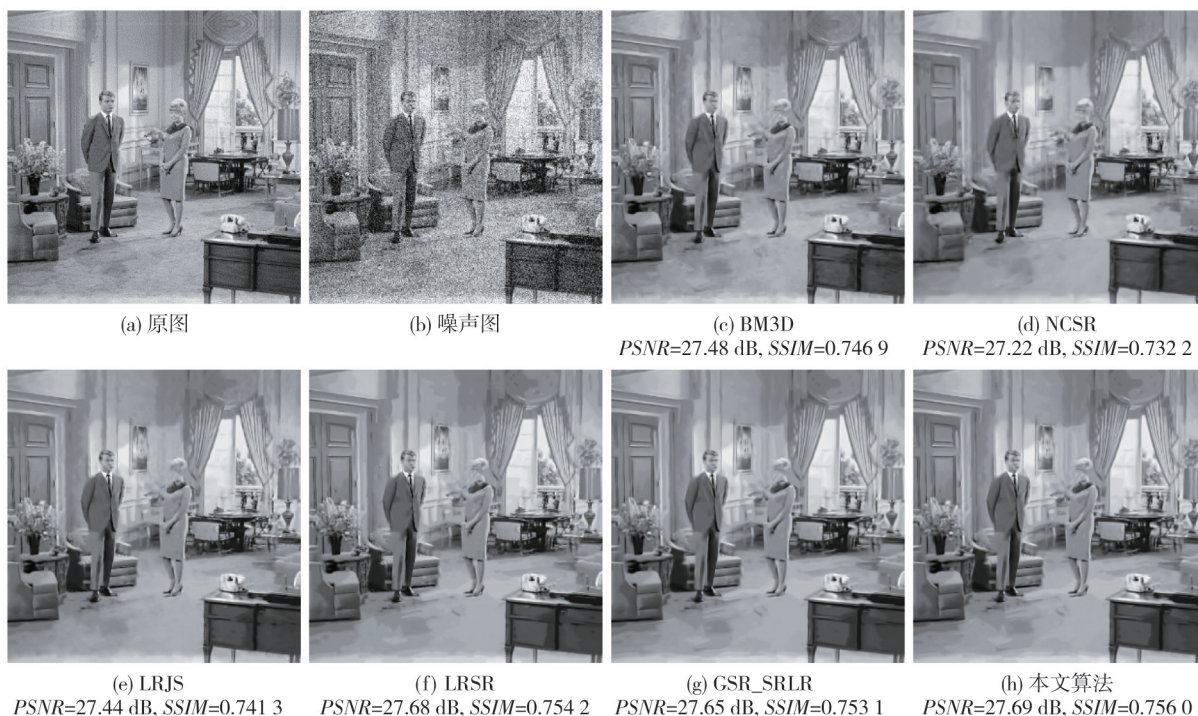


图4 图像 Couple 在噪声水平 40 下的去噪结果

Fig. 4 Denoised results of image "Couple" under noisy level 40

从图 2~图 7 可以看出, BM3D 恢复的图像存在模糊或过平滑的问题, NCSR 恢复的图像存在不理想的视觉伪影, LRJS、LRSR 和 GSR_SRLR 都倾向于过度平滑图像, 而本文算法不仅比其他方法更有效地降低了噪声, 而且能有效克服这些

缺陷并保留图像的边缘和纹理等细节。同时, 本文算法在图 2~图 7 图像的去噪 PSNR 值都达到最大, 在图 2、图 4~图 6 图像的去噪 SSIM 值都达到最大, 而在图 3 和图 7 图像的去噪 SSIM 值上仅低于 LRSR 算法。



图 5 图像 Man 在噪声水平 50 下的去噪结果

Fig. 5 Denoised results of image "Man" under noisy level 50

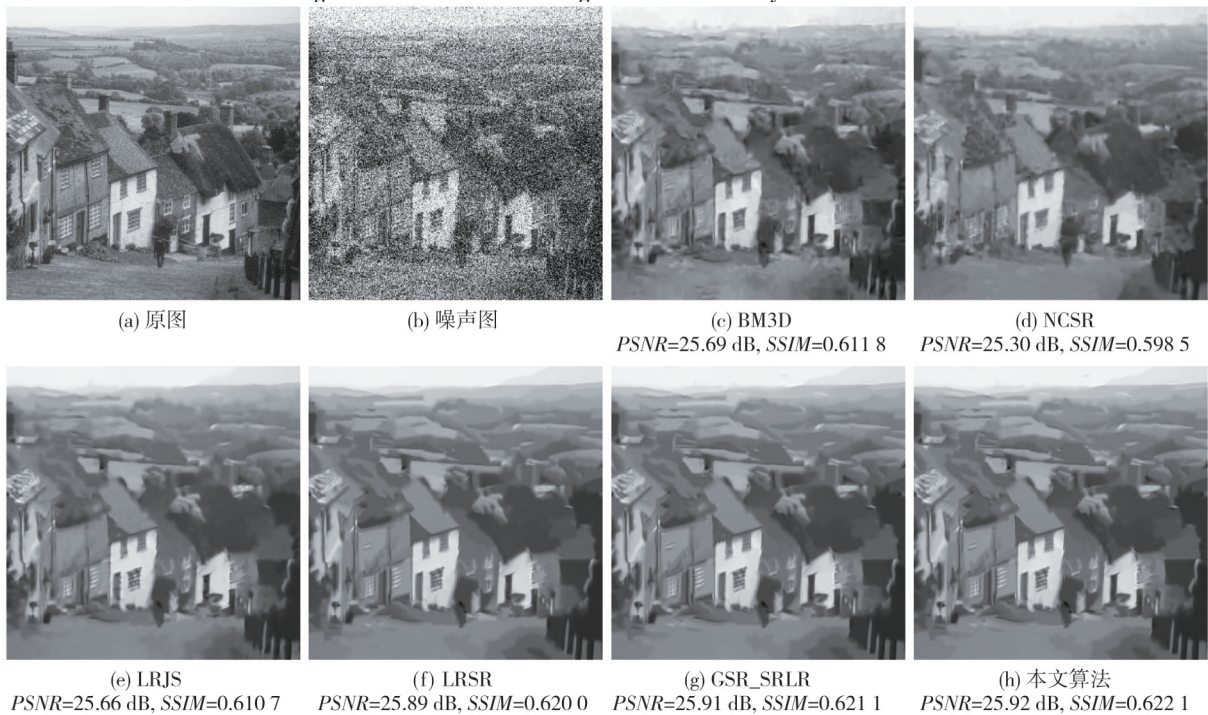


图 6 图像 Hill 在噪声水平 75 下的去噪结果

Fig. 6 Denoised results of image "Hill" under noisy level 75

本文算法不仅在 PSNR 和 SSIM 值上具有显著优势,在视觉效果上也不输于目前流行和先进的去噪算法。

此外,还记录了本文算法对不同噪声水平下 12 幅测试图像处理的平均运行时间(单位为 s),并与其他算法进行对比。统计结果如表 3 所示,由于 BM3D

算法通过块匹配和三维变换实现去噪,步骤简洁且易于并行化,计算量较少。相比之下,本文算法及其他对比算法依赖于复杂的稀疏表示和字典学习过程,通常需要大量的矩阵运算和迭代优化,导致计算复杂度和处理时间较高。因此,在运行时间对比上,本文不考虑 BM3D 算法。

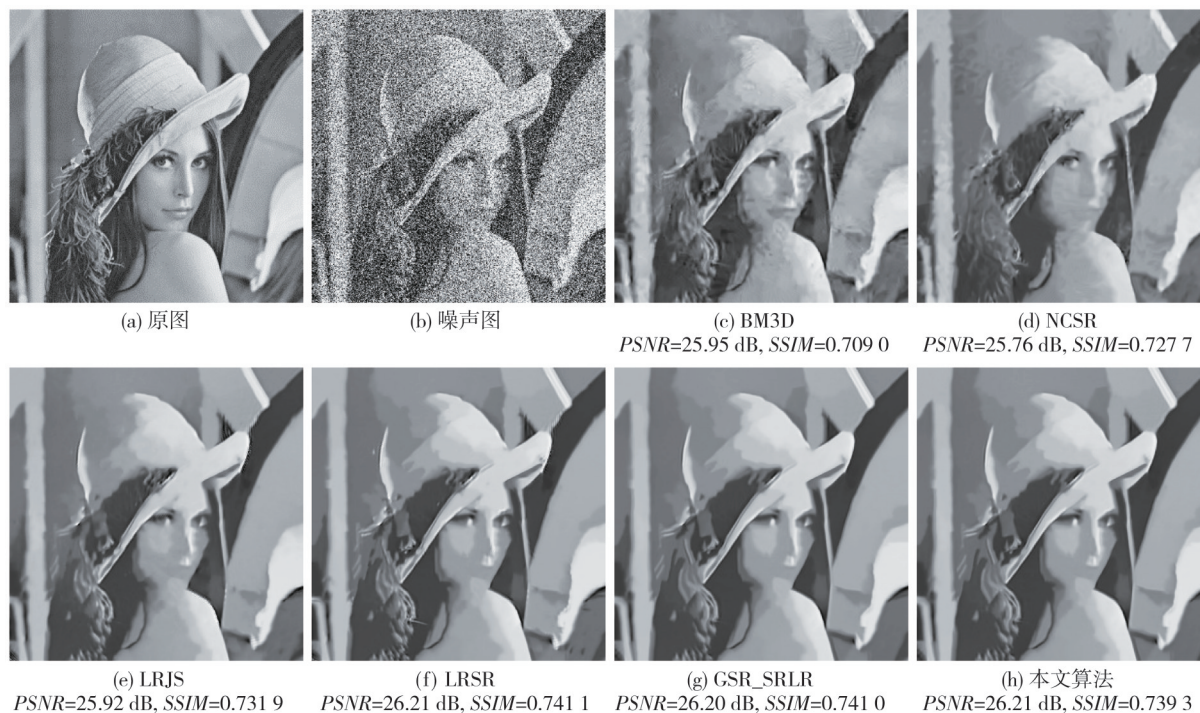


图7 图像Lena在噪声水平100下的去噪结果

Fig. 7 Denoised results of image "Lena" under noisy level 100

表3 12幅测试图像在不同噪声水平下的平均运行时间

Tab. 3 Average time of 12 tested images under different noisy levels

σ_E	平均运行时间/s					
	BM3D	NCSR	LRJS	LGSR	GSR_SRLR	本文算法
20	1.92	376.22	198.27	632.25	446.41	545.84
30	1.98	365.97	346.44	1 827.12	489.17	502.71
40	1.89	959.00	421.68	4 048.32	498.86	411.79
50	2.67	942.67	572.86	2 312.40	461.54	604.99
75	2.69	592.80	688.40	3 352.97	790.28	926.57
100	2.77	574.08	483.64	5 140.48	1 417.64	1 228.33

从表3数据来看,虽然本文算法将多个正则化项组合起来增加了计算复杂度,使得运行时间高于NCSR和LRJS,但本文算法的运行时间在各个噪声水平下也表现较好。特别是在较高的噪声水平(如 $\sigma_E=100$)时,相较于LGSR和GSR_SRLR,本文算法的运行时间仅为1 228.33 s,比LGSR(5 140.48 s)和GSR_SRLR(1 417.64 s)要低很多,显示出在处理高噪声图像时,本文算法能较快地完成运算任务,提高了处理速度。此外,即使在较低的噪声水平(如 $\sigma_E=20$),本文算法的运行时间也仅为545.84 s,相比于最慢的LGSR算法(632.25 s)有显著的时间优势。因此,可以认为本文算法在保证图像恢复质量的同时,还具有较快的处理速度。

4 结论

传统的基于GSR的图像恢复模型只对群体中的

单个块施加稀疏性,而忽略了其他有益的图像属性,限制了恢复效果。本文提出了一种结合低秩模型和残差模型的去噪算法,并对其在图像恢复中的应用进行了探讨。与传统稀疏残差模型使用加权平均方法估计真实稀疏表示的方法不同,该算法不仅使用改进后基于学习的残差模型,还考虑到相似块组的低秩性,将二者结合起来,不仅充分利用块之间的特异性和相关性,而且在保证块低秩性的同时更好地学习图像的稀疏表示。最后,使用具有自适应参数调整方案的交替最小化算法来解决所提出的优化问题。结果表明,在去噪图像恢复任务中,所提方法不仅比经典方法效果更好,而且与先进方法相比也具有一定的竞争力。

参考文献:

- [1] BUADES A, COLL B, MOREL J M. A non-local algorithm for image denoising[C]//2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05), 2005: 60-65.
- [2] 张宁,宋小鹏,刘祎,等.基于直觉模糊散度的自适应非局部均值去噪算法[J].测试技术学报,2020,34(1):1-8.
ZHANG Ning, SONG Xiaopeng, LIU Yi, et al. An adaptive nonlocal mean denoising algorithm based on intuitionistic fuzzy divergence[J]. Journal of Test and Measurement Technology, 2020, 34(1): 1-8. (in

- Chinese)
- [3] ZHA Z, WEN B, YUAN X, et al. Low-rank regularized joint sparsity for image denoising[C]//2021 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP), 2021: 1644-1648.
- [4] AHARON M, ELAD M, BRUCKSTEIN A. K-SVD: an algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(11): 4311-4322.
- [5] ELAD M, AHARON M. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(12): 3736-3745.
- [6] GUO L, ZHA Z, RAVISHANKAR S, et al. Exploiting non-local priors via self-convolution for highly-efficient image restoration[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2022, 31: 1311-1324.
- [7] DABOV K, FOI A, KATKOVNIK V, et al. Image denoising by sparse 3-D transform-domain collaborative filtering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(8): 2080-2095.
- [8] ZHANG J, ZHAO D, GAO W. Group-based sparse representation for image restoration[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2014, 23(8): 3336-3351.
- [9] YUAN W, WANG Y, FAN R, et al. Simultaneous image denoising and completion through convolutional sparse representation and nonlocal self-similarity [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2024, 249: 104216.
- [10] ZHA Z, WEN B, YUAN X, et al. Low-rankness guided group sparse representation for image restoration[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2023, 34(10): 7593-7607.
- [11] DONG W, ZHANG L, SHI G, et al. Nonlocally centralized sparse representation for image restoration[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2013, 22(4): 1620-1630.
- [12] ZHA Z, YUAN X, WEN B, et al. Nonconvex structural sparsity residual constraint for image restoration [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(11): 12440-12453.
- [13] ZHA Z, YUAN X, WEN B, et al. Group sparsity residual constraint with non-local priors for image restoration[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2020, 29: 8960-8975.
- [14] CAI Z, XIE X, DENG J, et al. Image restoration with group sparse representation and low-rank group residual learning[J]. IET Image Processing, 2024, 18(3): 741-760.
- [15] ZHANG S, LI X, ZONG M, et al. Efficient kNN classification with different numbers of nearest neighbors[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(5): 1774-1785.
- [16] WANG S, ZHANG L, LIANG Y. Nonlocal spectral prior model for low-level vision [M]. Heidelberg: Springer, 2013: 231-244.
- [17] VIDAL R, FAVARO P. Low rank subspace clustering (LRSC)[J]. Pattern Recognition Letters, 2014, 43: 47-61.
- [18] CAI J F, CANDÈS E J, SHEN Z. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(4): 1956-1982.
- [19] ZUO W, MENG D, ZHANG L, et al. A generalized iterated shrinkage algorithm for non-convex sparse coding[C]//2013 IEEE International Conference on Computer Vision, 2013: 217-224.
- [20] OSHER S, BURGER M, GOLDFARB D, et al. An iterative regularization method for total variation-based image restoration[J]. Multiscale Modeling & Simulation, 2005, 4(2): 460-489.
- [21] KRISHNAN D, FERGUS R. Fast image deconvolution using hyper-Laplacian priors [J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2009, 22: 1033-1041.
- [22] DONG W, SHI G, LI X. Nonlocal image restoration with bilateral variance estimation: a low-rank approach [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2013, 22(2): 700-711.
- [23] 刘卓, 贾丽娜, 王耀鹏. 基于低秩矩阵近似的低剂量 CT 图像两步去噪方法[J]. 测试技术学报, 2023, 37(5): 449-454.
- LIU Zhuo, JIA Lina, WANG Yaopeng. Two-step denoising method for low-dose CT images based on low-rank matrix approximation [J]. Journal of Test and Measurement Technology, 2023, 37(5): 449-454. (in Chinese)