

文章编号: 1671-7449(2025)06-0654-08

J. Test Measur. Technol., 2025, 39(6): 654-661.

## 基于调频原子力显微镜的悬臂模型与 控制系统仿真

曾德超<sup>1,2</sup>, 姚志飞<sup>1,3</sup>, 孙秋园<sup>1,2</sup>, 赵波慧<sup>1,2</sup>, 田馨<sup>1,3</sup>, 马宗敏<sup>1,2\*</sup>

(1. 中北大学 宽禁带半导体超越照明材料与技术全国重点实验室, 山西 太原 030051;

2. 中北大学 半导体与物理学院, 山西 太原 030051; 3. 中北大学 仪器与电子学院, 山西 太原 030051)

**摘要:** 针对调频原子力显微镜悬臂在工作状态下恒幅恒频振动控制问题, 为进一步优化悬臂控制系统结构, 根据探针的运动方程及相关结构参数, 建立了悬臂的结构模型。在此模型基础上, 设计了基于自激振荡、锁相环解调和自动增益控制技术的控制回路, 该控制回路分为锁相控制回路和振幅驱动控制回路, 并利用Simulink对悬臂模型及其控制系统进行了建模与仿真研究。结果表明, 控制系统能在4 ms内将悬臂的振幅测量信号稳定在设定值5 nm, 同时将悬臂振动频率稳定在160 kHz(即驱动模态的谐振频率)。此外, 还研究了锁相控制回路中环路滤波器的参数 $C_1$ 、 $C_2$ 对稳态相差和频率捕获的影响, 为进一步改进调频原子力显微镜悬臂的控制系统奠定了基础。

**关键词:** 调频原子力显微镜; 恒幅恒频; 悬臂模型; Simulink模型

**中图分类号:** TH742

**文献标识码:** A

**doi:** 10.62756/csjs.1671-7449.2025078

**引用格式:** 曾德超, 姚志飞, 孙秋园, 等. 基于调频原子力显微镜的悬臂模型与控制系统仿真[J]. 测试技术学报, 2025, 39(6): 654-661.

ZENG Dechao, YAO Zhifei, SUN Qiuyuan, et al. Simulation of cantilever model and control system based on frequency-modulated atomic force microscopy[J]. Journal of Test and Measurement Technology, 2025, 39(6): 654-661.

## Simulation of Cantilever Model and Control System Based on Frequency-Modulated Atomic Force Microscopy

ZENG Dechao<sup>1,2</sup>, YAO Zhifei<sup>1,3</sup>, SUN Qiuyuan<sup>1,2</sup>, ZHAO Bohui<sup>1,2</sup>, TIAN Xin<sup>1,3</sup>, MA Zongmin<sup>1,2\*</sup>

(1. State Key Laboratory of Widegap Semiconductor Optoelectronic Materials and Technologies, North University of China, Taiyuan 030051, China;

2. School of Semiconductor and Physics, North University of China, Taiyuan 030051, China;

3. School of Instrument and Electronics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**Abstract:** To address the constant amplitude and constant frequency vibration control problem of the frequency-modulated atomic force microscope cantilever in operation, this paper aims to further optimize the cantilever control system structure. Based on the probe's equation of motion and relevant structural parameters, a cantilever structural model was established. On this basis, a control loop was designed,

**收稿日期:** 2025-01-15

**基金项目:** 国家重点研发计划资助项目(2022YFC2204104); 国家自然科学基金国际合作与交流项目(62220106012); 山西省杰出青年基金项目(202103021221007)

**作者简介:** 曾德超(2000-), 男, 硕士生, 主要从事量子传感与精密测量研究。E-mail: 3331324290@qq.com。

\* **通信作者:** 马宗敏(1980-), 男, 教授, 博士, 主要从事量子传感与精密测量研究。E-mail: mzmncit@163.com。

integrating self-excited oscillation, phase-locked loop demodulation, and automatic gain control technology. The control loop consists of a phase-locked control loop and an amplitude-driven control loop, and the Simulink environment was used for modeling and simulating the cantilever and its control system. Simulation results show that the control system can stabilize the cantilever amplitude measurement signal at the set value of 5 nm within 4 ms, while maintaining the cantilever vibration frequency at 160 kHz (the resonance frequency of the drive mode). Furthermore, this paper investigates the effect of loop filter parameters in the phase-locked control loop on steady-state phase difference and frequency capture, laying the foundation for further improvements in the FM-AFM cantilever control system.

**Key words:** frequency-modulated atomic force microscopy; constant-amplitude and constant-frequency; cantilever model; Simulink module

## 0 引言

自 Binning 等<sup>[1]</sup>首次发明原子力显微镜(Atomic Force Microscope, AFM)以来, AFM 已广泛应用于纳米级样品的成像, 如生物结构和化学结构等<sup>[2-3]</sup>。在多种 AFM 技术中, 调频原子力显微镜(Frequency-Modulated Atomic Force Microscope, FM-AFM)因在原子尺度上对样品表面形貌的高分辨成像能力而备受关注, 尤其在超高真空环境下, FM-AFM 具有广泛的应用前景<sup>[4]</sup>。FM-AFM 工作于动态模式, 这要求其控制系统能够迫使微悬臂梁以恒定的振幅和频率振荡。然而, 悬臂动力学参数与相互作用力之间存在复杂的关系, 尖端与样品的相互作用力会引起微悬臂梁运动变化<sup>[5-6]</sup>。锁相环(Phase-Locked Loop, PLL)用于解调微悬臂梁运动中尖端与样品相互作用力相关的信号, 该解调信号被作为控制系统的反馈信号, 用于生成地形图和耗散图<sup>[7]</sup>。此外, 为了维持悬臂梁的恒定振幅, 自动增益控制回路被引入来检测悬臂振动的幅值, 并通过其内部的幅度比例积分控制器(Amplitude Proportional Integral Controller, APIC)实现振幅稳定控制。

目前, 研究人员通过改进控制系统控制策略来实现悬臂的优化控制, 从而实现 AFM 更高分辨率或更快速的原子尺度成像<sup>[8-10]</sup>。在实际系统优化改进中, 悬臂结构自身的影响因素较多, 并且在实际控制过程中往往会出现在设计阶段无法预见的问题, 如机械噪声、热噪声、电噪声等, 增加了对其分析的难度。在这种情况下, 就需要建立更加客观的结构控制模型评估各种非理想因素的影响, 并通过仿真对改进方法进行分析和研究, 为后续的悬臂控制结构和电路设计提供比较客观的指导和依据。为此, 本文在 Simulink 环境中建立了悬臂结构模型, 并设计了锁相控制回路和振幅控制回路, 分析了影响 PLL

性能的关键参数。在此基础上, 构建了悬臂的整体闭环驱动控制回路, 并对模型进行仿真与验证。整个控制回路采用数字电路进行仿真, 为下一阶段基于 FPGA 实现悬臂控制系统的优化设计提供了重要的理论基础和实践指导。

## 1 悬臂模型

悬臂振动系统广泛应用于 AFM 等精密测量设备中, 其动力学行为直接影响样品的测量精度。为了深入分析悬臂振动与样品之间的相互作用, 本文基于悬臂粒子模型对系统的振动特性进行研究。悬臂振动与样品相互作用的振动模型如图 1(a) 所示。

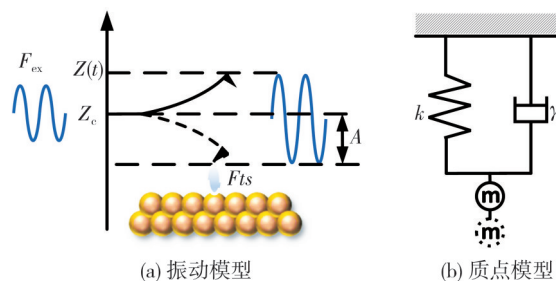


图 1 悬臂模型

Fig. 1 Cantilever model

图 1(a) 中,  $F_{ex}$  为悬臂驱动力幅值;  $Z(t)$  为针尖与样品之间的瞬时间隔;  $Z_c$  为探针平衡位置与样品表面的垂直位移;  $A$  为探针振幅。在假设悬臂的高阶振动模式可以忽略的条件下, 悬臂的运动方程可由式(1)描述。

$$m\ddot{Z}(t) + \frac{m\omega_0}{Q}\dot{Z}(t) + kZ(t) = F_{ex}\cos(\omega t) + F_{ts}(t), \quad (1)$$

式中:  $Q$  为悬臂品质因子, 代表系统对振幅的放大能力, 反比于阻尼系数,  $Q$  因子愈大, 说明材料愈接近理想弹性<sup>[11]</sup>;  $\omega_0$  为共振角频率;  $k$  为悬臂的弹簧常数;  $F_{ex}\cos(\omega t)$  为悬臂的驱动电压;  $F_{ts}$  为针尖与样品间



$$U_i(t)U_o(t) = A_i \sin[\omega_0 t + \theta_1(t)] A_o \sin[\omega_0 t + \theta_2(t)] = \frac{1}{2} A_i A_o \cos[\theta_1(t) - \theta_2(t)] - \frac{1}{2} A_i A_o \cos[2\omega_0 t + \theta_1(t) + \theta_2(t)], \quad (5)$$

式中:  $A_i$ 、 $\theta_1(t)$ 、 $\omega_0$  分别为输入信号振幅、相位及频

率;  $A_o$ 、 $\theta_2(t)$ 、 $\omega_0$  分别为输出信号振幅、相位及频率。在经过截止频率为 100 kHz 的低通滤波器后就滤除了频率为  $2\omega_0$  的高频分量。输出信号可表示为

$$U_{PD}(nT) = \frac{1}{2} A_i A_o \cos[\theta_1(t) - \theta_2(t)] = U_d \cos \theta_e(t). \quad (6)$$

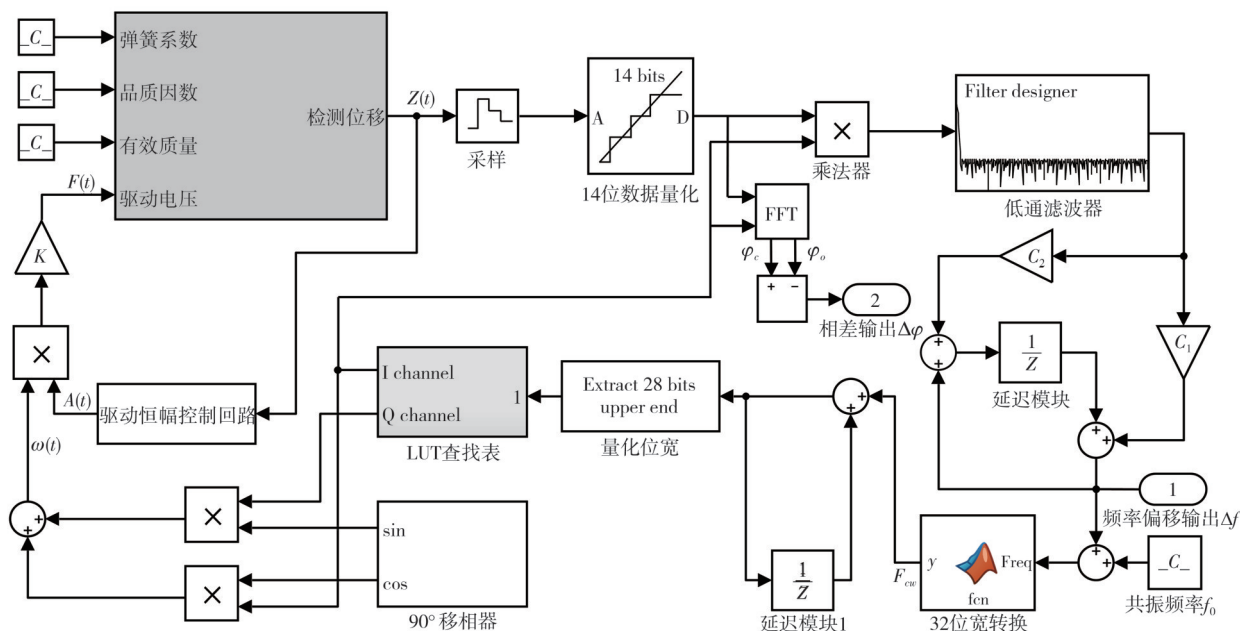


图 3 锁相控制回路仿真模型

Fig. 3 Phase-locked control loop simulation model

由于理想二阶 PLL 具有一阶环路无可比拟的优异性能, 因此 PLL 采取二阶 PLL。相比于一阶 PLL, 二阶 PLL 增加了一个环路滤波器。环路滤波器采用理想积分滤波器。在模型中, 它由两个增益模块、两个加法器以及一个延迟模块构成。环路滤波器的作用有两点: 一是低通滤波器作用, 且通带要远低于鉴相器的带宽, 因为后续 NCO 只有在输入纹波小的直流信号时, 才能输出寄生成分小的高质量正弦信号; 二是控制环路特性, 其参数选择会影响 PLL 锁定速度、稳定性及捕获带宽等一系列 PLL 性能。

信号在经过环路滤波器作用后将接入 NCO, NCO 提供正弦波信号  $U_{o_1}(t)$  与  $U_{o_2}(t)$ 。NCO 由相位累加器以及 LUT 查找表构成。根据 NCO 信号产生的原理, NCO 输出信号频率由频率控制字  $F_{cw}$  决定,  $F_{cw}$  是由环路滤波器输出的检测频率偏移量  $\Delta f$  及共振频率输入  $f_0$  相加后的  $f$  经过频率控制字转换关系转换为的频率控制字。频率控制字与信号输出频率之间有  $F_{cw} = f \cdot 2^{B_{NCO}} / f_{clk}$ , 频率偏移量  $\Delta f$  分辨率为  $\delta f = f_{clk} / 2^{B_{NCO}}$ , 其中,  $B_{NCO}$  为相位累加器位宽, 设置为 32 位,  $f_{clk}$  为系统采样率, 设置为 125 MHz。

理想状态下, 应该在反馈电路中应用  $+90^\circ$  相移以驱动悬臂梁谐振。然而, 在实际电路中, 由于电路组件可能引入额外的相位偏移, 因此需要通过移相器来精确控制相位。移相器通过简单的积化和差方式进行实现, 来补偿 PLL 所产生的相位偏移以确保频率驱动信号与悬臂振动信号相位偏移为  $90^\circ$ 。

### 2.2 环路滤波器参数的影响

PLL 性能会对 AFM 系统的稳定性产生影响, 如果 PLL 输出振荡, 可能会导致系统不稳定; 而如果 PLL 响应速度慢, 则会导致系统的响应速度慢, 影响成像质量<sup>[15]</sup>。锁相控制回路的实现过程及基本结构可将其等效为相位负反馈模型。其闭环传递函数为

$$H(s) = \frac{K_b F(s) N(s)}{1 + K_b F(s) N(s)}, \quad (7)$$

式中:  $N(s)$  为 NCO 传递函数;  $F(s)$  为环路滤波器传递函数;  $K_b$  为鉴相器增益。其中, 鉴相器进行近似线性化处理, 相当于增益为  $K_b$  的线性增益模块。NCO 是一个积分器件, 其模型为  $N(s) = K_0 / s$ 。由于环路滤波器采用理想积分滤波器, 其传递函数可以表示为  $F(s) = (1 + s\mu_2) / s\mu_1$ , 其中,  $\mu_1$ 、 $\mu_2$  为滤波器时间

常数,令 $K=K_0K_b$ 为环路增益,并将其代入式(7)就能得到理想二阶PLL传输模型为

$$H(s) = \frac{K_b F(s) N(s)}{1 + K_b F(s) N(s)} = \frac{K\mu_2 s + K}{\mu_1 s^2 + K\mu_2 s + K} \quad (8)$$

自然谐振频率 $\omega_n = \sqrt{K/\mu_1}$ , 阻尼系数 $\xi = \sqrt{K/\mu_1} \cdot \mu_2/2$ , 得到PLL闭环传递函数为

$$H(s) = \frac{2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (9)$$

由上述可看出PLL的重要参数 $\omega_n$ 、 $\xi$ 及 $K$ 主要由环路滤波器中滤波器时间常数 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 决定,即PLL的性能主要由环路滤波器决定。

为了数字PLL的实现,需将传递函数各模块进行离散化处理。由连续时间系统与离散时间系统的双线性变换公式<sup>[16]</sup>知复数变量 $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ , 将其代入环路滤波器传递函数中进行离散化处理,得到环路滤波器离散传递函数为

$$F(z) = \frac{2\mu_2 + T}{2\mu_1} + \frac{T}{\mu_1} \frac{z^{-1}}{1+z^{-1}} = C_1 + \frac{C_2 z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (10)$$

根据上式以及 $\omega_n$ 、 $\xi$ 与 $K$ 、 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 的关系,能得

到 $C_1 = \frac{4\xi\omega_n + T\omega_n^2}{2K}$ ,  $C_2 = \frac{T\omega_n^2}{K}$ 。由上式可知, $C_1$ 、 $C_2$ 的取值决定着PLL增益 $K$ 、自然谐振频率 $\omega_n$ 以及阻尼系数 $\xi$ 。在数字二阶PLL中,稳态相差、捕获速度理论上都与 $K$ 无关,但这个值显然会影响环路性能,其通常被设计为接近1的值,使得信号流通PLL后增益不发生改变<sup>[17]</sup>。此外,PLL相位裕度与阻尼系数 $\xi$ 直接相关,根据文献<sup>[18]</sup>推荐的阻尼系数 $\xi$ 取 $0.25 < \xi < 1$ ,通常工程上取 $\xi=0.7$ 。另一方面,数字二阶PLL的稳态相差、捕获时间等通常与 $\xi$ 、 $\omega_n$ 相关<sup>[19]</sup>。根据前面的讨论可知,数字PLL中,环路滤波器系数 $C_1$ 、 $C_2$ 与环路固有振荡频率 $\omega_n$ 和阻尼系数 $\xi$ 有关,且改变 $C_1$ 、 $C_2$ 可以起到改变 $\omega_n$ 和 $\xi$ 的目的,进而改变环路的捕获速度和锁定后的稳态相差。

在对上述进行理论性推导后,接入第1节所搭建的悬臂模型,设置NCO共振频率为160.0 kHz,即解调频率偏移 $\Delta f=0$  Hz时对锁相控制回路进行仿真。首先,为了验证 $C_1$ 对锁相控制回路频率解调及相位解调的影响,令参数 $C_2=2.52 \times 10^{-6}$ ,依次减小 $C_1$ 值为0.052、0.012、0.007,对锁相控制回路进行仿真,其对应仿真结果如图4所示。

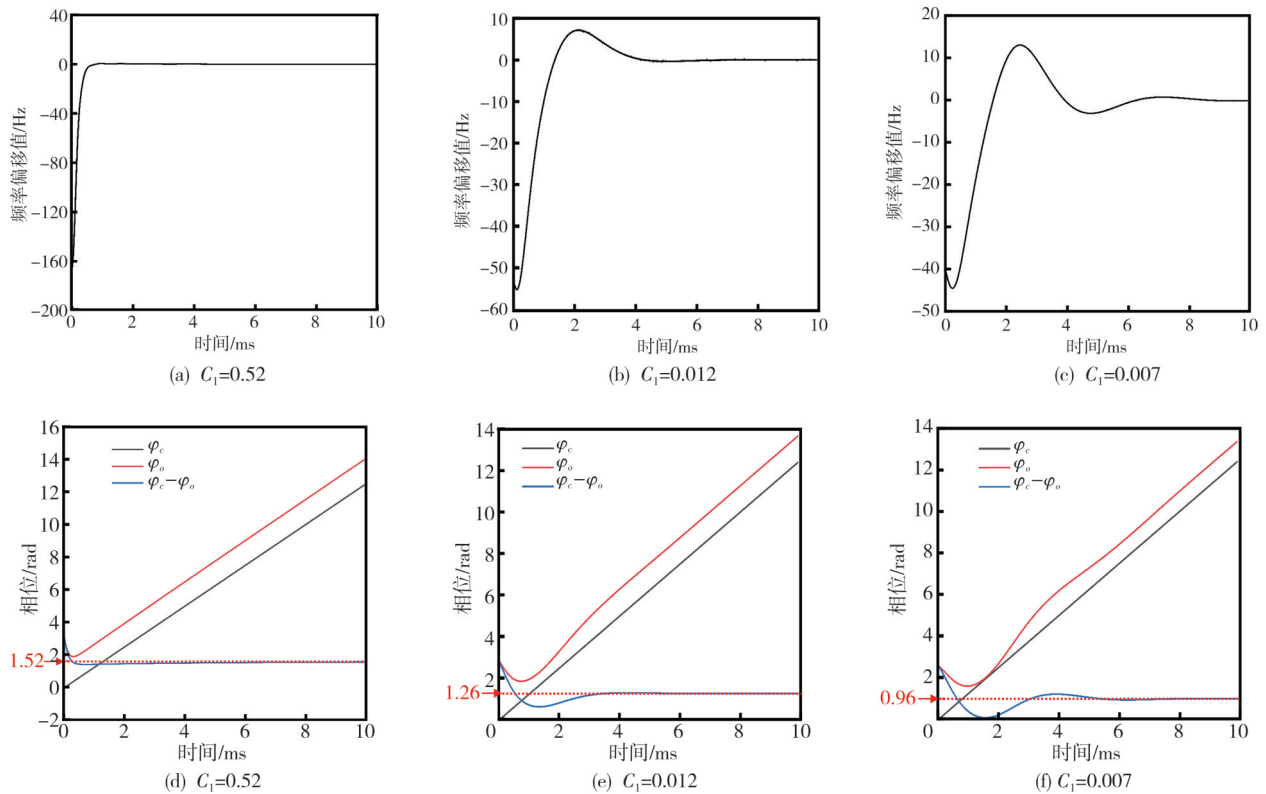


图4 改变 $C_1$ 后锁相控制回路相位追踪及频率追踪仿真结果

Fig. 4 Simulation results of phase tracking and frequency tracking in the phase-locked control loop after changing the value of  $C_1$

图 4(a)~(c) 分别为  $C_1$  值依次减小时对应的频率偏移值  $\Delta f$  追踪过程, 随着  $C_1$  值的减小, 频率偏移信号捕获速度依次减慢; 图 4(d)~(f) 分别为其对应的锁相回路输入信号相位  $\varphi_c$ 、输出信号  $\varphi_o$  及相差信号  $\Delta\varphi$  追踪过程, 随着  $C_1$  值的减小, 稳态相差依次为

1.52、1.26、0.96 rad, 稳态相差呈现依次减小的现象。为了进一步说明  $C_2$  对锁相控制回路频率解调及相位解调的影响, 令参数  $C_1=0.052$ , 依次设置  $C_2$  为  $2.52 \times 10^{-6}$ 、 $2.52 \times 10^{-7}$ 、 $2.52 \times 10^{-8}$ , 对锁相控制回路进行仿真, 结果如图 5 所示。

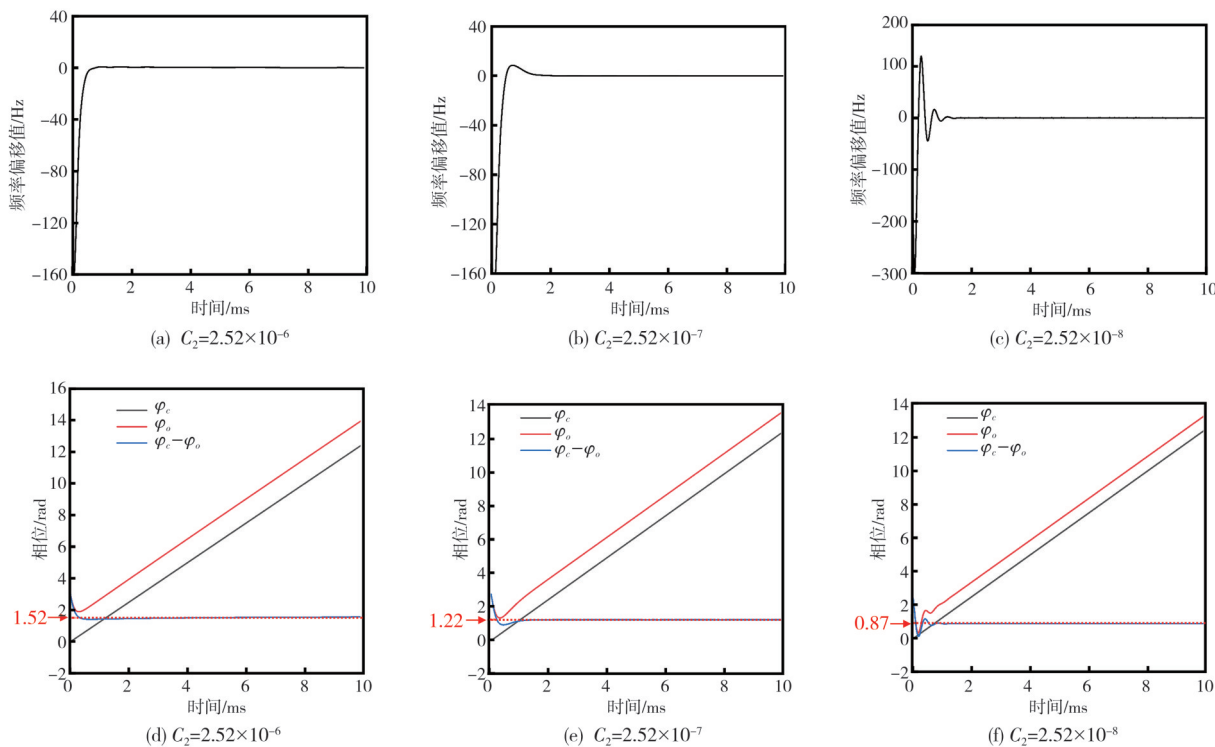


图 5 改变  $C_2$  后锁相控制回路相位追踪及频率偏移值追踪仿真结果

Fig. 5 Simulation results of phase tracking and frequency tracking in the phase-locked control loop after changing the value of  $C_2$

图 5(a)~(c) 分别为  $C_2$  值依次减小时对应的频率偏移值  $\Delta f$  追踪过程, 随着  $C_2$  值的减小, 频率偏移信号捕获速度依次减慢; 图 5(d)~(f) 分别为其对应的锁相回路输入信号相位  $\varphi_c$ 、输出信号  $\varphi_o$  及相差信号  $\Delta\varphi$  追踪过程, 随着  $C_1$  值的减小, 稳态相差依次为 1.52、1.22、0.87 rad, 同样呈现依次减小的现象。

及 APIC 构成, 结构如图 6 所示。

通过上述研究发现, 环路滤波器系数  $C_1$ 、 $C_2$  与环路固有振荡频率  $\omega_n$  和阻尼系数  $\xi$  有关, 改变  $C_1$ 、 $C_2$  进而可以改变环路的捕获速度和锁定后的稳态相差。当  $C_1$ 、 $C_2$  较大时, 环路捕获速度快, 锁定后稳态相差大; 当  $C_1$ 、 $C_2$  较小时, 环路锁定速度慢, 锁定后稳态相差小。

振幅测量回路主要由自乘模块、低通滤波器及均方根 (Root Mean Square, RMS) 模块构成。输入信号  $U_i(t)$  经自乘模块后, 通过积化和差公式得到输出信号为

$$U_{mul}(t) = -\frac{1}{2} A_i^2 \cos [2\omega_0 t + 2\theta_1(t)] + \frac{1}{2} A_i^2 \tag{11}$$

此外, APIC 采用增量式 PID 结构。输出为增量形式可以减小控制器对控制量误差信号的冲击, 使得系统更加平稳。并且, 这种结构更适用于离散系统的控制, 能够减少系统采样周期对控制的影响。

### 3 振幅驱动回路

振幅驱动回路是为了控制 FM-AFM 悬臂在工作时以恒定幅度进行振动, 通过恒定驱动直流流量, 改变交流电压的幅度来达到控制悬臂恒幅振动的目的。FM-AFM 悬臂振幅驱动回路由振幅测量回路

为验证悬臂及控制回路模型的有效性, 进行了动态测试。测试条件以第 1 节中硅探针 PPP-NCLR-50 参数为基准, 模拟超高真空环境, 设置模型参数  $Q$  为 10 000。仿真结果如图 7 所示, 图 7(a) 灰色曲线表示驱动电压信号, 黑色曲线表示悬臂的检测位移信号, 检测位移振动周期  $T=6.25 \mu s$ , 对应振动频率为 160.0 kHz。图 7(b) 为

探针检测位移幅值, 经过计算, 悬臂模型在约 4 ms 后幅值稳定, 位移信号稳定在 5 nm, 偏差值 1.2% 左右, 振幅达到稳定状态。图 7(c) 为探针

频率响应, 悬臂模型在约 4 ms 后频率稳定在 160.0 kHz, 最大偏差值约 0.96 Hz, 成功实现了悬臂的恒幅恒频驱动。

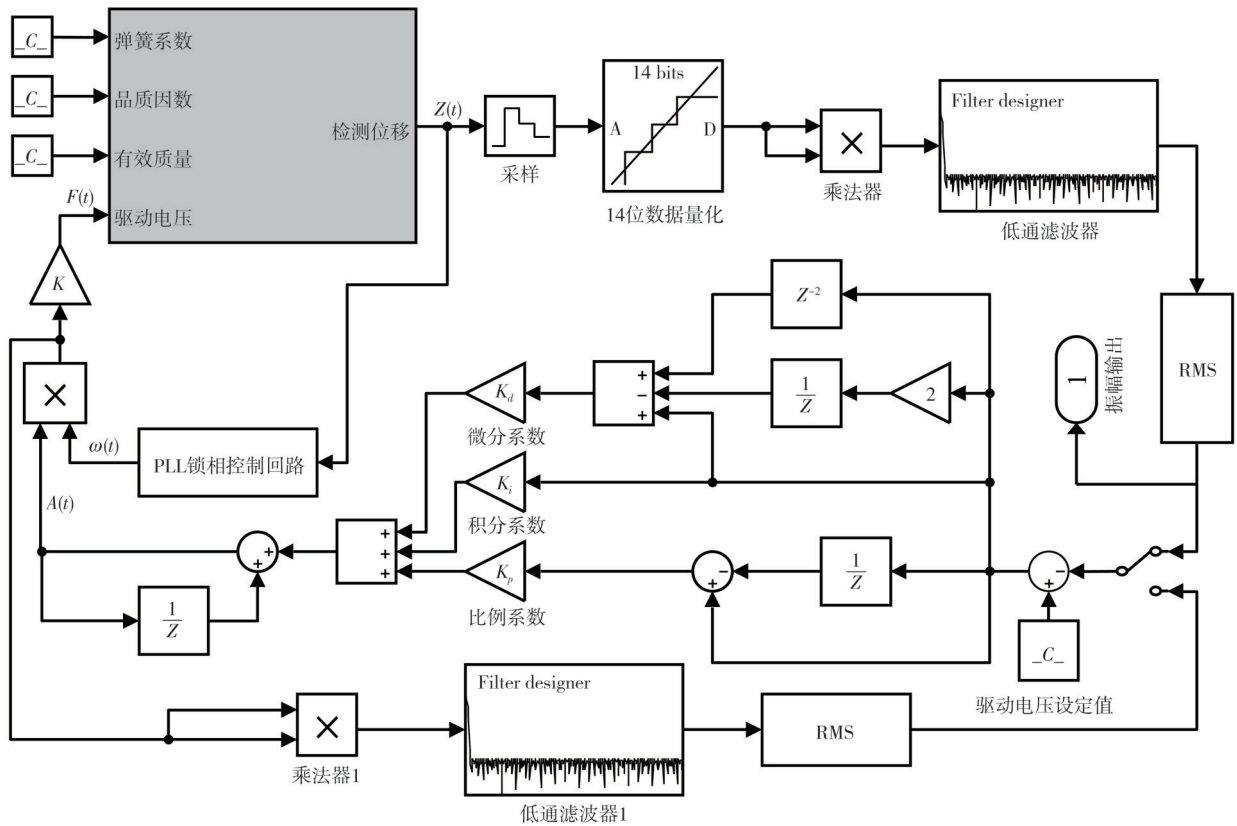
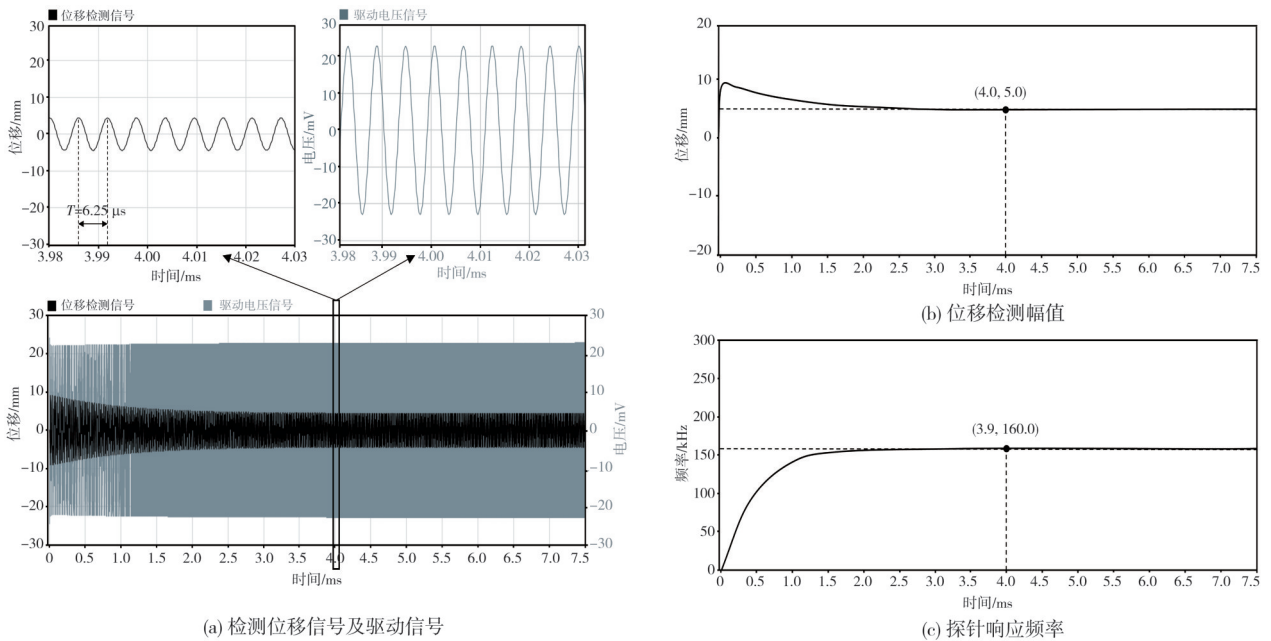


图 6 锁相控制回路仿真模型

Fig. 6 Phase-locked control loop simulation model



(a) 检测位移信号及驱动信号

(b) 位移检测幅值

(c) 探针响应频率

图 7 锁相控制回路仿真结果

Fig. 7 Phase-locked control loop simulation results

## 4 结 论

本文将悬臂等效为质点模型, 构建了悬臂的结构模型, 并引入非理想因素模块以提升模型的实际适用性。在此基础上, 采用自激振荡、PLL 解调和自动增益控制技术, 建立了锁相控制回路和振幅驱动回路, 并进行了仿真研究。结果表明, 该系统能够实现悬臂的恒幅恒频振动, 使其在短时间内达到稳定状态。此外, 本文建立的 NC-AFM 悬臂控制系统模型, 为后续 NC-AFM 控制系统的数字电路实现提供了理论基础。同时, 本文进一步探讨了锁相控制回路中环路滤波器  $C_1$ 、 $C_2$  参数对 PLL 性能的影响。对 PLL 关键参数的研究为优化 AFM 控制系统中的 PLL 结构提供了有力支持。

### 参考文献:

- [ 1 ] BINNIG G, QUATE C F, GERBER C. Atomic force microscope[J]. *Physical Review Letters*, 1986, 56(9): 930-933.
- [ 2 ] GROSS L, MOHN F, MOLL N, et al. The chemical structure of a molecule resolved by atomic force microscopy[J]. *Science*, 2009, 325(5944): 1110-1114.
- [ 3 ] BAI J H, ANDRES L R. An automated AFM for nanoindentation and force related measurements [J]. *Journal of Measurement Science and Instrumentation*, 2018, 9(4): 347-353.
- [ 4 ] BARTH C, FOSTER A S, HENRY C R, et al. Recent trends in surface characterization and chemistry with high-resolution scanning force methods [J]. *Advanced Materials*, 2011, 23(4): 477-501.
- [ 5 ] KUCHUK K, SIVAN U. Accurate, explicit formulae for higher harmonic force spectroscopy by frequency modulation-AFM [J]. *Beilstein Journal of Nanotechnology*, 2015, 6: 149-156.
- [ 6 ] FAROKH PAYAM A, FATHIPOUR M. Effect of tip mass on frequency response and sensitivity of AFM cantilever in liquid[J]. *Micron*, 2015, 70: 50-54.
- [ 7 ] BUENO Á M, BALTHAZAR J M, PIQUEIRA J R C. Phase-locked loops lock-in range in frequency modulated-atomic force microscope nonlinear control system[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(7): 3101-3111.
- [ 8 ] PAYAM A F. Modelling and nanoscale force spectroscopy of frequency modulation atomic force microscopy [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, 79: 544-554.
- [ 9 ] ZHANG R, WU S, XAO S S, et al. Three-dimensional atomic force microscopy based on tailored cantilever probe with flared tip[J]. *Journal of Measurement Science and Instrumentation*, 2020, 11(4): 388-396.
- [ 10 ] NONY L, BARATOFF A, SCHÄR D, et al. Non-contact atomic force microscopy simulator with phase-locked-loop controlled frequency detection and excitation[J]. *Physical Review B*, 2006, 74(23): 235439.
- [ 11 ] 王旭东, 温阳, 王慧云, 等. 真空调频原子力显微镜系统设计[J]. *电子测量技术*, 2022, 45(5): 181-186. WANG Xudong, WEN Yang, WANG Huiyun, et al. Design of vacuum frequency modulation atomic force microscope system[J]. *Electronic Measurement Technology*, 2022, 45(5): 181-186. (in Chinese)
- [ 12 ] KOBAYASHI K, YAMADA H, MATSUSHIGE K. Frequency noise in frequency modulation atomic force microscopy[J]. *The Review of Scientific Instruments*, 2009, 80(4): 043708.
- [ 13 ] PAYAM A F. Modelling and nanoscale force spectroscopy of frequency modulation atomic force microscopy [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, 79: 544-554.
- [ 14 ] 王法臻, 崔少辉, 王成, 等. FPGA 可重构仪器 USB 通信接口的设计与实现[J]. *测试技术学报*, 2020, 34(5): 451-456. WANG Fazhen, CUI Shaohui, WANG Cheng, et al. Design and implementation of USB communication interface of FPGA reconstructed instruments[J]. *Journal of Test and Measurement Technology*, 2020, 34(5): 451-456. (in Chinese)
- [ 15 ] BUENO Á M, BALTHAZAR J M, PIQUEIRA J R C. Phase-locked loops lock-in range in frequency modulated-atomic force microscope nonlinear control system[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(7): 3101-3111.
- [ 16 ] 丁志中. 双线性变换法原理解释[J]. *电气电子教学学报*, 2004, 26(2): 53-54. DING Zhizhong. Explanation about the principle of bilinear transformation method [J]. *Journal of Electrical & Electronic Engineering Education*, 2004, 26(2): 53-54. (in Chinese)
- [ 17 ] 杜勇. 锁相环技术原理及 FPGA 实现[M]. 北京: 电子工业出版社, 2016.
- [ 18 ] 郑继禹, 张厥盛, 万心平, 等. 锁相技术[M]. 2 版. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2012.
- [ 19 ] 远坂俊昭. 锁相环(PLL)电路设计与应用[M]. 何希才, 译. 北京: 科学出版社, 2006.