

基于半马尔科夫的时滞神经网络输出反馈同步

马跃¹, 苏磊¹, 张玉峰²

(1. 安徽工业大学 电气与信息工程学院, 安徽 马鞍山 243032; 2. 池州学院 机电工程学院 安徽 池州 247100)

摘要: 针对具有时变时滞的半马尔科夫神经网络静态输出反馈主从同步的问题, 设计1种静态输出反馈控制器, 以实现半马尔科夫神经网络从系统在时变时滞的影响下与主系统同步。利用半马尔科夫切换过程对时变时滞神经网络系统建模, 表征神经网络系统参数的突变现象, 比起马尔科夫过程, 半马尔科夫过程更具一般性; 考虑到系统状态不能完全获得的情况, 利用输出信息实现神经网络之间的同步; 利用李雅普诺夫 (Lyapunov) 稳定性理论, 选取时滞相关的 Lyapunov 泛函并结合积分不等式缩放技术, 得到低保守性的充分条件; 在没有控制器输入矩阵的情况下, 采用自由权矩阵技术将系统矩阵从 Lyapunov 泛函广义矩阵中分离, 克服固定权矩阵的保守性; 最后通过1个数值算例验证控制器设计的有效性。结果表明: 设计的控制器可使时变时滞系统在初始状态与主系统不同步时, 依然可在5 s后消除误差实现同步; 控制信号在消除误差后趋向稳定, 在保证同步误差系统随机均方稳定的同时满足混合无穷/无源性能指标, 证明了设计的合理性。

关键词: 神经网络; 静态输出反馈; 半马尔科夫; 时变时滞; 同步控制; Lyapunov 泛函; 积分不等式; 自由权矩阵

中图分类号: TP 20 **文献标志码:** A **doi:** 10.12415/j.issn.1671-7872.24001



Synchronization of Delayed Neural Networks with Output Feedback Based on Semi-Markov Model

MA Yue¹, SU Lei¹, ZHANG Yufeng²

(1. School of Electrical & Information Engineering, Anhui University of Technology, Maanshan 243032, China;

2. School of Mechanical and Electrical Engineering, Chizhou University, Chizhou 247100, China)

Abstract: To address the master-slave synchronization issue for semi-Markovian neural networks with time-varying delays using static output feedback, a static output feedback controller was designed to achieve synchronization between the slave system and the master system under the influence of time-varying delays. The semi-Markov switching process was used to model time-varying delayed neural network systems, and to characterize the sudden changes in system parameters. Compared to Markov processes, the semi-Markov processes were more general. Considering the situation where the system state couldn't be fully obtained, the output information was used to achieve synchronization between neural networks. Utilizing Lyapunov stability theory, a delay-dependent Lyapunov functional was selected and combined with integral inequality scaling techniques to derive less conservative sufficient conditions. In the absence of a controller input matrix, the free weighting matrix technique was used to separate the system matrices from the generalized matrix of the Lyapunov functional, overcoming the

收稿日期: 2024-01-02

基金项目: 安徽省高校优秀拔尖人才培养项目 (gxyq2022117); 国家自然科学基金项目 (62103005); 安徽高校优秀青年基金项目 (2023AH030030); 安徽省自然科学基金青年基金项目 (2108085QF276)

作者简介: 马跃 (1998—), 男, 安徽阜阳人, 硕士生, 主要研究方向为复杂系统同步。

通信作者: 苏磊 (1989—), 男, 安徽安庆人, 博士, 副教授, 主要研究方向为 Markov 跳变系统的鲁棒容错控制。

引文格式: 马跃, 苏磊, 张玉峰. 基于半马尔科夫的时滞神经网络输出反馈同步 [J]. 安徽工业大学学报 (自然科学版), 2025, 42(1):18-24.

conservativeness of fixed weighting matrices. Finally, the effectiveness of the controller design was verified through a numerical example. The results show that the designed controller can synchronize the time-varying delay system with the master system within 5 s even if they are initially out of sync. After eliminating the error, the control signal tends towards stability, ensuring the stochastic mean-square stability of the synchronization error system while meeting the mixed infinite/passive performance indicators, which validates the rationality of the design.

Keywords: neural networks; static output feedback; semi-Markov; time-varying delay; synchronous control; Lyapunov functional; integral inequality; free weight matrix

控制系统的同步是指系统在不同的约束条件下达到相同的状态。同步控制系统是 1 种用于管理和协调多个组件或进程之间时序关系的系统, 以确保各组件按照特定的时间规划进行工作, 实现预期的功能和性能, 其被广泛用于工业自动化、通信网络、航空航天等领域^[1-3]。随着科学技术的日益进步和发展, 控制系统的结构愈加复杂, 影响系统同步的因素也更多, 如时滞、参数突变、系统状态不完全可测等, 这些因素出现后若不能及时处理, 会造成系统发生故障, 甚至瘫痪。因此, 如何在同步控制系统中设计出高效的同步控制器是同步控制领域的研究热点, 对保证系统可靠、稳定、高效的运行具有重要意义。

长久以来, 控制领域众多学者对神经网络随机切换系统进行了系列研究并取得一定成果。Feng 等^[4], Wang 等^[5]采用连续马尔科夫 (Markov) 过程有效模拟了时变延迟下系统参数产生突变如何实现同步, 但连续 Markov 跳变系统的状态持续时间需要满足指数分布且状态转移只与当前状态相关, 约束性较大。因此, 更具一般性的切换过程, 即连续半 Markov 切换过程应运而生, 其进一步考虑了转移概率与状态的持续时间以及与之前状态相关, 放宽了概率分布的限制条件, 如张林闯^[6], Cao 等^[7]考虑在半 Markov 模型下模态切换导致的参数突变及故障检测问题。此外, 数据传输过程中时滞现象普遍存在, 如何设计合适的控制器保证系统稳定运行也得到学者们的关注, Kumar 等^[8]研究表明, 递归神经网络时滞对系统稳定性产生显著影响。考虑到现实中系统时滞的多样性和不确定性, Jin 等^[9]研究了关于时变时滞的半 Markov 神经网络的有限时间同步, 选取时滞相关的李雅普诺夫 (Lyapunov) 泛函和矩阵不等式分析技术解决了有限时间同步条件; Zheng 等^[10], Karthick 等^[11]研究具有半 Markov 切换和时变时滞的复杂动态网络事件触发同步问题。需要指出的是, 以上研究针对系统时滞均采用状态反馈设计控制器, 但状态反馈控制器需在系统状态完全已知的前提下

才能进行有效设计。实际工程应用中, 设备或者系统的状态难以直接检测或获得, 根据状态反馈设计的控制器难以发挥作用。为了解决上述问题, 学者们通过可测量的输出信息设计控制器, 即设计输出反馈控制器。如 Zhang 等^[12]设计静态输出反馈控制器, 处理系统受到网络攻击时的安全同步问题; Zhai^[13]针对一类非线性时滞跟踪问题, 设计动态输出反馈控制器, 保证了闭环系统稳定; Rubio 等^[14]设计在满足输出矩阵行为满秩的条件下才能实现同步的控制器, 输出矩阵秩的约束会影响系统性能, 且在处理控制器包含输入矩阵的情况时, 会采用参数化处理分离控制器增益并结合不等式缩放技术消除约束, 导致控制器设计的保守性被放大。鉴于此, 针对具有半 Markov 切换的时变时滞神经网络系统, 设计 1 种静态输出反馈控制器, 以期消除主从系统的同步误差, 实现系统同步。

1 问题描述

数学符号定义: Y^T 表示矩阵 Y 的转置矩阵; $\text{sym}\{X\}$ 表示 $X + X^T$; $p\{\cdot\}$ 表示概率; \mathbf{R}^m 表示 m 维实向量空间; I 表示单位向量矩阵; $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角矩阵; $U_1 > 0$ 表示 U_1 为正定矩阵; $\|\cdot\|$ 表示向量的欧式范数; $E\{\cdot\}$ 表示数学期望; $*$ 表示矩阵中的对称元素; $L_2[0, \infty)$ 表示区间 $[0, \infty)$ 的平方可积向量函数的空间。

1.1 系统描述

考虑 1 个具有时变时滞的连续半 Markov 神经网络主系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{A}_{e_i} \mathbf{x}(t) + \mathbf{W}_{1e_i} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + \\ \quad \mathbf{W}_{2e_i} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t - \tau(t))) + \mathbf{J}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{e_i} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{H}_{e_i} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T$; $\mathbf{x}_n(t)$ 为第 n 个神经元在时刻 t 的状态向量; $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) = [g_1(\mathbf{x}(t)) \ g_2(\mathbf{x}(t)) \ g_3(\mathbf{x}(t)) \ \cdots \ g_n(\mathbf{x}(t))]^T$; $\mathbf{g}(\cdot)$ 为神经元的激活函数; $\mathbf{A}_{e_i} = \text{diag}\{c_1, c_2, \dots, c_n\} > 0$; $\mathbf{W}_{1e_i}, \mathbf{W}_{2e_i}$ 为连接神经元之间的权重矩阵; $\mathbf{C}_{e_i} \in \mathbf{R}^m$,

$H_{\varepsilon_i} \in \mathbf{R}^m$, 为与模态相关的合适维度矩阵; $\mathbf{J}(t)$ 为额外输入; $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^m$, 为可测量输出; $\mathbf{z}(t) \in \mathbf{R}^m$, 为实际输出。给出半 Markov 连续过程, ε_t 取有限状态合集 $F = \{1, 2, \dots, \rho\}$, 模态转移概率矩阵 $\mathbf{D} = \{\pi_{\ell v}\}$ 可定义为:

$$p = \{\varepsilon(t + \Delta t) = v | \varepsilon(t) = \ell\} = \begin{cases} \pi_{\ell v} \Delta t + o(\Delta t), & \ell \neq v \\ 1 + \pi_{\ell \ell} \Delta t + o(\Delta t), & \ell = v \end{cases}$$

式中: $o(\Delta t)$ 为一阶极大无穷小, 定义 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$; $\pi_{\ell v} \geq 0, \ell \neq v$, 表示从 t 时刻的模式 ℓ 到 $t + \Delta t$ 时刻的模式 v 的过渡速率, 且 $\pi_{\ell \ell} = -\sum_{v \neq \ell}^F \pi_{\ell v}$ 。

假设 $\mathbf{g}(\cdot)$ 属于向量空间 $[0, \Omega_i]$, 且对于其中每个时刻 $i = 1, 2, \dots, n$, 激活函数满足以下约束条件:

$$0 \leq \frac{\mathbf{g}_i(\alpha) - \mathbf{g}_i(\zeta)}{\alpha - \zeta} \leq \Omega_i, \alpha \neq \zeta \in \mathbf{R}^m \quad (2)$$

时滞项 $\tau(t)$ 是 1 个连续有界可微项, 满足以下约束条件:

$$0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}, \dot{\tau}(t) \leq \mu \quad (3)$$

将式 (1) 描述的神经网络视为主系统, 相应的子系统对应如下:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^*(t) = -\mathbf{A}_{\varepsilon_t} \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{W}_{1\varepsilon_t} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*(t)) + \\ \quad \mathbf{W}_{2\varepsilon_t} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*(t - \tau(t))) + \mathbf{J}(t) + \mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}^*(t) = \mathbf{C}_{\varepsilon_t} \mathbf{x}^*(t) \\ \mathbf{z}^*(t) = \mathbf{H}_{\varepsilon_t} \mathbf{x}^*(t) \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$, 表示待设计的控制输入; $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^m$, 表示属于区间 $L_2[0, \infty)$ 的扰动。

为后续推导便于理解, 定义 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t)$, $\ell = \varepsilon_t$, $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}^*(t) - \mathbf{y}(t)$, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{e}(t)) = \mathbf{g}(\mathbf{e}(t) + \mathbf{x}(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$, 则可得到如下同步误差系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}(t) = -\mathbf{A}_{\ell} \mathbf{e}(t) + \mathbf{W}_{1\ell} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{e}(t)) + \\ \quad \mathbf{W}_{2\ell} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{e}(t - \tau(t))) + \mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}_{\ell} \mathbf{e}(t) \\ \tilde{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{H}_{\ell} \mathbf{e}(t) \end{cases} \quad (5)$$

同步误差系统 (5) 的控制器输入 $\mathbf{u}(t)$ 设计为

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \tilde{\mathbf{y}}(t) \quad (6)$$

其中 \mathbf{K} 为待确定的模态无关输出反馈增益矩阵。

1.2 激活函数处理

由式 (2) 进一步计算可得

$$0 \leq \frac{\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{e}(t))}{\mathbf{e}_i(t)} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{e}_i(t) + \mathbf{x}_i(t)) - \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}_i(t))}{\mathbf{e}_i(t)} \leq \Omega_i, \quad \forall \mathbf{e}_i, \mathbf{x}_i \quad (7)$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{diag} \{ \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n \} \quad (8)$$

由参数 $\boldsymbol{\Omega}$ 可得出对于任何矩阵, 下面的不等式总是成立的:

$$\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{e}_i(t))(\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{e}_i(t)) - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_i(t)) \leq 0, \quad \forall \mathbf{e}_i, \mathbf{x}_i \quad (9)$$

由式 (9) 进一步计算得出, 对任意矩阵 $\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag} \{ \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n \} > 0$ 时, 下列不等式依然成立:

$$-2 \sum_{i=1}^n \Gamma_i \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{e}_i(t), \mathbf{x}_i(t))(\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{e}_i(t), \mathbf{x}_i(t)) - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_i(t)) \leq 0 \quad (10)$$

或等价于

$$0 \leq 2\mathbf{e}^T(t) \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{e}(t)) - 2\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{e}(t))^T \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{e}(t)) \quad (11)$$

为使后续推理易懂, 介绍以下相关引理或定义。

引理 1^[15] 给定 1 个对称正定矩阵 \mathbf{P} , 任意可微函数 \mathbf{w} 在满足 $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}^m$ 条件下, 下列不等式成立:

$$\begin{aligned} \int_a^b \dot{\mathbf{w}}^T(s) \mathbf{P} \mathbf{w}(s) ds \geq & \frac{1}{b-a} [(\mathbf{w}(b) - \mathbf{w}(a))^T \mathbf{P} (\mathbf{w}(b) - \mathbf{w}(a))] + \\ & \frac{3}{b-a} \left[(\mathbf{w}(b) + \mathbf{w}(a)) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \mathbf{w}(s) ds \right]^T \times \\ & \left[\mathbf{P} (\mathbf{w}(b) + \mathbf{w}(a)) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \mathbf{w}(s) ds \right] \end{aligned} \quad (12)$$

定义 1^[16] 在给定的误差系统中, 若满足下列条件, 则说明系统 (5) 在 $\mathbf{w}(t) = 0$ 条件下是随机稳定的。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^{\infty} \|\mathbf{e}(t)\|^2 dt \right\} < \infty \quad (13)$$

定义 2^[17] 给定 1 个权标量 $\sigma \in [0, 1]$, 若同时满足以下 2 个条件, 则误差系统稳定且满足混合 H_{∞} 和被动性能指标 γ 。

1) 根据定义 1 可知, 误差系统是随机稳定的。

2) 在零初始条件下, 可找到标量 $\gamma > 0$, 当 $\varphi \geq 0$ 时, 对于任意非零 $\mathbf{w}(t) \in L_2[0, \infty)$, 下列不等式总是成立:

$$\begin{aligned} E \left\{ \int_0^{\varphi} [-\sigma \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) + 2(1 - \sigma) \gamma \mathbf{z}^T(t) \mathbf{w}(t)] dt \right\} \geq \\ E \left\{ -\gamma^2 \int_0^{\varphi} [\mathbf{w}^T(t) \mathbf{w}(t)] dt \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

这样系统性能得到保证。

注解 1 通过调整加权参数 σ , 使在 $[0, 1]$ 范围选取的值不同, 可将性能指标退化为相应的 H_{∞} 性能指标或被动性能指标。第一种情况, $\sigma = 0$ 时, 将式 (14) 转化为被动性能等级。第二种情况, $\sigma = 1$ 时, 将式 (14) 转化为 H_{∞} 性能等级; $\sigma \in (0, 1)$ 时, 定义 2 表示为混合 H_{∞} 或被动性能指标等级。为使过程清晰简明, 取 $\sigma = 1$ 的情况讨论后面的结果。

2 主要结果

提出 1 种时滞和鲁棒的神经网络模型同步控制器设计方法, 为使推导简洁, 明确如下符号:

$$\xi^T(t) = \begin{bmatrix} e^T(t) & e^T(t-\tau(t)) & e^T(t-\bar{\tau}) \\ \xi_1^T(t) & \xi_2^T(t) & w^T(t) \end{bmatrix}$$

$$\xi_1^T(t) = \frac{1}{\tau(t)} \int_{t-\tau(t)}^t e(s) ds, \quad \xi_2^T(t) = \frac{1}{\bar{\tau}-\tau(t)} \int_{t-\bar{\tau}}^{t-\tau(t)} e(s) ds$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & I & 0 & -2I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & I & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & I & 0 & -2I & 0 \end{bmatrix}$$

定理 1 给定标量 $\bar{\tau}, \mu, \delta$, 以及 $\sigma \in [0, 1]$, 对角矩阵 Ω 和 $\Gamma > 0$ 。若存在矩阵 $P_1 > 0, P_2 > 0, X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}, Y_1 > 0, Y_2 > 0, Y_3 > 0, R_1 > 0, R_2 > 0, U_1 > 0, U_2 > 0, U_3 > 0$, 同时存在可逆矩阵 A , 使得以下不等式成立:

$$\Psi \triangleq \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ * & * & \Psi_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

$$\Delta \triangleq \begin{bmatrix} \text{diag}\{R_1, 3R_1\} & X \\ * & \text{diag}\{R_1, 3R_1\} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (16)$$

其中

$$\Psi_{11} \triangleq \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 \\ * & \tau^2(R_1 + R_2) - \text{sym}\{A^T\} & 0 \\ * & * & \Theta_4 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{12} \triangleq \begin{bmatrix} X_1 - X_2 + X_3 - X_4 & \Omega\Gamma + A^T W_{1\ell} + U_2^T + Y_2^T & 0 \\ 0 & A^T W_{1\ell} & 0 \\ \Theta_5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{13} \triangleq \begin{bmatrix} A^T W_{2\ell} & 6R_1 \\ A^T W_{2\ell} & 0 \\ -(1-\mu)Y_2 & 6R_1 + 2X_3^T + 2X_4^T \\ 2X_2 + 2X_4 & -(1-\sigma)\delta H^T \\ 0 & A^T \\ -2X_2 + 2X_4 + 6R_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{22} \triangleq \begin{bmatrix} -U_3 - 4R_1 & 0 & -U_2^T \\ * & Y_1 + U_1 - 2\Gamma & 0 \\ * & * & -U_1 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{23} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -2X_3^T + 2X_4^T & 6R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{33} \triangleq \begin{bmatrix} -(1-\mu)Y_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & -12R_1 & -4X_4 & 0 \\ * & * & -12R_1 & 0 \\ * & * & * & -\delta^2 I \end{bmatrix}$$

$$\Theta_1 \triangleq \sum_{v=1}^{\rho} \pi_{\ell v} P_v + Y_3 + U_3 - (1-\mu)R_2 - 4R_1 + \sigma H_{\ell}^T H_{\ell} - 2A^T A_{\ell} + 2A^T K C_{\ell}$$

$$\Theta_2 \triangleq P_{\ell} - A_{\ell}^T \Lambda + C_{\ell}^T K^T \Lambda - \Lambda^T$$

$$\Theta_3 \triangleq (1-\mu)R_2 - 2R_1 - X_1 - X_2 - X_3 - X_4$$

$$\Theta_4 \triangleq -(1-\mu)Y_3 - (1-\mu)R_2 - 8R_1 + 2X_1 + 2X_2 - 2X_3 - 2X_4$$

$$\Theta_5 \triangleq -2R_1 - X_1 + X_2 + X_3 - X_4$$

则同步误差系统式 (5) 达到随机稳定, 且在此条件下符合所要求的 H_{∞} 和无源性性能指标 δ 。

证明 选择下列依赖于模态的 Lyapunov 泛函分析系统的稳定性:

$$V = \sum_{i=1}^4 V_i(t) \quad (17)$$

在这里, 每项为:

$$V_1(t) = e^T(t) P_{\ell} e(t)$$

$$V_2(t) = \int_{t-\tau(t)}^t \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ e(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ * & Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ e(s) \end{bmatrix} ds$$

$$V_3(t) = \int_{t-\bar{\tau}}^t \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ e(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ * & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ e(s) \end{bmatrix} ds$$

$$V_4(t) = \bar{\tau} \int_{-\bar{\tau}}^t \int_{t+\theta}^t \dot{e}^T(s) R_1 \dot{e}(s) ds d\theta + \bar{\tau} \int_{-\tau(t)}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{e}^T(s) R_2 \dot{e}(s) ds d\theta$$

对以上等式使用期望和总概率公式, 并取弱无穷小算子 $\mathcal{L}^{[18]}$, 可得到以下结果:

$$\mathcal{L}(V_1(t)) = E \left\{ \sum_{v=1}^{\rho} \pi_{\ell v} e^T(t) P_{\ell} e(t) + 2e^T(t) P_{\ell} \dot{e}(t) \right\}$$

计算微分如下, 同理

$$\mathcal{L}(V_2(t)) \leq \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ e(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ * & Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ e(t) \end{bmatrix} - (1-\mu) \begin{bmatrix} \varphi(t-\tau(t)) \\ e(t-\tau(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ * & Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(t-\tau(t)) \\ e(t-\tau(t)) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}(V_3(t)) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ e(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ * & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ e(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi(t-\bar{\tau}) \\ e(t-\bar{\tau}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ * & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(t-\bar{\tau}) \\ e(t-\bar{\tau}) \end{bmatrix}$$

使用引理 1 以及 Jensen 不等式可得到如下结果:

$$\mathcal{L}(V_4(t)) \leq \bar{\tau}^2 \dot{e}^T(t) (R_1 + R_2) \dot{e}(t) - \bar{\tau} \int_{t-\bar{\tau}}^t \dot{e}^T(s) R_1 \dot{e}(s) ds - \bar{\tau} (1-\tau(t)) \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}^T(s) R_2 \dot{e}(s) ds = \bar{\tau}^2 \dot{e}^T(t) (R_1 + R_2) \dot{e}(t) -$$

$$\xi^T(t) \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}^T \Delta \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \xi(t) - (1-\mu) e^T(t) R_2 e(t) + 2(1-\mu) e^T(t) R_2 e(t-\tau(t)) - (1-\mu) e^T(t-\tau(t)) R_2 e(t-\tau(t))$$

除此之外, 引入自由权矩阵^[19] 得到式 (18) 为常数:

$$0 = 2 \left[e^T(t) + \dot{e}^T(t) \right] \Lambda^T = \left[-\dot{e}(t) - A_{\ell} e(t) + W_{1\ell} \varphi(e(t)) + W_{2\ell} \varphi(e(t-\tau(t))) + K C_{\ell} e(t) + w(t) \right] \quad (18)$$

可进一步得到:

$$\mathcal{L}(V(t)) + \sigma z^T(t)z(t) - 2(1-\sigma)\delta z^T(t)w(t) - \delta^2 w^T(t)w(t) \leq \psi^T(t) \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ * & * & \Psi_{33} \end{bmatrix} \psi(t) \quad (19)$$

其中

$$\psi(t) = [e(t) \quad \dot{e}(t) \quad e(t-\tau(t)) \quad e(t-\bar{\tau}) \quad \varphi(t) \quad \varphi(t-\bar{\tau}) \quad \varphi(t-\tau(t)) \quad \xi_1(t) \quad \xi_2(t) \quad w(t)]$$

若满足式 (15) 成立, 则显然有

$$E\{\mathcal{L}(V(t)) + \sigma z^T(t)z(t) - 2(1-\sigma)\delta z^T(t)w(t) - \delta^2 w^T(t)w(t)\} \leq 0 \quad (20)$$

在扰动项 $w(t) = 0$ 时, 满足下列不等式:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\left\{\int_0^\infty \|e(t)\|^2 dt\right\} < \infty \quad (21)$$

另一种情况 $w(t) \neq 0$ 时, 在零初始条件下, 满足下列不等式:

$$E\left\{\int_0^\rho [-\sigma z^T(t)z(t) + 2(1-\sigma)\gamma z^T(t)w(t)] dt\right\} \geq E\left\{-\gamma^2 \int_0^\rho [w^T(t)w(t)] dt\right\} \quad (22)$$

最终可得出误差系统式 (5) 是稳定的, 满足规定的性能指标。

定理 2 对于给定标量 $\bar{\tau}, \mu, \delta$, 以及 $\sigma \in [0, 1]$, 对角矩阵 Ω 和 $\Gamma > 0$, 存在矩阵 $P_1 > 0, P_2 > 0$,

$$\bar{\Psi}_{13} \triangleq \begin{bmatrix} \Lambda^T W_{2\ell} & 6R_1 & 2X_2 + 2X_4 & -(1-\sigma)\delta H^T \\ \Lambda^T W_{2\ell} & 0 & 0 & \Lambda^T \\ -(1-\mu)Y_2 & 6R_1 + 2X_3^T + 2X_4^T & -2X_2 + 2X_4 + 6R_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Psi}_{22} \triangleq \begin{bmatrix} -U_3 - 4R_1 & 0 & -U_2^T \\ * & Y_1 + U_1 - 2\Gamma & 0 \\ * & * & -U_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Psi}_{23} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -2X_3^T + 2X_4^T & 6R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Psi}_{33} \triangleq \begin{bmatrix} -(1-\mu)Y_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & -12R_1 & -4X_4 & 0 \\ * & * & -12R_1 & 0 \\ * & * & * & -\delta^2 I \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Xi}_1 \triangleq \sum_{v=1}^{\rho} \pi_{\ell v} P_v + Y_3 + U_3 - (1-\mu)R_2 - 4R_1 + \sigma H_\ell^T H_\ell - 2\Lambda^T A_\ell + 2C_\ell^T \Upsilon$$

$$\bar{\Xi}_2 \triangleq P_\ell - A_\ell^T \Lambda + C_\ell^T \Upsilon - \Lambda^T$$

$$\bar{\Xi}_3 \triangleq (1-\mu)R_2 - 2R_1 - X_1 - X_2 - X_3 - X_4$$

$$\bar{\Xi}_4 \triangleq -(1-\mu)Y_3 - (1-\mu)R_2 - 8R_1 + 2X_1 + 2X_2 - 2X_3 - 2X_4$$

$$\bar{\Xi}_5 \triangleq -2R_1 - X_1 + X_2 + X_3 - X_4$$

证明 处理耦合项 $2\Lambda^T K C_\ell$, 可建立如下方程式:

$$\Lambda^T K = \Upsilon \quad (25)$$

令 $K = \Lambda^{-T} \Upsilon$, 代入式 (15) 可得到式 (23), 证明完毕。

注解 2 对于无输入矩阵时的静态输出反馈问题, 现有学者往往会增加约束条件^[12, 20], 如对系统的输入矩阵需达到满秩、Lyapunov 泛函的对角结构化

$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$, $Y_1 > 0, Y_2 > 0, Y_3 > 0, R_1 > 0, R_2 > 0, U_1 > 0, U_2 > 0, U_3 > 0$, 同时存在可逆矩阵 Λ , 使得以下不等式满足。

$$\bar{\Psi} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{11} & \bar{\Psi}_{12} & \bar{\Psi}_{13} \\ * & \bar{\Psi}_{22} & \bar{\Psi}_{23} \\ * & * & \bar{\Psi}_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

$$\Lambda \triangleq \begin{bmatrix} \text{diag}\{R_1, 3R_1\} & X \\ * & \text{diag}\{R_1, 3R_1\} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (24)$$

式中

$$\bar{\Psi}_{11} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{\Xi}_1 & \bar{\Xi}_2 & \bar{\Xi}_3 \\ * & \tau^2(R_1 + R_2) - \text{sym}\{\Lambda^T\} & 0 \\ * & * & \bar{\Xi}_4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Psi}_{12} \triangleq \begin{bmatrix} X_1 - X_2 + X_3 - X_4 & \Omega\Gamma + \Lambda^T W_{1\ell} + U_2^T + Y_2^T & 0 \\ 0 & \Lambda^T W_{1\ell} & 0 \\ \bar{\Xi}_5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以及使用更保守的不等式技术。而本文研究不仅消除这种约束, 且利用零方程减少不等式技术 (如 $-P \leq P - 2I$ 和 $A^T B + AB^T \leq AA^T + BB^T$), 使结果最终不那么保守。

3 数值例子与仿真分析

采用 1 组数值例子验证定理 2 推导的合理性, 给定系统模式转化速率矩阵:

$$D = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

考虑具有以下参数的误差系统:

模态 1

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$W_{11} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$W_{21} = \begin{bmatrix} -0.50 & -0.20 \\ -0.30 & -0.45 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.70 & 1.00 \\ 1.10 & 1.65 \end{bmatrix}$$

模态 2

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$W_{12} = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$W_{22} = \begin{bmatrix} -0.60 & -0.20 \\ -0.60 & -0.45 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 1.4 \\ 1.2 & 1.8 \end{bmatrix}$$

其中: 神经网络激活函数 $g(e(t)) = \frac{|e(t)+1|-|e(t)-1|}{2}$; 额外输入量 $J(t) = 0.15 \sin t$ 。系统其他参数: 性能指标 $\delta = 4$, $\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

使用 LMI 工具箱求解定理 2 中的线性矩阵不等式, 得到使系统稳定的控制器增益矩阵:

$$K = \begin{bmatrix} -0.862 & 1 & -4.773 & 3 \\ 0.792 & 1 & -7.254 & 4 \end{bmatrix}$$

根据导出所得的控制器增益 K 和给定的系统参数, 假设扰动项 $w(t) = 0.5 \cos(\frac{\pi}{4})e^{-0.4t}$, 时变时滞函数 $\tau(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$, 该函数为增量函数, 可得到时滞上界 $\bar{\tau}(t) = 1$, 对该函数求导 $\dot{\tau}(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \leq 0.25$, 得到时滞导函数上界 $\mu = 0.25$ 。给定主从系统初始状态变量 $x_1(t) = [1 \quad -1]^T$, $x_2(t) = [-1 \quad 1]^T$ 。图 1 为 Markov 链的随机切换过程, 给定系统运行时间为 30 s、模态数为 2, 仿真结果如图 2~4。由图 2~4 可看出: 从系统在设计的控制器作用下, 5 s 后快速追踪到主系统, 实现同步, 之后沿着设定的额外输入量 $J(t) = 0.15 \sin t$ 继续运行; 系统间的同步误差在 5 s 前波动较明显, 在主从系统成功追踪后也收敛于 0; 在控制器消除主从系统间误差后控制信号的变化也收敛到 0 并保持稳定。

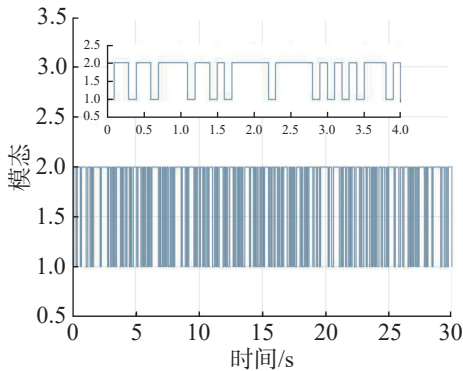
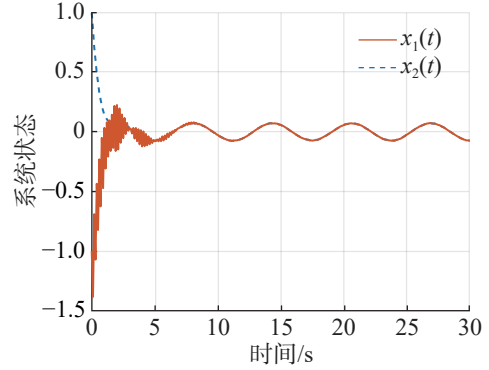
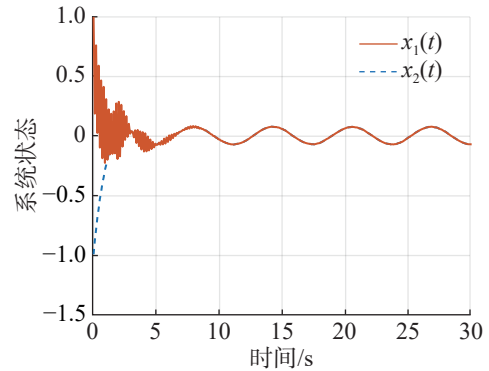


图 1 半 Markov 随机过程

Fig. 1 Semi-Markov stochastic processes



(a) 系统状态演化1



(b) 系统状态演化2

图 2 神经网络主从系统状态

Fig. 2 States of the master-slave system of neural network

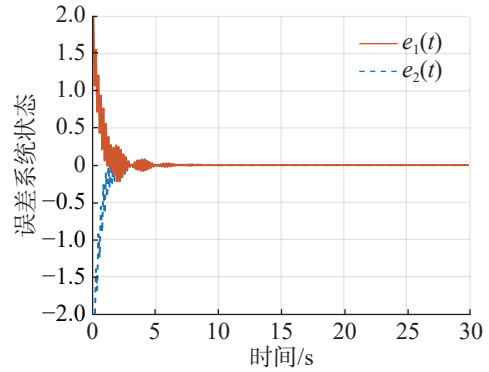


图 3 同步误差系统状态

Fig. 3 States of the synchronization error system

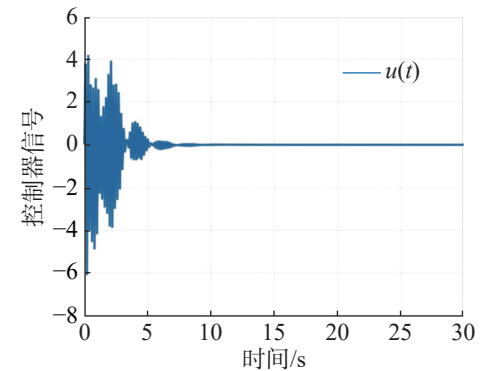


图 4 控制信号

Fig. 4 Control signals

综上可看出:在设计的控制器作用下,神经网络系统在5s左右消除时变时滞对系统的影响,使不同状态变量的状态轨迹收敛至同一轨迹;在系统状态实现同步后,同步误差系统的同步误差信号快速收敛为0,即神经网络主从系统达到同步。由此表明设计的输出反馈控制器能够满足预期的结果,即主系统与从系统达成同步。

4 结论

针对半 Markov 下的时滞神经网络输出反馈同步问题,建立半 Markov 时变时滞模型,选取时滞相关的 Lyapunov 泛函处理时滞部分,在无控制器输入矩阵下,利用自由权矩阵将系统矩阵与 Lyapunov 泛函矩阵分离,消除输出矩阵秩的约束,保证同步误差系统为随机均方稳定的同时满足混合 H_∞ /无源性能指标。通过数值例子验证设计控制器的有效性,结果表明:当系统受到时变时滞影响时,设计的输出反馈控制器在5s左右使系统状态变量收敛到同一轨迹,之后同步误差系统的状态变量也收敛为0,控制器在消除时滞约束后信号变化也收敛到0,本文设计的输出反馈控制器能够有效使系统实现同步。随着时滞现象的多样性与复杂化,当系统中存在与模态相关的时滞时如何实现同步有待进一步研究。

参考文献:

- [1] NING Q, TAO G, CHEN B, et al. Multi-UAVs trajectory and mission cooperative planning based on the Markov model[J]. *Physical Communication*, 2019, 35:100717.
- [2] CUI L, ZHANG C, ZHANG Q, et al. A method for aero-engine gas path anomaly detection based on Markov transition field and multi-LSTM[J]. *Aerospace*, 2021, 8(12):374.
- [3] ZHAO C, ZHONG S, ZHONG Q, et al. Synchronization of Markovian complex networks with input mode delay and Markovian directed communication via distributed dynamic event-triggered control[J]. *Nonlinear Analysis:Hybrid Systems*, 2020, 36:100883.
- [4] FENG J W, CHENG K. Pinning synchronization for delayed coupling complex dynamical networks with incomplete transition rates Markov jump[J]. *Neurocomputing*, 2021, 434:239–248.
- [5] WANG J, YANG C, SHEN H, et al. Sliding-mode control for slow-sampling singularly perturbed systems subject to Markov jump parameters[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics:Systems*, 2020, 51(12):7579–7586.
- [6] 张林闯. 半马尔科夫跳跃系统的故障检测问题研究[D]. 锦州:渤海大学, 2023.
- [7] ZHANG L C. Research on Fault Detection of Semi Markov Jump System [D]. Jinzhou: Bohai University, 2023.
- [7] CAO D, JIN Y, QI W. Synchronization for stochastic semi-Markov jump neural networks with dynamic event-triggered scheme[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2021, 360(16):12620–12639.
- [8] KUMAR A, DAS S, SINGH S. Quasi-projective synchronization of inertial complex-valued recurrent neural networks with mixed time-varying delay and mismatched parameters[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2023, 166:112948.
- [9] JIN Y, QI W, ZONG G. Finite-time synchronization of delayed semi-Markov neural networks with dynamic event-triggered scheme[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2021, 19:2297–2308.
- [10] ZHENG C D, LIU S, MENG H. Event-triggered synchronization for semi-Markov jump complex dynamic networks with time-varying delay[J]. *Neurocomputing*, 2021, 458:390–402.
- [11] KARTHICK S A, SAKTHIVEL R, ALZHRANI F, et al. Synchronization of semi-Markov coupled neural networks with impulse effects and leakage delay[J]. *Neurocomputing*, 2020, 386:221–231.
- [12] ZHANG Z, CHEN Z, SHENG Z, et al. Static output feedback secure synchronization control for Markov jump neural networks under hybrid cyber-attacks[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2022, 430:127274.
- [13] ZHAI J. Dynamic output-feedback control for nonlinear time-delay systems and applications to chemical reactor systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II:Express Briefs*, 2019, 66(11):1845–1849.
- [14] RUBIO M J, ROSSELL J M, KARIMI H R, et al. Static output-feedback control under information structure constraints[J]. *Automatica*, 2013, 49(1):313–316.
- [15] SEURET A, GOUAISBAUT F. Wirtinger-based integral inequality: application to time-delay systems[J]. *Automatica*, 2013, 49(9):2860–2866.
- [16] CHEN W H, XU J X, GUAN Z H. Guaranteed cost control for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(12):2270–2277.
- [17] MEISAMI A M, MOHAMMADPOUR J, GRIGORIADIS K M. Dissipative analysis and control of state-space symmetric systems[C]//American Control Conference. Seattle, WA, USA: IEEE, 2008: 413–418.
- [18] MAO X. Exponential stability of stochastic delay interval systems with Markovian switching[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(10):1604–1612.
- [19] ZHANG C K, HEE Y, JIANG L, et al. Delay-dependent stability analysis of neural networks with time-varying delay: a generalized free-weighting-matrix approach[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, 294:102–120.
- [20] KAZEMY A, LAM J, ZHANG X M. Event-triggered output feedback synchronization of master-slave neural networks under deception attacks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 33(3):952–961.