

具有 Markov 切换脉冲随机时滞系统的有限时间稳定

尹浩, 姚凤麒, 王国庆

(安徽工业大学电气与信息工程学院, 安徽马鞍山 243032)

摘要: 针对一类具有 Markov 切换和时变时滞脉冲随机系统, 利用 Lyapunov-Krasovskii (L-K) 泛函法和平均脉冲区间条件建立系统均方有限时间稳定的相关性准则。利用广义伊藤公式求出 L-K 泛函关于时间的导数, 根据积分不等式对求出的 L-K 泛函导数进行放缩, 降低判据的保守性; 结合平均脉冲区间条件约束均匀时间间隔内脉冲发生次数, 得到以线性矩阵不等式 (LMI) 形式的时滞相关稳定性判据, 进一步降低判据的保守性; 设计使系统满足有限时间稳定的状态反馈控制器, 且给出实例进行验证。结果表明: 本文建立的相关性准则, 通过选取模态相关的泛函且利用平均脉冲区间条件, 可进一步降低判据的保守性。

关键词: Markov 切换; 脉冲随机时滞系统; 有限时间稳定; 平均脉冲区间; 线性矩阵不等式

中图分类号: O 231.5 **文献标志码:** A **doi:** 10.12415/j.issn.1671-7872.23092



Finite Time Stability of Impulsive Stochastic Time-delay System with Markov Switching

YIN Hao, YAO Fengqi, WANG Guoqing

(School of Electrical & Information Engineering, Anhui University of Technology, Maanshan 243032, China)

Abstract: For a class of impulsive stochastic systems with Markov switch and time-varying delay, the correlation criterion of mean-square finite-time stability of the system was established by using Lyapunov-Krasovskii (L-K) functional method and average impulsive interval condition. The derivative of L-K functional about time was obtained by generalized Ito's formula, and the derivative of L-K functional was scaled according to integral inequality to reduce the conservatism of the criterion. Combining with the condition of average impulsive interval to constrain the number of impulses in a uniform time interval, a delay-dependent stability criterion in the form of linear matrix inequality (LMI) was obtained to further reduce the conservatism of the criterion. A state feedback controller was designed to make the system meet the finite time stability, and an example was given to verify it. The results show that the correlation criterion established in this paper can further reduce the conservatism of the criterion by selecting the functional of modal correlation and using the condition of average impulsive interval.

Keywords: Markov switching; impulsive stochastic delay system; finite-time stability; average impulsive interval; liner matrix inequalities (LMI)

收稿日期: 2023-06-06

基金项目: 安徽省高校自然科学基金项目 (2022AH050108)

作者简介: 尹浩 (1995—), 男, 江苏徐州人, 硕士生, 主要研究方向随机系统的有限时间稳定性。

通信作者: 姚凤麒 (1984—), 女, 安徽马鞍山人, 博士, 副教授, 主要研究方向随机混杂系统的稳定性与控制。

引文格式: 尹浩, 姚凤麒, 王国庆. 具有 Markov 切换脉冲随机时滞系统的有限时间稳定 [J]. 安徽工业大学学报(自然科学版), 2024, 41(2): 182-188.

随机噪声扰动在实际工程系统中是不可避免的,当系统的可靠性要求较高时,随机噪声扰动不可忽略。脉冲跳变可刻画系统状态在某些时刻的突变或重置,如电力网络中开关电路的频繁改变、生物种群系统中对生物的过度捕捞或投放等。脉冲随机系统综合考虑了随机噪声扰动和脉冲跳变两因素对系统的影响。时滞也会影响系统的性能,作为一类重要的混杂系统,脉冲随机系统得到了广泛研究。对于大多系统,脉冲发生的时间间隔不是均匀分布的,因此难以准确判断脉冲区间的长度。Lu 等^[1]首次提出了平均脉冲区间的概念,允许脉冲区间的上确界可能非常大,而下确界可能相当小。Yao 等^[2]利用平均脉冲区间方法,结合比较引理和 Razumikhin 技巧,建立考虑系统的矩指数稳定性的充分条件;Cai 等^[3]利用 Lyapunov 函数法和 Razumikhin 技巧,建立了具有时滞脉冲离散时间不确定脉冲神经网络的鲁棒指数稳定;Wu 等^[4]利用平均脉冲区间方法,建立脉冲随机时变系统的渐近稳定性的充分条件;Xu 等^[5]建立了具有无限时滞的脉冲随机微分系统的矩指数稳定性的充分条件。

然而,上述研究成果多是基于 Lyapunov 意义下的稳定性与控制,较少涉及系统的有限时间稳定。Lyapunov 稳定性描述系统在无穷区间上的渐进行为反映系统的稳态性能,但不能反映系统的暂态性能。Lyapunov 渐进稳定的系统具有较差的暂态特性,如超调过大等在实际系统中一般是不允许的。导弹系统、机器人操作系统等工作时间短暂,人们更关心的是系统是否满足一定的暂态性能要求。为解决系统的暂态性能问题,俄罗斯研究者 Kamenkov^[6]在 20 世纪 50 年代首次提出有限时间稳定的概念。有限时间稳定,是指系统初始状态在某一范围内时,系统的状态在一定时间区间内不超过某一预先给定的界限。近年,系统的有限时间稳定性问题再次引起广泛关注,并报道了系列研究成果^[7-11]。Markov 跳跃系统作为一类特殊的混杂系统,其中具有 Markov 切换随机系统的有限时间稳定问题是热门的研究方向之一。Liu 等^[12]研究了离散时间正 Markov 跳跃系统的随机有限时间稳定性和镇定问题;Cheng 等^[13]针对一类具有外部干扰和非线性的 Markov 跳跃系统,提出了有限时间异步输出反馈控制方案;Ren 等^[14]针对一类具有不完全转移率的 Markov 跳跃非线性系统,研究了异步有限时间滤波问题;Yan 等^[15]研究了具有半 Markov 随机系统的

有限时间稳定性和镇定问题;苏磊等^[16]综述了半 Markov 跳跃系统的稳定性与控制器与滤波器的设计;Ren 等^[17]研究不确定正 Markov 跳跃神经网络的有限时间有界性和镇定问题。然而,上述研究成果中没有考虑脉冲对系统有限时间稳定性的影响。鉴于此,针对一类具有 Markov 切换的脉冲随机时滞系统,通过选取模态相关的泛函和利用平均脉冲区间条件来降低判据的保守性,建立系统的有限时间稳定准则,以期实现脉冲随机时滞系统的有限时间稳定。

1 预备知识及定义

令 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 表示 1 个完备的概率空间, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 为满足条件的 σ 代数流 (其右连续并且 \mathcal{F}_0 包含所有 P 的空集)。 E 为随机变量的数学期望; A^T 为向量或矩阵 A 转置; $w(t)$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上的一维维纳过程; \mathbf{R}^n 为欧几里得范数 $|\cdot|$ 的 n 维实数空间; $\text{diag}[\dots]$ 表示块对角矩阵, $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ ($\lambda_{\min}(\mathbf{A})$) 为矩阵 \mathbf{A} 的最大(最小)特征值。设 $r(t)$ 为是有限状态空间 $S = \{1, 2, \dots\}$ 上取值的右连续 Markov 链, 假设 $r(t)$ 独立于 $w(t)$, 其转移概率为

$$P\{r(t+\Delta) = j \mid r(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta), & \text{若 } i \neq j \\ 1 + \gamma_{ii}\Delta + o(\Delta), & \text{若 } i = j \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Delta > 0$, ($i \neq j$), $\gamma_{ij} > 0$ 且 $\gamma_{ii} = -\sum_{j=1, i \neq j}^N \gamma_{ij}$ 。

考虑如下具有 Markov 切换的脉冲随机时滞系统:

$$\begin{cases} dx(t) = [A_{r(t)}x(t) + B_{r(t)}x(t-h(t)) + H_{r(t)}u(t)]dt + \\ \quad [C_{r(t)}x(t) + D_{r(t)}x(t-h(t)) + J_{r(t)}u(t)]dw(t), \\ \quad t \neq t_k, t \geq t_0 \\ x(t_k) = F_{r(t_k)}x(t_k^-), k \in \mathbf{Z} \\ x(t_0 + \vartheta) = \xi(\vartheta), \quad -h_{\max} \leq \vartheta \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 分别为系统的状态和系统的控制输入; 初始值 $\xi(\vartheta)$ 为定义在 $[-h_{\max}, 0]$ 的连续函数; $h(t)$ 为连续时变时滞, 满足条件 $0 \leq h_{\min} \leq h(t) \leq h_{\max}$, $h(t) \leq \rho$; $A_{r(t)}$, $B_{r(t)}$, $C_{r(t)}$, $D_{r(t)}$, $F_{r(t_k)}$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上的常数矩阵。为后续简便, 令 $r(t) = i$ ($i = 1, 2, \dots$), 则 $A_{r(t)}$, $B_{r(t)}$, $C_{r(t)}$, $D_{r(t)}$ 简记为 A_i , B_i , C_i , D_i ; 令 $r(t_k) = j$, 则 $F_{r(t_k)}$ 简记为 F_j 。脉冲序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 满足 $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ 且有 $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ 。

定义 1^[18] 假设存在正常数 c_1, c_2, T 且 $c_1 < c_2$, 若 $E(\|\xi\|^2) \leq c_1 \Rightarrow E(|x(t)|^2) < c_2, t \in [t_0, T]$ 。则系统 (2)

$(u(t) \equiv 0)$ 是关于 (c_1, c_2, T) 的均方有限时间稳定。

定义 2^[1] 若存在正整数 N_0 以及正数 τ^* ,使得

$$N(t, s) \leq \frac{t-s}{\tau^*} + N_0, \quad \forall t \geq s \geq t_0 \quad (3)$$

则脉冲序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 的平均脉冲区间为 τ^* 。其中: N_0 为脉冲约束; $N(t, s)$ 为脉冲在区间 $(s, t]$ 内发生的次数。文献 [1] 中的例 3 已说明脉冲序列 $\varpi = \{\varepsilon, 2\varepsilon, \dots, (N_0 - 1)\varepsilon, N_0\tau^*, N_0\tau^* + \varepsilon, N_0\tau^* + 2\varepsilon, \dots, N_0\tau^* + (N_0 - 1)\varepsilon, 2N_0\tau^*, \dots\}$ 满足式 (3) 的平均脉冲区间,其中 ε 是小于 τ_* 的任意正数。接下来引入需要使用的引理。

引理 1^[19] 对于任意正定矩阵 $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 常数 $h > 0$, 向量函数 $x(t) : [t-h, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$, 则有不等式成立:
 $-h \int_{t-h}^t x^T(s) W x(s) ds \leq -\left[\int_{t-h}^t x(s) ds\right]^T W \left[\int_{t-h}^t x(s) ds\right]$ 。

2 主要结果

讨论系统 (2)($u(t) \equiv 0$)的均方有限时间稳定, 利用 L-K 泛函法及平均脉冲区间法建立以下定理。

定理 1 假设脉冲序列满足定义 2 中的平均脉冲区间条件, 存在正常数 $c_1, c_2, T, h_{\min}, h_{\max}, \rho$, 其中 $c_1 < c_2$ 。 $\alpha_i > 0 (i = 1, 2, \dots)$, $\mu_i \geq 1$, 且有适当维度的矩阵 $M_i > 0, Q_{1,i} > 0, Q_{2,i} > 0, Q_3 > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} \Pi & M_i B_i + C_i^T M_i D_i \\ * & D_i^T M_i D_i - (1-\rho) Q_{1,i} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^N \gamma_{ij} (Q_{1,j} + Q_{2,j}) - Q_3 < 0 \quad (5)$$

$$F_j^T M_j F_j - \mu_i M_i \leq 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &(\alpha_i + \frac{1}{\tau^*} \ln \mu_i)(T - t_0) < \ln(c_2 \lambda_{1,i}) - \\ &\ln \left[c_1 (\lambda_{2,i} + h_{\max} \lambda_{3,i} + h_{\max} \lambda_{4,i} + \frac{h_{\max}^2}{2} \lambda_5) \right] - N_0 \ln \mu_i \end{aligned} \quad (7)$$

式中: $\Pi = Q_{1,i} + Q_{2,i} + h_{\max} Q_3 + M_i A_i + A_i^T M_i + C_i^T M_i C_i + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} M_j - \alpha_i M_i$, $\lambda_{1,i} = \lambda_{\min}(M_i)$; $\lambda_{2,i} = \lambda_{\max}(M_i)$; $\lambda_{3,i} = \lambda_{\max}(Q_{1,i})$; $\lambda_{4,i} = \lambda_{\max}(Q_{2,i})$; $\lambda_5 = \lambda_{\max}(Q_3)$ 。

则系统 (2)($u(t) \equiv 0$)是关于 (c_1, c_2, T) 的均方有限时间稳定。

证明 构造 L-K 泛函

$$\begin{aligned} V(x(t), i, t) = &x^T(t) M_i x(t) + \int_{t-h(t)}^t x^T(s) Q_{1,i} x(s) ds + \\ &\int_{t-h_{\max}}^t x^T(s) Q_{2,i} x(s) ds + \int_{-h_{\max}}^0 \int_{t+\theta}^t x^T(s) Q_3 x(s) ds d\theta \end{aligned} \quad (8)$$

将 $V(x(t), i, t)$ 简写为 $V(i, t)$, 当 $t \neq t_k$, 根据伊藤公式可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V(i, t)) = &x^T(t) Q_{1,i} x(t) - (1 - \dot{h}(t)) \\ &x^T(t-h(t)) Q_{1,i} x(t-h(t)) + \\ &x^T(t) Q_{2,i} x(t) - x^T(t-h_{\max}) Q_{2,i} x(t-h_{\max}) + \\ &h_{\max} x^T(t) Q_3 x(t) - \int_{t-h_{\max}}^t x^T(s) Q_3 x(s) ds + \\ &2x^T(t) M_i [A_i x(t) + B_i x(t-h(t))] + \\ &\text{trace}\{[C_i x(t) + D_i x(t-h(t))]^T M_i [C_i x(t) + \\ &D_i x(t-h(t))]\} + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} x^T(t) M_j x(t) + \\ &\sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \int_{t-h(t)}^t x^T(s) Q_{1,j} x(s) ds + \\ &\sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \int_{t-h_{\max}}^t x^T(s) Q_{2,j} x(s) ds \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $\mathcal{L}(V)$ 为随机微分算子。整理式 (9) 中积分项并结合引理 1 和式 (5) 得到

$$\begin{aligned} &-\int_{t-h_{\max}}^t x^T(s) \left[Q_3 - \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} (Q_{1,j} + Q_{2,j}) \right] x(s) ds - \\ &\int_{t-h_{\max}}^{t-h(t)} x^T(s) \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} Q_{1,j} x(s) ds \leq \\ &U_1^T \left[-\frac{1}{h_{\max}} \left(Q_3 - \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} (Q_{1,j} + Q_{2,j}) \right) \right] U_1 + \\ &U_2^T \left[-\frac{1}{h_{\max} - h_{\min}} \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} Q_{1,j} \right] U_2 \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $U_1 = \int_{t-h_{\max}}^t x(s) ds, U_2 = \int_{t-h_{\max}}^{t-h(t)} x(s) ds$ 。由式 (4) 有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V(i, t)) \leq &\zeta^T(t) \text{diag}[A_{11}, A_{22}] \zeta(t) \leq \\ &\alpha_i x^T(t) M_i x(t) \leq \alpha_i (V(i, t)) \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \zeta(t) = &\begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h(t)) & x^T(t-h_M) & U_1^T & U_2^T \end{bmatrix} \\ A_{11} = &\begin{bmatrix} \mathfrak{S} & M_i B_i + C_i^T M_i D_i \\ * & D_i^T M_i D_i - (1-\rho) Q_{1,i} \end{bmatrix} \\ A_{22} = &\text{diag} \left[-Q_{2,i} \quad -\frac{1}{h_{\max}} \left(Q_3 - \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} (Q_{1,j} + Q_{2,j}) \right) - \right. \\ &\left. \frac{1}{h_{\max} - h_{\min}} \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} Q_{1,j} \right] \end{aligned}$$

$$\mathfrak{S} = Q_{1,i} + Q_{2,i} + h_{\max} Q_3 + M_i A_i + A_i^T M_i + C_i^T M_i C_i + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} M_j$$

因此 $\forall t \in [t_l, t_{l+1}), l \in N$ 。对式 (11) 在 t_l 到 t 内积分, 并对不等式两边取期望可得

$$E(V(i, t)) \leq E(V(j, t_l)) + E\left(\int_{t_l}^t \alpha_i V(r(s), s) ds\right) \quad (12)$$

利用 Gronwall 不等式有

$$E(V(i, t)) \leq e^{\alpha_i(t-t_l)} E(V(i, t_l)), t \in [t_l, t_{l+1}) \quad (13)$$

由式 (6) 得

$$V(j, t_1) \leq \mu_i V(r(t_1^-), t_1^-) \quad (14)$$

对式 (14) 两边取期望得

$$E(V(j, t_1)) \leq \mu_i E(V(r(t_1^-), t_1^-)) \quad (15)$$

利用数学归纳法证明式 (16) 成立。

$$E(V(i, t)) \leq \mu_i^{N(t, t_0)} E(V(r(t_0), t_0)) e^{\alpha_i(t-t_0)} \quad (16)$$

当 $t \in [t_0, t_1), N(t, t_0) = 0$, 时, 由式 (16) 得

$$E(V(i, t)) \leq E(V(r(t_0), t_0)) e^{\alpha_i(t-t_0)} \quad (17)$$

$t \in [t_1, t_2), N(t, t_0) = 1$ 时, 利用式 (15), (16) 可推出

$$E(V(i, t)) \leq E(V(r(t_1), t_1)) e^{\alpha_i(t-t_1)} \leq \mu_i E(V(r(t_1^-), t_1^-)) e^{\alpha_i(t-t_1)} \leq \mu_i E(V(r(t_0), t_0)) e^{\alpha_i(t_1-t_0)} e^{\alpha_i(t-t_1)} = \mu_i^{N(t, t_0)} E(V(r(t_0), t_0)) e^{\alpha_i(t-t_0)} \quad (18)$$

$t \in [t_2, t_3), N(t, t_0) = 2$ 时, 有

$$E(V(i, t)) \leq E(V(r(t_2), t_2)) e^{\alpha_i(t-t_2)} \leq \mu_i E(V(r(t_2^-), t_2^-)) e^{\alpha_i(t-t_2)} \leq \mu_i^2 E(V(r(t_0), t_0)) e^{\alpha_i(t_2-t_0)} e^{\alpha_i(t-t_2)} = \mu_i^{N(t, t_0)} E(V(r(t_0), t_0)) e^{\alpha_i(t-t_0)} \quad (19)$$

因此, 通过数学归纳可以验证得出式 (16) 成立。

由式 (3) 有

$$E(V(i, t)) \leq \mu_i^{N_0 + \frac{t-t_0}{\tau}} E(V(r(t_0), t_0)) e^{\alpha_i(t-t_0)} = \mu_i^{N_0} E(V(r(t_0), t_0)) e^{(\alpha_i + \frac{1}{\tau} \ln \mu_i)(t-t_0)} \quad (20)$$

根据式 (20) 得到

$$E(|x(t)|^2) \leq \frac{1}{\lambda_{1,i}} E V((i, t)) \leq \frac{1}{\lambda_{1,i}} \mu_i^{N_0} E(V(r(t_0), t_0)) e^{(\alpha_i + \frac{1}{\tau} \ln \mu_i)(t-t_0)} \leq \frac{1}{\lambda_{1,i}} \mu_i^{N_0} E(V(r(t_0), t_0)) e^{(\alpha_i + \frac{1}{\tau} \ln \mu_i)(T-t_0)}, t_0 \leq t \leq T \quad (21)$$

$$E(V(r(t_0), t_0)) \leq \left[\lambda_{2,i} + h_{\max} \lambda_{3,i} + h_{\max} \lambda_{4,i} + \frac{h_{\max}^2}{2} \lambda_5 \right] E(\|\xi\|^2) \quad (22)$$

由式 (21), (22) 及式 (7) 得到, 若 $E(\|\xi\|^2) \leq c_1$ 则

$$E(|x(t)|^2) \leq \frac{1}{\lambda_{1,i}} \left[\lambda_{2,i} + h_{\max} (\lambda_{3,i} + \lambda_{4,i}) + \frac{h_{\max}^2}{2} \lambda_5 \right] c_1 \mu_i^{N_0} e^{(\alpha_i + \frac{1}{\tau} \ln \mu_i)(T-t_0)} < c_2 \quad (23)$$

因此系统 (2) 是关于 (c_1, c_2, T) 的均方有限时间稳定。证明完毕。

注 1 通过定理 1 中 $\alpha_i > 0, \mu_i \geq 1$ 以及式 (20) 可看出 Lyapunov 函数是呈指数发散的, 所以系统 (2) 并不是 Lyapunov 意义下的稳定, 由此可看出一个系统有限时间稳定并不一定代表其是 Lyapunov 意义下的稳定。

注 2 由于考虑了具有 Markov 切换时滞系统, 当模态数目增加时, 需求解的 LMI 的维度变大, 且矩阵中的元素数也会增多, 使计算量增加, LMI 的求

解复杂度上升。为解决这个问题, 在定理 1 中采用分块矩阵技术将大的矩阵分解成小块, 以降低计算的复杂度。若系统 (2) 为不考虑脉冲影响的随机 Markov 系统:

$$\begin{aligned} dx(t) = & [A_{r(t)}x(t) + B_{r(t)}x(t-h(t))] dt + \\ & [C_{r(t)}x(t) + D_{r(t)}x(t-h(t))] dw(t) \end{aligned} \quad (24)$$

则应用定理 1 得出推论 1。

推论 1 假设存在正常数 c_1, c_2, T , 其中 $c_1 < c_2$ 。 $\alpha_i, \mu_i, M_i, Q_{1,i}, Q_{2,i}, Q_3$ 与定理 1 相同以及满足定理 1 中的式 (4), (5), 只需将定理 1 中式 (7) 修改为

$$\alpha_i(T-t_0) \leq \ln(c_2 \lambda_{1,i}) - \ln[c_1(\lambda_{2,i} + h_{\max} \lambda_{3,i} + h_{\max} \lambda_{4,i} + h_{\max}^2 \frac{\lambda_5}{2})] \quad (25)$$

则系统 (2) 是关于 (c_1, c_2, T) 的均方有限时间稳定。

3 反馈镇定

根据定理 1, 设计反馈控制器使系统 (2) 满足有限时间镇定, 考虑如下形式的状态反馈控制器

$$u(t) = R_{r(t)}x(t) + S_{r(t)}x(t-h(t)) \quad (26)$$

其中 $R_{r(t)}$ 与 $S_{r(t)}$ 为反馈增益矩阵。将式 (26) 代入系统 (2) 得到如下系统:

$$\begin{cases} dx(t) = [(A_{r(t)} + H_{r(t)}R_{r(t)})x(t) + (B_{r(t)} + H_{r(t)}S_{r(t)})x(t-h(t))] dt + [(C_{r(t)} + J_{r(t)}R_{r(t)})x(t) + (D_{r(t)} + J_{r(t)}S_{r(t)})x(t-h(t))] dw(t), & t \neq t_k, t \geq t_0 \\ x(t_k) = F_{r(t_k)}x(t_k^-), k \in \mathbf{Z} \\ x(t_0 + \vartheta) = \xi(\vartheta), \quad -h_{\max} \leq \vartheta \leq 0 \end{cases} \quad (27)$$

定理 2 假设脉冲序列满足定义 2 中的平均脉冲区间条件, 存在正常数 $c_1, c_2, T, h_{\min}, h_{\max}, \rho$, 其中 $c_1 < c_2$ 。 $\alpha_i > 0 (i = 1, 2, \dots)$, $\mu_i \geq 1$, 且有适度维数的对称正定矩阵 X_i, Z_i, Z_{di} 。 $Q_{1,i} > 0, Q_{2,i} > 0, Q_3 > 0$ 以及矩阵 Y_i, Y_{di} , 使得

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & B_i X_i + H_i Y_{di} & X_i C_i^T + Y_i^T J_i^T & \Lambda_{1i} \\ * & -(1-\rho)Z_{di} & X_i D_i^T + Y_{di}^T J_i^T & 0 \\ * & * & -X_i & 0 \\ * & * & * & -\Lambda_{2i} \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} -X_i Q_3 X_i & X_i \\ * & -\sum_{j=1}^N \gamma_{ij} (Q_{1,i} + Q_{2,i})^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} -\mu_i X_i & X_i F_j^T \\ * & -X_i \end{bmatrix} \leq 0 \quad (30)$$

$$(\alpha_i + \frac{1}{\tau^*} \ln \mu_i)(T - t_0) < \ln(c_2 \bar{\lambda}_i) - \ln[c_1(\bar{\lambda}_{2i} + \bar{\lambda}_{3i})] - N_0 \ln \mu_i \quad (31)$$

其中:

$$\Pi_1 = Z_i + Z_{di} + A_i X_i + X A_i^T + H_i Y_i + Y_i^T H_i^T + \gamma_{ii} X_i - \alpha_i X_i$$

$$A_{1i} = [X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots]$$

$$A_{2i} = [\gamma_{i1} X_1, \dots, \gamma_{i(i-1)} X_{i-1}, \gamma_{i(i+1)} X_{i+1}, \dots]$$

$$\bar{\lambda}_{1i} = \lambda_{\min}(X_i)$$

$$\bar{\lambda}_{2i} = \lambda_{\max}(X_i)$$

$$\bar{\lambda}_{3i} = \lambda_{\max}(Z_i + Z_{di})$$

则系统 (27) 在控制增益为 $R_i = Y_i X_i^{-1}$, $S_i = Y_{di} X_i^{-1}$ 时是关于 (c_1, c_2, T) 的均方有限时间稳定。

证明 根据定理 1, 只需将式 (4) 中的 A_i, B_i, C_i, D_i 分别换成 $A_i + H_i R_i, B_i + H_i S_i, C_i + J_i R_i, D_i + J_i S_i$, 可得

$$\begin{bmatrix} \Pi_{2i} & M_i(B_i + H_i S_i) + (C_i + J_i R_i)^T M_i(D_i + J_i S_i) \\ * & (D_i + J_i S_i)^T M_i(D_i + J_i S_i) - (1 - \rho) Q_{1,i} \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

其中 $\Pi_{2i} = Q_{1,i} + Q_{2,i} + h_{\max} Q_3 + M_i(A_i + H_i R_i) + (A_i + H_i R_i)^T M_i + (C_i + J_i R_i)^T M_i(C_i + J_i R_i) + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} M_j - \alpha_i M_i$ 。根据 Schur 补, 式 (32) 等价于

$$\begin{bmatrix} \Pi_{3i} & M_i(B_i + H_i S_i) & (C_i + J_i R_i)^T M_i \\ * & -(1 - \rho) Q_{1,i} & (D_i + J_i S_i)^T M_i \\ * & * & -M_i \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

其中 $\Pi_{3i} = Q_{1,i} + Q_{2,i} + h_{\max} Q_3 + M_i(A_i + H_i R_i) + (A_i + H_i R_i)^T M_i + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} M_j - \alpha_i M_i$ 。对式 (33) 左右同时乘以 $\text{diag}[M_i^{-1}, M_i^{-1}, M_i^{-1}]$, 得到

$$\begin{bmatrix} \Pi_{4i} & (B_i + H_i S_i) M_i^{-1} & M_i^{-1}(C_i + J_i R_i)^T \\ * & -(1 - \rho) M_i^{-1} Q_{1,i} M_i^{-1} & M_i^{-1}(D_i + J_i S_i)^T \\ * & * & -M_i^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (34)$$

其中 $\Pi_{4i} = M_i^{-1}(Q_{1,i} + Q_{2,i} + h_{\max} Q_3) M_i^{-1} + (A_i + H_i R_i) M_i^{-1} + M_i^{-1}(A_i + H_i R_i)^T + \gamma_{ii} M_i^{-1} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \gamma_{ij} M_i^{-1} M_j M_i^{-1} - \alpha_i M_i^{-1}$ 。令 $X_i = M_i^{-1}, Z_i = M_i^{-1}(Q_{2,i} + h_{\max} Q_3) M_i^{-1}, Z_{di} = M_i^{-1} Q_{1,i} M_i^{-1}, R_i = Y_i X_i^{-1}, S_i = Y_{di} X_i^{-1}$, 代入式 (34) 并再次利用 Schur 补, 即可得到式 (28)。对式 (5) 左右同时乘以 X_i , 即可得到

$$X_i \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} (Q_{1,i} + Q_{2,i}) X_i - X_i Q_3 X_i < 0 \quad (35)$$

则式 (35) 等价于式 (29)。同理, 对式 (6) 左右

同时乘以 X_i , 即可得到

$$X_i F_j^T P_j F_j X_i - \mu_i X_i \leq 0 \quad (36)$$

则式 (36) 等价于式 (30), 由定理 2 可得系统 (2) 在式 (26) 作用下是关于 (c_1, c_2, T) 的均方有限时间稳定。

4 实例仿真

设 Markov 链 $r(t)$ 的状态空间 $S = \{1, 2\}$, 其转移矩阵 $\Gamma = (\gamma_{ij})_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, 考虑系统 (2) 具有以下参数:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.2 & -0.6 \\ 0.5 & -1.4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.9 & -0.4 \\ 0.2 & -0.8 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.3 \\ -0.3 & 0.3 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}。$$

令时滞 $h(t) = 0.1(1 + e^{-t})$, 有 $h_{\max} = 0.2, \rho = 0.1$ 。针对不同的模态 i, α_i 与 μ_i 取值为: $i = 1$ 时, 取 $\alpha_1 = 0.944, \mu_1 = 1.161$; $i = 2$ 时, $\alpha_2 = 0.942, \mu_2 = 1.262$ 。

注 3 为使式 (7) 更易成立, 使系统 (2) 满足所有条件并保持稳定; 同时定理 1 中涉及矩阵, 且矩阵中包含最大时滞上界 h_{\max} , 需求解线性矩阵不等式 (LMI) 来验证定理的有效性。故选取 $h(t)$, 得最大的时滞上界 h_{\max} 及 ρ , 求解出不同模态下的最优可行性解。利用 MATLAB 中 LMI 工具箱求解式 (4)~(6) 中的矩阵不等式, 得出不同模态下满足条件的矩阵:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1.8415 & -0.0276 \\ -0.0276 & 1.9616 \end{bmatrix}$$

$$Q_{1,1} = \begin{bmatrix} 3.5485 & -0.2886 \\ -0.2886 & 1.9615 \end{bmatrix}$$

$$Q_{2,1} = \begin{bmatrix} 0.3394 & 0.4204 \\ 0.4204 & 0.5399 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1.7666 & -0.0268 \\ -0.0268 & 1.8817 \end{bmatrix}$$

$$Q_{1,2} = \begin{bmatrix} 2.8926 & -0.0308 \\ -0.0308 & 2.3630 \end{bmatrix}$$

$$Q_{2,2} = \begin{bmatrix} 0.2282 & 0.0396 \\ 0.0396 & 0.1604 \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0.6472 & 0.3887 \\ 0.3887 & 0.5201 \end{bmatrix}$$

其中 Q_3 的最大特征值 $\lambda_5 = 0.9776$, 其余矩阵对应的特征值如表 1。

表 1 对应矩阵的特征值

Tab. 1 Eigenvalues of corresponding matrices

i	$\lambda_{1,i}$	$\lambda_{2,i}$	$\lambda_{3,i}$	$\lambda_{4,i}$
1	1.8355	1.9677	3.5993	0.8719
2	1.7606	1.8876	2.8944	0.2464

考虑 $N_0 = 2$, $\tau^* = 0.15$, $\varepsilon = 0.1$, 则系统的脉冲序列如图 1。设系统 (2) 的初值 $\xi(\vartheta) = [-0.4, 0.3]^T$, $\vartheta \in [-0.2, 0]$, 则 $c_1 = 0.25$ 。若考虑系统 $t \in [0, 1.5]$, 将上述求解的特征值与假设值代入式 (23), 得出系统 (2) 是关于 (0.25, 9.75, 1.50) 的均方有限时间稳定。作 500 次样本轨道, 并取期望值, 得到系统的均方状态轨迹, 如图 2。

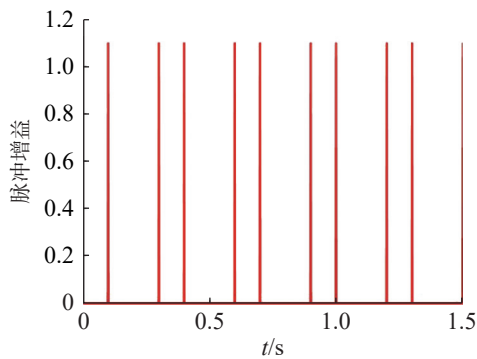


图 1 脉冲序列

Fig. 1 Impulsive sequence

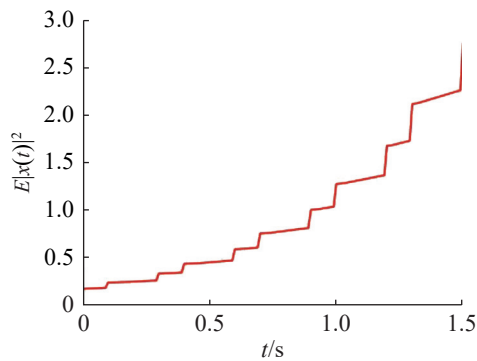


图 2 系统的状态轨迹

Fig. 2 State trajectory of the system

验证定理 2 中反馈控制器的有效性, 根据上面求出的矩阵易得

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.5431 & 0.0076 \\ 0.0076 & 0.5099 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.5622 & 0.0081 \\ 0.0081 & 0.5316 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -1.3127 & -0.0543 \\ -0.0543 & -1.4201 \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} -1.0256 & -0.1131 \\ -0.1131 & -0.8473 \end{bmatrix}$$

$$Z_{d1} = \begin{bmatrix} 1.0445 & -0.0575 \\ -0.0575 & 0.5079 \end{bmatrix}$$

$$Z_{d2} = \begin{bmatrix} 0.9272 & 0.0141 \\ 0.0141 & 0.6676 \end{bmatrix}$$

因此, 控制器在不同模式下的增益为

$$R_1 = \begin{bmatrix} -0.1128 & 0.1353 \\ -0.1041 & 0.3385 \end{bmatrix}, S_1 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix};$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.2843 & 0.0272 \\ 0.0272 & 0.1585 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}。$$

图 3 为加入反馈控制器后的均方轨迹状态。从图 3 可看出: 系统 (2) 在式 (26) 作用下同样是关于 (0.25, 4.64, 1.50) 的均方有限时间稳定。

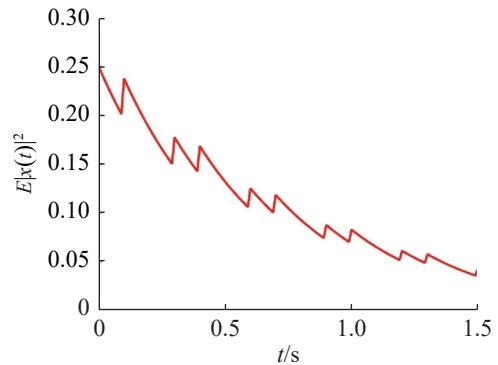


图 3 反馈控制下系统的状态轨迹

Fig. 3 State trajectory of the system under feedback control

注 4 通过 MATLAB 中 LMI 工具箱, 式 (4) 和式 (5) 在不同模式下的可行性解被求解出来, 验证了判据的正确性。由于选取的泛函考虑不同模式及判据中包含时滞信息, 降低了判据的保守性; 同时利用平均脉冲区间条件, 仅对平均脉冲区间 τ^* 施加限制, 进一步降低了判据的保守性。

5 结论

针对一类具有 Markov 切换的脉冲随机时滞系

统的均方有限时间稳定性问题,通过利用 L-K 泛函法以及随机分析技巧,建立系统有限时间均方稳定的充分条件。基于所得的充分条件,设计使系统满足有限时间稳定的状态反馈控制器,并给出实例进行验证。通过选取模态相关的泛函且利用平均脉冲区间条件对脉冲区间的上界或下界没有限制,而且仅对平均脉冲间隔提出要求,降低了保守性。带时滞脉冲和 Markov 切换的随机系统的有限时间问题有待进一步研究。

参考文献:

- [1] LU J, DANIEL W C, CAO J. A unified synchronization criterion for impulsive dynamical networks[J]. *Automatica*, 2010, 46(7):1215–1221.
- [2] YAO F, CAO J, LI Q, et al. Exponential stability analysis for stochastic delayed differential systems with impulsive effects: average impulsive interval approach[J]. *Asian Journal of Control*, 2017, 19(1):74–86.
- [3] CAI T, CHENG P, YAO F. Robust exponential stability of discrete-time uncertain impulsive stochastic neural networks with delayed impulses[J]. *Neural Networks*, 2023, 160:227–237.
- [4] WU X, ZHENG W X, TANG Y. Stability analysis for impulsive stochastic time-varying systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, 68(4):2584–2591.
- [5] XU H, ZHU Q. New criteria on exponential stability of impulsive stochastic delayed differential systems with infinite delays[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2022, 111:106460.
- [6] KAMENKOV G. On stability of motion over a finite interval of time[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics USSR*, 1953, 17(2):529–540.
- [7] ZHANG X, LI C. Finite-time stability of nonlinear systems with state-dependent delayed impulses[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 102(1):197–210.
- [8] LUO D, TIAN M, ZHU Q. Some results on finite-time stability of stochastic fractional-order delay differential equations[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2022, 158:111996.
- [9] ALI M S, NARAYANAN G, SAROHA S. Finite-time stability analysis of fractional-order memristive fuzzy cellular neural networks with time delay and leakage term[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2021, 185:468–485.
- [10] DU F, LU J G. Finite-time stability of fractional-order fuzzy cellular neural networks with time delays[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2022, 438:107–120.
- [11] ZHOU B. Finite-time stability analysis and stabilization by bounded linear time-varying feedback[J]. *Automatica*, 2020, 121:109191.
- [12] LIU L, ZHANG X, ZHAO X, et al. Stochastic finite-time stabilization for discrete-time positive Markov jumps time-delay systems[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2022, 359(1):84–103.
- [13] CHENG P, HE S, CHENG J, et al. Asynchronous output feedback control for a class of conic-type nonlinear hidden Markov jump systems within a finite-time interval[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics:Systems*, 2020, 51(12):7644–7651.
- [14] REN H, ZONG G, KARIMI H R. Asynchronous finite-time filtering of Markov jumps nonlinear systems and its applications[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics:Systems*, 2019, 51(3):1725–1734.
- [15] YAN Z, ZHANG M, CHANG G. Finite-time annular domain stability and stabilization of Itô stochastic systems with Wiener noise and Poisson jumps-differential Gronwall inequality approach[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2022, 412:126589.
- [16] 苏磊, 李峰, 夏荣盛, 等. 复杂跳跃系统控制综合研究进展[J]. *安徽工业大学学报(自然科学版)*, 2022, 39(3):237–249.
- [17] REN C, HE S. Finite-time stabilization for positive Markovian jumping neural networks[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, 365:124631.
- [18] ZHANG W, AN X. Finite-time control of linear stochastic systems[J]. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2008, 4(3):689–696.
- [19] WANG C, SHEN Y. Delay partitioning approach to robust stability analysis for uncertain stochastic systems with interval time-varying delay[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2012, 6(7):875–883.

责任编辑:何莉