

# 递归趋势调整单位根检验与功效提升研究

江海峰, 初子靖

(安徽工业大学 商学院, 安徽 马鞍山 243032)

**摘要:** 提出2种新递归趋势调整方法, 并构建引理; 利用引理推论推导4种递归趋势调整模式下单位根检验量的极限分布, 使用蒙特卡洛模拟方法获取检验量分位数; 选取2019年1月2日至2023年2月16日上证综合指数收盘价共1000个观测值对递归趋势调整检验量进行实证研究。理论推导表明: 和已有调整方法相同, 新调整后变量不再含未知参数, 可用于构造单位根检验量; 基于递归趋势调整检验量在大样本下收敛于维纳过程的泛函, 但与已有分布不同, 需使用蒙特卡洛模拟方法重新获取分位数。模拟研究表明: 第一种和第三种检验量分位数随样本容量增大而上升, 第二种和第四种检验量分位数随样本容量增大而下降, 但均呈现收敛趋势; 和经典DF检验相比, 在具有满意检验水平同时, 递归趋势调整方法不但能够显著降低估计偏差, 还能明显提高检验功效。实证结果表明: 无论是上证综合指数对数收盘价序列还是收益率序列, 递归趋势调整检验模式都能得到正确的检验结论。

**关键词:** 趋势调整; 单位根; 检验功效; 蒙特卡洛模拟

中图分类号: O 212 文献标志码: A doi: 10.12415/j.issn.1671-7872.23010



## Research on Recursive Trend Adjustment and Power Enhancement for Unit Root Test

JIANG Haifeng, CHU Zijing

(School of Business, Anhui University of Technology, Maanshan 243032, China)

**Abstract:** Two new recursive trend adjustment methods were proposed, and the lemma was constructed. The limit distributions of the unit root test statistics under the 4 recursive trend adjustment modes were deduced with the inferences from the lemma, and the quantiles of the test statistics were obtained with Monte Carlo simulation. An empirical study was conducted on the trend adjustment test using a total of 1 000 observations of the closing price of the Shanghai composite index from January 2, 2019 to February 16, 2023. The theoretical research shows that as with existing adjustment methods, the newly adjusted variables no longer contain unknown parameters, and can be used to construct unit root test statistics. The recursive trend-based adjustment of the test statistics converges to the generalised function of the Wiener process for large samples. But unlike the pre-existing distribution, the quantiles should be obtained through Monte Carlo simulation method. The simulation shows that though the first and third test statistics increase while the second and fourth test statistics decrease when the sample size increases, but all quantiles show a convergence trend. Compared with the classical DF test, the recursive trend adjustment method can not only significantly reduce the estimation bias, but also improve the test power while having a satisfactory test size. The empirical results indicate that the recursive trend adjustment test model can obtain correct test conclusions for both the logarithmic closing price series and the yield series of the Shanghai composite index.

收稿日期: 2023-02-05

基金项目: 国家社会科学基金项目 (21BJY213)

作者简介: 江海峰 (1976—), 男, 安徽巢湖人, 博士, 教授, 研究方向为数量经济理论及应用。

引文格式: 江海峰, 初子靖. 递归趋势调整单位根检验与功效提升研究 [J]. 安徽工业大学学报(自然科学版), 2024, 41(3):342-349.

**Keywords:** trend adjustment; unit root; test power; Monte Carlo simulation

一直以来, 学者们致力于单位根检验方法的改进研究。为降低第一类错误, Mantalos 等<sup>[1]</sup>、江海峰等<sup>[2-3]</sup>引入 Bootstrap 方法; 为提高检验功效, Elliott 等<sup>[4]</sup>、Ng 等<sup>[5]</sup>提出退势单位根 ERS 检验和 MGLS 检验, 包括对水平趋势和线性趋势分别进行分析; Shin 等<sup>[6-8]</sup>针对水平趋势提出递归均值调整单位根检验理论。白仲林<sup>[9]</sup>、江海峰等<sup>[10]</sup>研究显示, 相对于 DF (Dickey Fuller) 检验, 退势和递归均值调整方法在一定程度上可提高功效。Rodrigues<sup>[11]</sup>将递归均值调整思想应用到线性趋势模型, 采用双模型表示数据生成过程, 使用直到时刻  $t-1$  的观测估计模型参数。为消除递归估计量受未知参数的影响, Rodrigues<sup>[11]</sup>、Lizarazu 等<sup>[12]</sup>、Sul<sup>[13]</sup>、江海峰等<sup>[14]</sup>分别提出递归趋势调整方法和变量转换方法, 使递归趋势调整方法可用于单位根检验。Rodrigues<sup>[15]</sup>、Wang 等<sup>[16]</sup>、江海峰等<sup>[17]</sup>还将该方法用于结构突变和 KPSS(Kwiatkowski, Phillips, Schmidt and Shin) 单位根检验。现有研究拓展了递归调整单位根检验理论, 但仍有几点值得研究和商榷。

首先, 在递归参数估计以及趋势变量组合模式选择上, 除上述转换模式外, 还有其他组合方式, 为完善递归趋势调整内容体系, 其他递归趋势调整模式的合理性和有效性值得进一步研究。其次, Rodrigues<sup>[11]</sup>、Lizarazu 等<sup>[12]</sup>的研究仅限于模拟分析, 未能从理论上证实经调整后相关系数检验量和伪  $z$  检验量在大样本下存在分布, 如果不能证实, 模拟就失去理论基础, 不能排除分位数会随模拟参数变化而呈现随机性。Lizarazu 等<sup>[12]</sup>试图说明这点, 尝试性地选择 5 组趋势项参数取值比较分位数是否有差异, 模拟显示 3 种调整模式的系数检验量对参数取值具有稳健性, 表明就单位根系数检验量而言, 调整后模型检验量在大样本下具有确定的分布。Rodrigues<sup>[11]</sup>却没有对伪  $z$  检验量进行类似尝试, 模拟结论有待进一步验证。理论上, 研究调整后模型检验量在大样本下是否存在极限分布是必须解决的关键问题。最后, Rodrigues<sup>[11]</sup>、Lizarazu 等<sup>[12]</sup>仅比较 3 种调整模型之间的功效, 没有与对应的 DF 检验模式对比, 无法说明递归趋势调整的必要性 and 优越性。更重要的是, 和获取分位数一样, 在模拟时他们都把趋势项参数设置为 0, 不符合数据生成要求, 此时数据生成成为水平趋势, 应使用递归均值调整而不是递归趋势调整, 因而已有模拟结论也有待验证。为比较检验功效, 应将趋势项参数设置为非 0, 使结论更

可靠和具有一般性。近年, 资产价格泡沫检验理论得到广泛应用, 该检验为单位根右侧检验, 因此递归趋势调整方法也可用于改进资产价格泡沫检验方法<sup>[18-22]</sup>。鉴于此, 提出另外 2 种递归趋势调整方法, 并进行理论、模拟验证, 且选取上证综合指数序列进行实证检验。研究显示, 各种调整后检验量在大样本下都收敛到维纳过程的泛函, 检验量既能降低参数估计偏差, 也具有满意的检验水平和功效优势, 提出的递归趋势调整方法能用于实证研究。

## 1 递归趋势调整方法

### 1.1 经典递归趋势调整方法

Rodrigues<sup>[11]</sup>采用式 (1) 所示双模型表示数据生成过程:

$$y_t = \alpha + \beta t + x_t, x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t, t = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

其中  $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma_\varepsilon^2)$  且  $\beta \neq 0$ 。记  $\hat{\alpha}_{t-1}^{\text{re}}, \hat{\beta}_{t-1}^{\text{re}}$  为参数  $\alpha, \beta$  递归估计, 即根据下列回归模型

$$y_k = \alpha + \beta k + \eta_k, k = 1, 2, \dots, t-1 \quad (2)$$

仅使用直到时刻  $t-1$  的观测估计。在原假设  $H_0: \rho = 1$  成立时有

$$\hat{\alpha}_{t-1}^{\text{re}} = y_0 + \frac{4t-2}{(t-1)(t-2)} \sum_{k=1}^{t-1} S_k - \frac{6}{(t-1)(t-2)} \sum_{k=1}^{t-1} kS_k$$

$$\hat{\beta}_{t-1}^{\text{re}} = \beta + \frac{12}{t(t-1)(t-2)} \sum_{k=1}^{t-1} kS_k - \frac{6}{(t-1)(t-2)} \sum_{k=1}^{t-1} S_k$$

其中:  $S_k = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i$ ;  $y_0$  为初始值。对模型 (1) 进行递归趋势调整:

$$\tilde{y}_{\text{re},t} = y_t - \hat{\alpha}_{t-1}^{\text{re}} - \hat{\beta}_{t-1}^{\text{re}}(t-1) = S_t + \frac{2}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} S_k - \frac{6}{t(t-1)} \sum_{k=1}^{t-1} kS_k + \beta$$

$$\tilde{y}_{\text{re},t-1} = y_{t-1} - \hat{\alpha}_{t-1}^{\text{re}} - \hat{\beta}_{t-1}^{\text{re}}(t-1) = S_{t-1} + \frac{2}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} S_k - \frac{6}{t(t-1)} \sum_{k=1}^{t-1} kS_k$$

此时模型 (1) 转变为  $\tilde{y}_{\text{re},t} = \rho_{\text{re}} \tilde{y}_{\text{re},t-1} + v_{\text{re},t}$ 。为消除  $\tilde{y}_{\text{re},t}$  中未知参数  $\beta$  的影响, Rodrigues<sup>[11]</sup>、Lizarazu 等<sup>[12]</sup>给出 1 种转换和 2 种调整方法。令

$$\tilde{y}_{0,t} = y_t - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta y_k - \sum_{k=1}^{t-1} \frac{1}{k} y_k, \tilde{y}_{0,t-1} = y_{t-1} - \sum_{k=1}^{t-1} \frac{1}{k} y_k$$

$$\tilde{y}_{1,t} = y_t - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta y_k - \hat{\alpha}_{t-1}^{\text{re}} - \hat{\beta}_{t-1}^{\text{re}}(t-1), \tilde{y}_{1,t-1} = \tilde{y}_{\text{re},t-1}$$

$$\tilde{y}_{2,t} = y_t - \hat{\alpha}_t^{\text{re}} - \hat{\beta}_t^{\text{re}} t, \tilde{y}_{2,t-1} = \tilde{y}_{1,t-1}$$

其中  $\hat{\alpha}_t^{\text{re}}, \hat{\beta}_t^{\text{re}}$  为使用直到时刻  $t$  的参数递归估计。Sul<sup>[13]</sup>给出另外 1 种转换方法:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{0,t}^* &= y_t - 2(t-1)^{-1} \sum_{k=1}^{t-1} y_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( y_t - 2(t-1)^{-1} \sum_{k=1}^{t-1} y_k \right) \\ \tilde{y}_{0,t-1}^* &= y_{t-1} - 2(t-1)^{-1} \sum_{k=1}^{t-1} y_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( y_{t-1} - 2(t-1)^{-1} \sum_{k=1}^{t-1} y_k \right) \end{aligned}$$

另外,江海峰等<sup>[14]</sup>针对 $\beta = 0$ 也提出1种递归趋势调整方法。在 $H_0: \rho = 1$ 成立时有

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{0,t} &= S_t - \sum_{k=1}^{t-1} \frac{1}{k} S_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \tilde{y}_{0,t-1} = S_{t-1} - \sum_{k=1}^{t-1} \frac{1}{k} S_k \\ \tilde{y}_{0,t}^* &= S_t - \frac{2}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} S_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} S_k \\ \tilde{y}_{0,t-1}^* &= S_{t-1} - \frac{2}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} S_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_{k-1} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} S_k \\ \tilde{y}_{1,t} &= S_t + \frac{2}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} S_k - \frac{6}{t(t-1)} \sum_{k=1}^{t-1} kS_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \\ \tilde{y}_{1,t-1} &= S_{t-1} + \frac{2}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} S_k - \frac{6}{t(t-1)} \sum_{k=1}^{t-1} kS_k \end{aligned}$$

$$v_{0,t} = \tilde{y}_{0,t} - \tilde{y}_{0,t-1} = v_{0,t}^* = \tilde{y}_{0,t}^* - \tilde{y}_{0,t-1}^* = v_{1,t} = \tilde{y}_{1,t} - \tilde{y}_{1,t-1} = \varepsilon_t - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$

$$\tilde{y}_{2,t} = S_t + \frac{2}{t} \sum_{k=1}^t S_k - \frac{6}{t(t+1)} \sum_{k=1}^t kS_k, \tilde{y}_{2,t-1} = \tilde{y}_{1,t-1}$$

$$\begin{aligned} v_{2,t} = \tilde{y}_{2,t} - \tilde{y}_{2,t-1} &= \varepsilon_t + \frac{2-4t}{t(t+1)} S_t - \frac{2}{t(t-1)} \sum_{k=1}^{t-1} S_k + \\ &\frac{12}{t(t-1)(t+1)} \sum_{k=1}^{t-1} kS_k \end{aligned}$$

Rodrigues<sup>[11]</sup>、Lizarazu等<sup>[12]</sup>对转化后变量建立回归模型:

$$\tilde{y}_{i,t} = \rho_{i, \text{re}} \tilde{y}_{i,t-1} + v_{i,t}, i = 0, 1, 2 \quad (3)$$

分别估计单位根伪 $z$ 检验量和系数检验量,并通过模拟得到几组样本容量的分位数。

### 1.2 新递归趋势调整方法

文中给出如下2种调整方法,分别称为第三种和第四种递归趋势调整:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{3,t} &= y_t - \hat{\alpha}_{t-1}^{\text{re}} - \hat{\beta}_{t-1}^{\text{re}} t, \tilde{y}_{3,t-1} = \tilde{y}_{1,t-1}, v_{3,t} = \tilde{y}_{3,t} - \tilde{y}_{3,t-1} \\ \tilde{y}_{4,t} &= y_t - \hat{\alpha}_t^{\text{re}} - \hat{\beta}_t^{\text{re}} (t-1) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta y_k, \tilde{y}_{4,t-1} = \tilde{y}_{1,t-1}, v_{4,t} = \tilde{y}_{4,t} - \tilde{y}_{4,t-1} \end{aligned}$$

在原假设 $H_0: \rho = 1$ 成立时,运算表明:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{3,t} &= S_t + \frac{2(t+1)}{(t-1)(t-2)} \sum_{k=1}^{t-1} S_k - \frac{6}{(t-1)(t-2)} \sum_{k=1}^{t-1} kS_k \\ \tilde{y}_{4,t} &= S_t + \frac{2t-8}{t(t-1)} \sum_{k=1}^t S_k + \frac{18-6t}{t(t+1)(t-1)} \sum_{k=1}^t kS_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \\ \tilde{y}_{3,t-1} = \tilde{y}_{4,t-1} &= S_{t-1} + \frac{2}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} S_k - \frac{6}{t(t-1)} \sum_{k=1}^{t-1} kS_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{3,t} &= \varepsilon_t + \frac{6}{(t-1)(t-2)} \sum_{k=1}^{t-1} S_k - \frac{12}{t(t-1)(t-2)} \sum_{k=1}^{t-1} kS_k \\ v_{4,t} &= \varepsilon_t - \frac{4t-8}{t(t+1)} S_t - \frac{8}{t(t-1)} \sum_{k=1}^{t-1} S_k + \\ &\frac{24}{t(t-1)(t+1)} \sum_{k=1}^{t-1} kS_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \end{aligned}$$

显然,这2种递归趋势调整方法也能消除未知参数 $\beta$ ,理论上也能用于单位根检验。

## 2 递归趋势调整检验量分布

### 2.1 理论基础

对转化后变量统一建立回归模型:

$$\tilde{y}_{i,t} = \rho_{i, \text{re}} \tilde{y}_{i,t-1} + v_{i,t}, i = 1, 2, 3, 4 \quad (4)$$

记 $\rho_{i, \text{re}}$ 的最小二乘回归(ordinary least squares, OLS)估计为 $\hat{\rho}_{i, \text{re}}$ ,检验 $H_0: \rho_{i, \text{re}} = 1$ 的系数检验量和伪 $z$ 检验量为 $\tau_i$ 和 $z_i$ ,计算公式如下:

$$\begin{aligned} \tau_i = n(\hat{\rho}_{i, \text{re}} - 1) &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \tilde{y}_{i,t-1} v_{i,t}}{\frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n \tilde{y}_{i,t-1}^2} \\ z_i = \frac{\hat{\rho}_{i, \text{re}} - 1}{\text{Se}(\hat{\rho}_{i, \text{re}})} &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \tilde{y}_{i,t-1} v_{i,t}}{\hat{\sigma}_i \sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n \tilde{y}_{i,t-1}^2}}, i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

其中: $\text{Se}(\cdot)$ 为标准误差; $\hat{\sigma}_i$ 根据残差 $\hat{v}_{i,t} = \tilde{y}_{i,t} - \hat{\rho}_{i, \text{re}} \tilde{y}_{i,t-1}$ 计算。为得到检验量分布,需使用如下引理结论。

**引理** 设 $\{Z_{n,k}, 1 \leq k \leq n, n > 1\}$ 为随机变量阵列,且

$$\|Z_{n,k}\|_1 \stackrel{\Delta}{=} E|Z_{n,k}| \leq C\sqrt{k/n}$$

其中 $C$ 为不依赖于 $k, n$ 的常数,规定 $S_{n,0} = 0$ ,且令 $U_n(s) = S_{n, [ns]}, 0 \leq s \leq 1$ 满足:

$$U_n(\cdot) \Rightarrow U(\cdot)$$

其中: $[ns]$ 表示不超过 $ns$ 的整数部分; $U$ 表示 $D[0,1]$ 上轨道连续的随机过程; $\Rightarrow$ 表示分布弱收敛极限。

定义 $V_{n,k} = Z_{n,k}/k^p, 1 \leq k \leq n, n > 1, p \geq 0$ ,则有

$$\sup_{1 \leq k \leq n} |V_{n,k}| = \begin{cases} O_p(n^{-p/3}), 0 \leq p < 3/2 \\ O_p(\lg n / \sqrt{n}), p = 3/2 \\ O_p(1/\sqrt{n}), p > 3/2 \end{cases}$$

**证明** 根据假设 $U_n(\cdot) \Rightarrow U(\cdot)$ 得到

$$\sup_{1 \leq k \leq n} |Z_{n,k}| = O_p(1)$$

当 $0 \leq p < 3/2$ 时有

$$\sup_{1 \leq k \leq n} |V_{n,k}| \leq \sum_{k \leq n^{1/3}} |V_{n,k}| + \sup_{n^{1/3} \leq k \leq n} |V_{n,k}| \stackrel{\Delta}{=} Y_n + W_n$$

由于

$$E|Y_n| \leq \sum_{k \leq n^{1/3}} \frac{\|Z_{n,k}\|_1}{k^p} \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \sum_{k \leq n^{1/3}} k^{1/2-p} \leq Cn^{(3/2-p)/3-1/2} = \frac{C}{n^{p/3}} \quad (5)$$

且

$$W_n = \sup_{n^{1/3} \leq k \leq n} \frac{|Z_{n,k}|}{k^p} \leq \frac{C}{n^{p/3}} \sup_{1 \leq k \leq n} |Z_{n,k}| = O_p\left(\frac{1}{n^{p/3}}\right) \quad (6)$$

由式 (5) 和式 (6) 可得到引理的第一个结论。

当  $p = 3/2$  时有

$$E \sup_{1 \leq k \leq n} |V_{n,k}| \leq E \left[ \sum_{k \leq n} |V_{n,k}| \right] = \sum_{k \leq n} \frac{\|Z_{n,k}\|_1}{k^{3/2}} \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \sum_{k \leq n} \frac{1}{k} \leq C \frac{\lg n}{\sqrt{n}} \quad (7)$$

由此得到引理的第二个结论。当  $p > 3/2$  时有

$$E \sup_{1 \leq k \leq n} |V_{n,k}| \leq \sum_{k \leq n} \frac{\|Z_{n,k}\|_1}{k^p} \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \sum_{k \leq n} k^{1/2-p} \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \quad (8)$$

由此得到引理的第三个结论。

由以上引理得到证明本文结论所需的推论。

**推论** 若  $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , 取  $p = 1$ , 记  $Z_{n,k}$  为下列结果:

$$Z_{n,k} \hat{=} \eta_k = \sum_{t=1}^k \varepsilon_t, Z_{n,k} = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \eta_t, Z_{n,k} = \frac{1}{k^2} \sum_{t=1}^k t \eta_t$$

当  $a_l = O(l^{-1}), b_l = O(l^{-2}), c_l = O(l^{-3})$  时有:

$$a_{[nr]} \frac{\eta_{[nr]}}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0, \quad b_{[nr]} \sum_{t=1}^{[nr]} \frac{\eta_t}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0, \quad c_{[nr]} \sum_{t=1}^{[nr]} \frac{t \eta_t}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0$$

### 2.2 检验量分布

由下面定理给出 4 种递归趋势调整后两类检验量分布。

**定理** 当原假设  $H_0: \rho = 1$  成立时, 经过上述 4 种递归趋势调整后, 检验量分布为:

$$\begin{aligned} \tau_1 &\Rightarrow \frac{\int_0^1 \underline{W}(r) dW(r) - W(1) \int_0^1 \underline{W}(r) dr}{\int_0^1 \underline{W}^2(r) dr}, z_1 \Rightarrow \frac{\int_0^1 \underline{W}(r) dW(r) - W(1) \int_0^1 \underline{W}(r) dr}{\sqrt{\int_0^1 \underline{W}^2(r) dr}} \\ \tau_2 &\Rightarrow \frac{\int_0^1 \underline{W}(r) dW(r) - 4 \int_0^1 \underline{W}(r) \left( W(r) + \frac{1}{2} r^{-1} \int_0^r W(s) ds - 3r^{-2} \int_0^r sW(s) ds \right) r^{-1} dr}{\int_0^1 \underline{W}^2(r) dr} \\ z_2 &\Rightarrow \frac{\int_0^1 \underline{W}(r) dW(r) - 4 \int_0^1 \underline{W}(r) \left( W(r) + \frac{1}{2} r^{-1} \int_0^r W(s) ds - 3r^{-2} \int_0^r sW(s) ds \right) r^{-1} dr}{\sqrt{\int_0^1 \underline{W}^2(r) dr}} \\ \tau_3 &\Rightarrow \frac{\int_0^1 \underline{W}(r) dW(r) + 12 \int_0^1 \left( \underline{W}(r) r^{-3} \int_0^r \left( \frac{1}{2} r - s \right) W(s) ds \right) dr}{\int_0^1 \underline{W}^2(r) dr}, z_3 \Rightarrow \frac{\int_0^1 \underline{W}(r) dW(r) + 12 \int_0^1 \left( \underline{W}(r) r^{-3} \int_0^r \left( \frac{1}{2} r - s \right) W(s) ds \right) dr}{\sqrt{\int_0^1 \underline{W}^2(r) dr}} \\ \tau_4 &\Rightarrow \frac{\int_0^1 \underline{W}(r) dW(r) - W(1) \int_0^1 \underline{W}(r) dr - 4 \int_0^1 \underline{W}(r) \left( W(r) + \frac{2}{r} \int_0^r W(s) ds - \frac{6}{r^2} \int_0^r sW(s) ds \right) \frac{1}{r} dr}{\int_0^1 \underline{W}^2(r) dr} \\ z_4 &\Rightarrow \frac{\int_0^1 \underline{W}(r) dW(r) - W(1) \int_0^1 \underline{W}(r) dr - 4 \int_0^1 \underline{W}(r) \left( W(r) + \frac{2}{r} \int_0^r W(s) ds - \frac{6}{r^2} \int_0^r sW(s) ds \right) \frac{1}{r} dr}{\sqrt{\int_0^1 \underline{W}^2(r) dr}} \end{aligned}$$

其中:  $\underline{W}(r) = W(r) - \frac{1}{r^2} \int_0^r (6s - 2r) W(s) ds$ ;  $W(\cdot)$  表示定义在  $[0, 1]$  上的维纳过程。

**证明** 根据  $\tilde{y}_{i,t-1} = S_{t-1} + \frac{2}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} S_k - \frac{6}{t(t-1)} \sum_{k=1}^{t-1} k S_k$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , 取前  $[nr]$  项和得

$$\begin{aligned} n^{-1/2} \tilde{y}_{i,[nr]} &= n^{-1/2} S_{[nr]} + \frac{2n}{[nr]} n^{-3/2} \sum_{k=1}^{[nr]} S_k - \\ &\quad \frac{6}{[nr]([nr]+1)} n^{-1/2} \sum_{k=1}^{[nr]} k S_k \end{aligned}$$

利用  $\frac{1}{[nr]([nr]+1)} = [nr]^{-2} + O([nr]^{-3})$  和推论的第三个结论得

$$\begin{aligned} \frac{n^{-1/2}}{[nr]([nr]+1)} \sum_{k=1}^{[nr]} k S_k &= n^2 [nr]^{-2} n^{-5/2} \sum_{k=1}^{[nr]} k S_k + \\ &O([nr]^{-3}) \sum_{k=1}^{[nr]} k S_k / \sqrt{n} \Rightarrow r^{-2} \sigma_\varepsilon \int_0^r sW(s) ds \end{aligned}$$

再结合  $n^{-1/2} S_{[nr]} \Rightarrow \sigma_\varepsilon W(r), n^{-3/2} \sum_{k=1}^{[nr]} S_k \Rightarrow$

$\sigma_\varepsilon \int_0^r W(s)ds$ 得

$$n^{-1/2} \tilde{y}_{i,[nr]} \Rightarrow \sigma_\varepsilon \left( W(r) - \frac{1}{r^2} \int_0^r (6s-2r)W(s)ds \right) \hat{=} \sigma_\varepsilon \underline{W}(r)$$

当原假设成立时,对第一种递归趋势调整根据 OLS 有

$$\hat{\rho}_{1, re} - 1 = \frac{\sum_{t=2}^n \tilde{y}_{1,t-1} v_{1,t}}{\sum_{t=2}^n \tilde{y}_{1,t-1}^2}$$

其中  $v_{1,t} = \varepsilon_t - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t$ 。根据文献 [23] 中定理 2.1 有

$$\tau_1 = n(\hat{\rho}_{1, re} - 1) = \frac{n^{-1} \sum_{t=2}^n \tilde{y}_{1,t-1} \left( \varepsilon_t - n^{-1} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t \right)}{n^{-2} \sum_{t=2}^n \tilde{y}_{1,t-1}^2} \Rightarrow \frac{\int_0^1 \underline{W}(r) dW(r) - W(1) \int_0^1 \underline{W}(r) dr}{\int_0^1 \underline{W}^2(r) dr}$$

$$n^{-1} \sum_{t=2}^n \tilde{y}_{2,t-1} \left( \frac{2-4t}{t(t+1)} S_t \right) = n^{-1} \sum_{t=2}^n n^{-1/2} \tilde{y}_{2,t-1} \left( \frac{n(2-4t)}{t(t+1)} n^{-1/2} S_t \right) \Rightarrow -4\sigma_\varepsilon^2 \int_0^1 \underline{W}(r) r^{-1} W(r) dr$$

$$n^{-1} \sum_{t=2}^n \tilde{y}_{2,t-1} \left( \frac{2}{t(t-1)} \sum_{k=1}^{t-1} S_k \right) = n^{-1} \sum_{t=2}^n n^{-1/2} \tilde{y}_{2,t-1} \left( \frac{2n^2}{t(t-1)} n^{-3/2} \sum_{k=1}^{t-1} S_k \right) \Rightarrow 2\sigma_\varepsilon^2 \int_0^1 \underline{W}(r) \left( r^{-2} \int_0^r W(s) ds \right) dr$$

$$n^{-1} \sum_{t=2}^n \tilde{y}_{2,t-1} \left( \frac{12}{t(t-1)(t+1)} \sum_{k=1}^{t-1} k S_k \right) = n^{-1} \sum_{t=2}^n n^{-1/2} \tilde{y}_{2,t-1} \left( \frac{12n^3}{t(t-1)(t+1)} n^{-5/2} \sum_{k=1}^{t-1} k S_k \right) \Rightarrow 12\sigma_\varepsilon^2 \int_0^1 \underline{W}(r) \left( r^{-3} \int_0^r s W(s) ds \right) dr$$

综合这些结果得

$$\tau_2 = \frac{n^{-1} \sum_{t=2}^n \tilde{y}_{2,t-1} v_{2,t}}{n^{-2} \sum_{t=2}^n \tilde{y}_{2,t-1}^2} \Rightarrow \frac{\int_0^1 \underline{W}(r) dW(r) - 4 \int_0^1 \underline{W}(r) \left( W(r) + \frac{1}{2} r^{-1} \int_0^r W(s) ds - 3r^{-2} \int_0^r s W(s) ds \right) r^{-1} dr}{\int_0^1 \underline{W}^2(r) dr}$$

类似有  $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{\sum_{t=2}^n (\tilde{y}_{2,t} - \hat{\rho}_{2, re} \tilde{y}_{2,t-1})^2}{n-2} = \sigma_\varepsilon^2 + o_p(1)$ , 进而得到伪  $z$  检验量

$$z_2 = \frac{n^{-1} \sum_{t=2}^n \tilde{y}_{2,t-1} v_{2,t}}{\hat{\sigma}_2 \sqrt{n^{-2} \sum_{t=2}^n \tilde{y}_{2,t-1}^2}} \Rightarrow \frac{\int_0^1 \underline{W}(r) dW(r) - 4 \int_0^1 \underline{W}(r) \left( W(r) + \frac{1}{2} r^{-1} \int_0^r W(s) ds - 3r^{-2} \int_0^r s W(s) ds \right) r^{-1} dr}{\sqrt{\int_0^1 \underline{W}^2(r) dr}}$$

对第三种和第四种递归趋势调整有

$$v_{3,t} = \varepsilon_t + \frac{6}{(t-1)(t-2)} \sum_{k=1}^{t-1} S_k - \frac{12}{t(t-1)(t-2)} \sum_{k=1}^{t-1} k S_k, \quad v_{4,t} = \varepsilon_t - \frac{4t-8}{t(t+1)} S_t - \frac{8}{t(t-1)} \sum_{k=1}^{t-1} S_k + \frac{24}{t(t-1)(t+1)} \sum_{k=1}^{t-1} k S_k - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t$$

$v_{3,t}$  与  $v_{2,t}$  相似, 但缺少  $S_t$ ; 而  $v_{4,t}$  是  $v_{1,t}$  与  $v_{2,t}$  的混合体, 所以仿照  $\tau_1, z_1, \tau_2, z_2$  的证明过程可验证  $\tau_3, z_3, \tau_4, z_4$  的分布与定理结论一致。虽然 4 种递归趋势调整

另一方面有

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\sum_{t=2}^n (\tilde{y}_{1,t} - \hat{\rho}_{1, re} \tilde{y}_{1,t-1})^2}{n-2} = \frac{\sum_{t=2}^n \left( \varepsilon_t - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t \right)^2 + (\hat{\rho}_{1, re} - 1)^2 \sum_{t=2}^n \tilde{y}_{1,t-1}^2 - 2(\hat{\rho}_{1, re} - 1) \sum_{t=2}^n v_{1,t} \tilde{y}_{1,t-1}}{n-2} = \sigma_\varepsilon^2 + o_p(1)$$

进而得到伪  $z$  检验量分布为

$$z_1 = \frac{n^{-1} \sum_{t=2}^n \tilde{y}_{1,t-1} v_{1,t}}{\hat{\sigma}_1 \sqrt{n^{-2} \sum_{t=2}^n \tilde{y}_{1,t-1}^2}} \Rightarrow \frac{\int_0^1 \underline{W}(r) dW(r) - W(1) \int_0^1 \underline{W}(r) dr}{\sqrt{\int_0^1 \underline{W}^2(r) dr}}$$

对第二种递归趋势调整有

$$v_{2,t} = \varepsilon_t + \frac{2-4t}{t(t+1)} S_t - \frac{2}{t(t-1)} \sum_{k=1}^{t-1} S_k + \frac{12}{t(t-1)(t+1)} \sum_{k=1}^{t-1} k S_k$$

根据推论的结论结合文献 [23] 中定理 2.1 得

采用不同调整机理, 但证明显示检验量在大样本下存在极限分布, 从理论上保证有限样本模拟分位数具有合理性, 支持已有文献的模拟结论。

### 3 蒙特卡洛模拟结果与分析

#### 3.1 模拟设置与分位数获取

为验证定理中两类检验量极限分布是否正确, 考察检验量的分位数随样本变动是否呈现收敛趋势; 同时, 为说明递归趋势调整的必要性和合理性, 与经典 DF 检验量比较检验效果, 文中采用蒙特卡洛模拟方法验证。首先获取检验量分位数, 鉴于单位根检验为左检验, 文中只给出 1%, 5% 和 10% 分位数。递归趋势调整后检验量分布不再受参数  $\beta$  影响, 鉴于前文所述的原因, 不失一般性取  $\beta = 1$ , 同时设  $\alpha = 0$ 。为消除初始值  $y_0$  对分布可能造成的影响, 在计算检验量前, 剔除前 100 个观测值。设模拟次数为

10 万次, 样本容量为 25, 50, 100, 250, 500 和 1 000, 扰动项  $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ 。文中水平和功效检验模拟采取同样的设置。

限于篇幅, 文中仅列出常用伪  $z$  检验量分位数, 如表 1。由表 1 中分位数可得到 2 个结论: 总体而言, 检验量  $z_1$  和  $z_3$  随样本容量增大而上升, 但检验量  $z_2$  和  $z_4$  随样本容量增大而下降; 分位数无论是上升还是下降, 变动态势明显具有收敛趋势, 相邻样本间分位数差异基本体现在第二位小数。实际上系数检验量  $\tau_i (i = 1, 2, 3, 4)$  也具上述特点, 这从模拟角度证实上述 4 种递归趋势调整模型检验量在大样本下存在极限分布。

表 1 6 种样本容量下伪  $z$  检验量 3 种分位数的模拟结果

Tab. 1 Simulation results of pseudo  $z$ -test with 3 quantiles under 6 sample sizes

样本容量	1%				5%				10%			
	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
25	-2.48	-3.69	-2.33	-3.63	-1.74	-2.96	-1.59	-2.92	-1.37	-2.60	-1.22	-2.58
50	-2.43	-3.64	-2.27	-3.67	-1.74	-3.00	-1.57	-3.06	-1.38	-2.69	-1.21	-2.77
100	-2.39	-3.62	-2.22	-3.73	-1.72	-3.03	-1.53	-3.17	-1.38	-2.74	-1.18	-2.90
250	-2.38	-3.65	-2.21	-3.80	-1.72	-3.07	-1.52	-3.28	-1.37	-2.79	-1.15	-3.01
500	-2.36	-3.67	-2.21	-3.87	-1.71	-3.11	-1.51	-3.34	-1.38	-2.83	-1.15	-3.07
1 000	-2.35	-3.69	-2.16	-3.93	-1.71	-3.13	-1.48	-3.40	-1.37	-2.83	-1.14	-3.10

#### 3.2 检验水平与检验功效模拟

使用 5% 分位数考察检验量检验水平, 为和经典 DF 检验对比, 在考察检验水平同时, 也分析单位

根项系数  $\rho$  的估计精度, 模拟结果如表 2。其中  $\hat{\rho}_{DF}$  和  $z_{DF}$  分别表示经典 DF 检验模式对应的  $\rho$  与伪  $z$  检验量估计结果。

表 2 5 种样本容量下自回归系数估计结果与检验水平

单位: %

Tab. 2 Estimation results and testing level of autoregressive coefficient under five sample sizes

Unit: %

样本容量	$\hat{\rho}_{1,re}$	$\hat{\rho}_{2,re}$	$\hat{\rho}_{3,re}$	$\hat{\rho}_{4,re}$	$\hat{\rho}_{DF}$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_{DF}$
25	91.80	73.40	95.40	72.50	62.20	4.99	4.91	5.02	4.89	4.92
50	95.90	85.00	98.10	83.80	80.40	4.89	4.96	4.92	5.00	4.90
100	97.90	91.90	99.20	91.00	89.90	5.10	5.17	5.15	5.09	5.19
250	99.20	96.50	99.70	96.10	95.90	5.02	5.07	5.00	5.00	4.94
500	99.60	98.20	99.90	98.00	97.90	5.01	4.90	5.08	4.85	4.84

由表 2 可看出: 就  $\rho$  估计, 有  $\hat{\rho}_{DF} < \hat{\rho}_{4,re} < \hat{\rho}_{2,re} < \hat{\rho}_{1,re} < \hat{\rho}_{3,re}$ , 表明不同递归趋势调整模型间存在差异, 但精度上均一致优于 DF 估计, 且在样本容量不超过 100 时更为突出, 显示趋势调整模型在参数估计方面具有明显优势; 就检验水平, 和 DF 检验一样, 4 种递归趋势调整检验水平都稳定在显著性水平 5% 左右, 根据 Godfrey 等<sup>[24]</sup> 显著性水平区间估计公式, 取概率度为 1.96 得到区间估计结果为 (4.809%, 5.191%)。由此看出, 所有检验水平都落在该区间内, 因此递归趋势调整模型检验量具有满意的检验水平。

分别令  $\rho$  为 0.95, 0.90 和 0.85, 考察检验功效, 模拟结果如表 3。表 3 显示: 当样本容量相同而  $\rho$  远离 1 或  $\rho$  相同而样本容量增大时, 检验功效也递增, 与检验量无关, 这与已有结论相符; 不同递归趋势调整模型间的检验功效存在差异, 但当  $\rho$  不小于 0.90 而样本不超过 250 时, 递归趋势调整模型检验功效高于经典 DF 检验结果; 当  $\rho$  与 1 相差较远 (如  $\rho = 0.85$ ) 且样本容量相当大 (如为 250) 时, 5 种检验量的检验功效完全相当, 但在近单位根 (如  $\rho = 0.95$ ) 时, 即使样本为 500, 递归趋势调整模型的检验功效仍较高。因此, 递归趋势调整模式单位根检验具有功效优势。

表3 5种样本容量下伪z检验量检验功效

单位:%

Tab.3 Test efficacy for pseudo z-test under five sample sizes

Unit:%

样本容量	$\rho = 0.95$					$\rho = 0.90$					$\rho = 0.85$				
	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_{DF}$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_{DF}$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_{DF}$
25	5.17	5.12	5.18	5.11	5.09	6.23	6.18	6.25	6.21	5.75	7.45	7.38	7.48	7.37	6.75
50	6.09	6.19	6.12	6.21	5.78	9.51	9.70	9.58	9.62	8.34	15.59	16.07	15.62	15.76	13.08
100	9.89	10.12	10.04	9.70	8.49	24.33	25.17	24.50	23.95	19.66	48.72	50.73	49.02	48.12	40.25
250	34.33	35.83	34.70	33.48	27.50	89.68	92.01	89.63	89.51	84.32	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
500	88.91	91.37	88.96	88.65	83.28	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

### 4 实证结果与分析

选取上证综合指数收盘价对递归趋势调整检验量的实用性进行检验,样本期间为2019年1月2日至2023年2月16日的共1000个观测值。为降低指标波动性,对观测值取对数处理,图1为观测值取对数后的指标时序图。

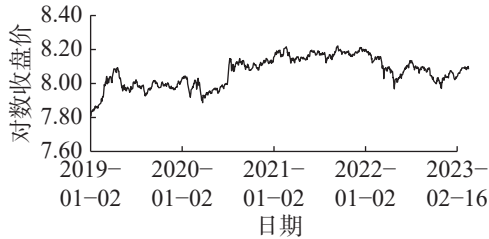


图1 上证综合指数对数收盘价时序图

Fig.1 Time series chart of the logarithmic closing price of Shanghai composite index

图1显示,对数化收盘价具有一定趋势,单位根检验模型应使用含趋势项设置模式。

表4为4种递归趋势调整检验和经典DF单位根检验量估计结果。表4显示:所有递归趋势调整单位根检验量均大于表1中样本容量为1000各自对应的分位数,表明该序列为非平稳过程,这和经典DF检验量的检验结论相同;单位根项估计值在0.98左右,接近1,表明序列为单位根过程;4种递归趋势调整检验量和经典DF检验量值都小于各自对应的分位数,收益率序列为平稳序列,这也从单位根项估计值在0.02左右远离1得到验证。实证结果表明2种序列递归趋势调整检验结果和经典的DF检验结果一致,从实证角度证实递归趋势调整检验量的适用性。

表4 上证综合指数收盘价对数及其收益率单位根检验结果

Tab.4 Unit root test results of the closing price of Shanghai composite index and its return rate

检验序列	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_{DF}$	$\hat{\rho}_{1,re}$	$\hat{\rho}_{2,re}$	$\hat{\rho}_{3,re}$	$\hat{\rho}_{4,re}$	$\hat{\rho}_{DF}$
对数序列	-0.58	-2.31	-0.18	-2.69	-2.95	0.997	0.989	0.999	0.987	0.986
收益率序列	-30.15	-30.88	-30.05	-30.90	-30.97	0.020	0.020	0.020	0.020	0.017

### 5 结论

在已有研究的基础上,提出2种新递归趋势调整方法,通过构建引理推导出4种递归趋势检验量分布,利用蒙特卡洛模拟获取检验量分位数,考察趋势项参数估计偏差和检验量水平扭曲程度和功效优势,利用上证综合指数序列验证递归趋势调整方法的适用性,得到以下主要结论:

1) 就递归调整方法,除已有2种递归趋势调整方法和2种转换模式之外,本文提出的2种递归趋势调整方法也可用于单位根检验,可丰富递归趋势调整理论。

2) 就检验量分布,4种递归趋势调整模型的两类单位根检验量在大样本下均具有明确的分布,都

收敛到维纳过程的泛函,从理论上保证了已有文献的模拟结论,也为本文分位数模拟提供理论支持。

3) 就单位根项系数估计精度,当原假设成立存在单位根时,递归趋势调整模型比经典DF估计更接近真实值,具有估计优势。

4) 就检验水平和检验功效,递归趋势调整和经典DF两类检验模式都具有满意的检验水平;但在检验功效方面,递归趋势调整模型具有明显的功效优势,只有当样本容量足够大和单位根项系数远离1时,两类检验模式才具有相同的检验功效。

5) 就上证综合指数收盘价序列单位根检验结果,无论是对数收盘价序列还是收益率序列,递归趋势调整和经典DF两类检验模式的结论均相同,表明递归趋势调整检验模式也可用于实证研究。

## 参考文献:

- [1] MANTALOS P, KARAGRIGORIOU A. Bootstrapping the augmented Dickey–Fuller test for unit root using the MDIC[J]. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2012, 82(3):431–443.
- [2] 江海峰,陶长琪,陈启明. ADF模式中漂移项和趋势项检验量分布与Bootstrap检验研究[J]. *统计与信息论坛*, 2014, 29(6):3–10.
- [3] 江海峰,陶长琪,汪忠志. 局部线性趋势模型单位根检验量分布与Bootstrap检验[J]. *统计研究*, 2014(11):101–108.
- [4] ELLIOTT G, ROTHENBERG T J, STOCK J H. Efficient tests for an autoregressive unit root[J]. *Econometrica*, 1996, 64(4):813–836.
- [5] NG S, PERRON P. Lag length selection and the construction of unit root tests with good size and power[J]. *Econometrica*, 2001, 69(6):1519–1554.
- [6] SHIN D W, SO B S. Recursive mean adjustment for unit root tests[J]. *Journal of Time Series Analysis*, 2001, 22(5):595–612.
- [7] SHIN D W, SO B S. Recursive mean adjustment and tests for nonstationarities[J]. *Economics Letters*, 2002, 75(2):203–208.
- [8] SHIN D W, KANG S, OH M S. Recursive mean adjustment for panel unit root tests[J]. *Economics Letters*, 2004, 84(3):433–439.
- [9] 白仲林. 退势单位根检验的小样本性质[J]. *统计研究*, 2007, 24(4):19–22.
- [10] 江海峰,崔立志,汪忠志. 递归均值调整单位根检验能提高检验功效吗?[J]. *统计与信息论坛*, 2014, 29(11):3–10.
- [11] RODRIGUES P M M. Properties of recursive trend-adjusted unit root tests[J]. *Economics Letters*, 2006, 91(3):413–419.
- [12] LIZARAZU A E, VILLASENOR A J A. Ajuste recursivo con transformaciones invariantes y bootstrapping: El caso de una caminata aleatoria con intercepto[J]. *Econo Quantum*, 2010, 7(1):97–119.
- [13] SUL D. Panel unit root tests under cross section dependence with recursive mean adjustment[J]. *Economics Letters*, 2009, 105(1):123–126.
- [14] 江海峰,杨海文. 基于递归趋势调整的单位根检验[J]. *统计与决策*, 2015(11):76–78.
- [15] RODRIGUES P M M. Recursive adjustment, unit root tests and structural breaks[J]. *Journal of Time Series Analysis*, 2013, 34(1):62–82.
- [16] WANG S, LI Y, WEN K. Recursive adjusted unit root tests under non-stationary volatility[J]. *Economics Letters*, 2021, 205(C):1–5.
- [17] 江海峰,胡根华. 单位根KPSS检验趋势检验量改进研究:基于递归估计上确界模式[J]. *统计与决策*, 2024, 639(3):35–40.
- [18] DUTT S D, GHOSH D. An application of the “Recursive Flexible Window” methodology to test for financial bubbles in a major stock market[J]. *The Journal of Applied Business and Economics*, 2023, 25(4):141–151.
- [19] GU Z. A study on the measurement of real estate bubble based on GSADF: a case study of four super first-tier cities in China[J]. *Highlights in Business, Economics and Management*, 2023(5):499–506.
- [20] ÖZCAN K A. Food price bubbles: food price indices of turkey, the FAO, the OECD, and the IMF[J]. *Sustainability*, 2023, 15(13):1–21.
- [21] WAHEED A, AKBAR S, SIDDIQ S A B, et al. Testing and identifying multiple bubbles in Pak Rupee-Chinese Yuan exchange rate[J]. *Journal of Positive School Psychology*, 2023, 7(2):1937–1951.
- [22] WANG T, WU F, DICKINSON D, et al. Energy price bubbles and extreme price movements: evidence from China’s coal market[J]. *Energy Economics*, 2024, 129(1):107253.
- [23] KURTZ T C, PROTTER P. Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations[J]. *Annals of Probability*, 1991, 19(3):1035–1070.
- [24] GODFREY L G, ORME C D. Controlling the significance levels of prediction error tests for linear regression models[J]. *The Econometrics Journal*, 2000, 3(1):66–83.

责任编辑:丁吉海