Vol. 42 No. 3 安徽工业大学学报 (自然科学版) 第 42 卷 第 3 期
May 2025 Journal of Anhui University of Technology (Natural Science) 2025 年 5 月
文章编号: 1671−7872(2025)03−0306−06

半环 Markov 性质的研究

牛晓慧，李文喜
(安徽工业大学 微电子与数据科学学院, 安徽 马鞍山 243032)

摘要: 为进一步简化信息论中的复杂问题, 利用 Shirshov 算法对特定生成关系进行约化, 给出 Markov 链反向链和子链保持 Markov 性的简化代数证明; 在基于半环的 Markov 链刻画基础上, 研究 Markov 随机场的代数表征, 通过 Shirshov 算法计算出 Markov 随机场生成关系的 Gröbner–Shirshov 基, 进而得到半环 Markov 标准型。基于该标准型, 提出随机变量构成 Markov 随机场的代数判据, 并给出联合熵、条件熵和互信息等信息量的标准型表示。最后, 通过具体实例计算 Markov 随机场生成关系的 Gröbner–Shirshov 基及标准型, 证明了随机变量 (X_1, X_2, X_3, X_4) 构成该 Markov 随机场的充要条件, 即为当且仅当任意 $p\in K_4, y_p=\theta$，其中 $K_4=\{9,10,11\}$。

关键词: Markov 链; Markov 随机场; Markov 半环; Gröbner–Shirshov 基; Shirshov 算法
中图分类号: O 29 **文献标志码:** A **doi:** 10.12415/j.issn.1671−7872.23107

Research on the Markov Properties of Semirings

NIU Xiaohui, LI Wenxi
(School of Microelectronics & Data Science, Anhui University of Technology, Maanshan 243032)

Abstract: To further simplify complex problems in information theory, the Shirshov algorithm was employed to reduce the specific generation relations, through which simplified algebraic proofs were provided that the reversed chain and subchain of a Markov chain preserve the Markov property. Building upon the semiring-based characterization of Markov chains, the algebraic representation of Markov random fields was further explored. The Gröbner–Shirshov basis for the generating relations of Markov random fields was computed using the Shirshov algorithm, thereby obtaining the corresponding semiring Markov normal form. Based on this normal form, an algebraic criterion was established for determining whether random variables form a Markov random field, and standard representations were derived for information measures including joint entropy, conditional entropy, and mutual information. Finally, through a concrete example, the Gröbner–Shirshov basis and normal form of the generating relations for a Markov random field were computed, and it was proved that the random variables (X_1， X_2， X_3， X_4) constitute the given Markov random field if and only if for any $p\in K_4, y_p=\theta$, $K_4=\{9,10,11\}$.

Keywords: Markov chain; Markov random field; Markov semiring; Gröbner–Shirshov basis; Shirshov algorithm

为了寻找解决信息论中困难问题的简化方法, 20 世纪 60 年代 Hu[1] 开始研究 Shannon 信息度量的集合论结构, 通过符号替换确定每个信息恒等式都对应一个集合恒等式。在集合结构方面, Venn 图是一种直观有效的工具, 早期学者用 Venn 图表示 2 个或 3 个随机变量的 Shannon 信息度量结构, 直到

收稿日期: 2023−07−10
基金项目: 安徽省高校自然科学基金项目 (KJ2021A0386; KJ2021A1034)
作者简介: 牛晓慧 (1999—), 山西朔州人, 硕士生, 主要研究方向为信息论。
通信作者: 李文喜 (1979—), 安徽定远人, 博士, 副教授, 主要研究方向为代数学、信息论。
引文格式: 牛晓慧, 李文喜. 半环 Markov 性质的研究 [J]. 安徽工业大学学报 (自然科学版), 2025, 42(3):306−311.

Yeung[2] 引入 I— 度量才给出规范解释, 建立了 Shannon 信息度量和集合论间的一一对应关系。作为信息论中的重要模型, Markov 链的信息关系可以用信息图表示, 但当随机变量超过 5 个时, 这种表示方法就变得极其复杂和困难。半环作为一种具有加法和乘法运算的代数结构, 在代数、组合数学和计算机科学等领域应用广泛, 而集合簇在交并运算下可以构成一个半环[3]。因此, 利用半环的代数结构特性来简化 Markov 链的代数表征, 对于降低信息论中复杂问题的理论推导及计算复杂度具有重要研究意义。

Markov 链作为一种重要的随机过程模型, 在信息与通信工程、计算机科学、地理学等多个领域广泛应用。Gibson[4] 运用 Markov 链建立最小均方误差估计模型, 提出了适用于智能体学习系统中的互信息增益和损失计算方法; Ding 等[5] 结合 Markov 链与 Shannon 信息度量理论, 构建了风险自适应动态访问控制模型, 有效解决了云存储环境下的大数据管理问题; Ryu 等[6] 则将 Markov链与频谱聚类技术相结合, 开发出基于社区的扩散方案以优化传播效率。对于任何时间点, 底层 Markov 链都会选择生成相应观察值的树, Adam 等[7] 通过将决策树与底层 Markov 链相融合, 提出了新型预测方法并通过仿真验证了其可行性; Smith 等[8] 构建了全球塑料废物管理系统的 Markov 链模型, 为评估污染治理措施提供了量化工具; Ünal 等[9]利用 Markov 链分析了地震目录数据, 实现了地震活动时空演变的预测建模。在城市规划领域, Yue 等[10] 基于 Markov 链开发土地类型预测混合方法, 揭示了城市土地利用覆盖变化与固有气候、地理和社会经济驱动因素的关联; Sheeba 等[11] 针对高层建筑疏散过程, 建立了离散时间 Markov 链模型, 量化评估楼梯合并和楼层拥挤等因素对疏散时间的影响; Latifi 等[12] 将 Markov 链与多标准决策相结合, 构建了云服务动态评估体系, 实现了基于用户反馈的实时服务质量分析。这些研究充分展现了 Markov 链在解决复杂系统建模与预测问题中的强大能力和广泛适用性。

现有研究表明, Markov 链作为一种强大的数学工具, 为众多实际应用提供了有效的建模和预测方法。但是, Markov 链仍面临状态空间增大导致计算成本升高、平稳分布依赖等挑战。针对这一问题, 本课题组[13] 基于集合交并运算的代数性质, 建立了集合与半环的对应关系, 并利用 Gröbner–Shirshov 基理论[14−16] 及其算法, 构建了幂等补半环及其标准型的表示, 进而推广至链结构, 实现了 n 个随机变量 Shannon 信息度量的统一表示。这种方法通过将随机变量的给定约束条件(如条件独立性) 转化为对应半环中的关系式, 利用 Shirshov 算法计算 Gröbner–Shirshov 基及标准型, 有效简化了随机变量信息度量的数学表示, 但其计算过程仍存在一定的复杂性。基于此, 利用半环代数性质探究 Markov链的内在特性, 不仅给出其理论证明, 还将分析框架推广至更具一般性的 Markov 随机场, 以期为复杂随机系统建模与优化提供理论支撑。

1　预备知识

设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $X^c=\{x_1^c,x_2^c,\cdots,x_n^c\}$, 令 $\tilde{X}=X\cup X^c$, $\mathrm{Rig}[\tilde{X}]$是 1 个由X生成的自由交换半环[13]。在$\mathrm{Rig}[\tilde{X}]$中, 由 $\{(x_ix_i^c,\theta)$, $(x_i\circ x_i^c, 1)$, $(x_i\circ x_i,x_i)$, $(x_i^c\circ x_i^c,x_i^c)\}$生成的同余关系记为$\equiv_\rho$。记$Y=\{y_0,\cdots,y_{m-1}\}(m=2^n, n\in\mathbf{N})$, 其中$k=\sum\limits_{i=1}^{n} j_l2^{l-1}$, $j_l\in\{0,1\}$。而$y_k=x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\in\mathrm{Rig}[\tilde{X}]$, 其中$x_i^k=\begin{cases}x_i, k=1\\ x_i^c, k=0\end{cases}$, c表示x的补, $\circ$表示 1 种运算。

定义 1　设S是一个非空集合, 若$(S,\circ)$是一个单位元为θ的交换半群, $(S,\cdot)$是一个单位元为1的半群, 式中$\cdot$满足分配律, 对于任意的$s\in S$, 若$\theta s=s\theta=\theta$, $1_S\neq\theta$, 则称S为一个半环; 若$(S,\cdot,1)$是一个交换半群, 则称S为一个交换半环。

文中除特别说明外, 所有半环均指有限的交换半环。

定义 2　设$(S,\circ,\cdot,\theta,1)$是一个交换半环, 若对于S中任意s, 存在$t\in S$满足条件: $s\cdot t=\theta$; $s\circ t=1$; $s\cdot s=s$; $s\circ s=s$, 则称S是幂等补半环, 其中t是s的补, 记作$t=s^c$。

定义 3　设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $S[X]$是由X生成的自由幂等补半环, 若在半环$S[X]$中: $x_1x_2^cx_3=\theta$, $(x_1\circ x_2)x_3^cx_4=\theta$, $\cdots$, $(x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_{n-2})x_{n-1}^cx_n=\theta$, 则称 $x_1\to x_2\to\cdots\to x_n$构成 Markov 链; 设在$S[X]$上的同余关系$\equiv_\rho$是$\Big\{(x_1x_2^cx_3,\theta),\Big((x_1\circ x_2)x_3^cx_4\Big)$, $\cdots$, $\Big((x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_{n-2})x_{n-1}^cx_n,\theta\Big)\Big\}$生成的, 则称$S[X]/\equiv_\rho$是 Markov 半环, 记作$M_n[X]$。

定义 4　令$G=(V,E)$为无向图[17], 其中$V=N_n=\{1,2,\cdots,n\}$, 再令X_i为对应点i的随机变量, 如果对于G的所有割集U, 一组随机变量集合$X_{V_1(U)}$, $X_{V_2(U)},\cdots,X_{V_{s(U)}(U)}$在条件$X_U$上相互独立, 那么随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$形成一个由图$G$表示的 Markov 随机场。

定理1(交换半环的钻石引理)[18] 设S为$k\mathrm{Rig}[X]$的一元多项式集合, $\mathrm{Rig}[X]$的项序为$>$,则下列表述是等价的。

1) S为 $k\mathrm{Rig}[X]$的 Gröbner–Shirshov基$[X]/\mathrm{Id}(S)$;

2) $f\in\mathrm{Id}(S)\Rightarrow\bar{f}=a\bar{s}\circ u$,其中$a\in[X]$, $u\in\mathrm{Rig}[X]$并且$s\in S$;

3) $\mathrm{Irr}(S)\{w\in\mathrm{Rig}[X]|w\neq a\bar{s}\circ u\ \forall a\in[X],u\in\mathrm{Rig}[X],s\in S\}$是$k\mathrm{Rig}[X]/\mathrm{Id}(S)$的$k$–线性基, $\mathrm{Id}(S)$是S生成的kA的Ω–理想。

假设$\tilde{X}\cup Y=\{x_1,\cdots,x_n,x_1^c,\cdots,x_n^c,y_0,\cdots,y_{m-1}\}$的生成元的顺序$x_1>\cdots>x_n>x_1^c>\cdots>x_n^c>y_0>\cdots>y_{m-1}$,则$\left[\tilde{X}\cup Y\right]$的任意元素都具有唯一的形式$u_i=a_1a_2\cdots a_n$,其中$a_i\in\tilde{X}\cup Y$, $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n, n\geqslant 0$,并且当$n=0$时, $u=1$。而$\left[\tilde{X}\cup Y\right]$排序为:对于任意的$a,b\in\left[\tilde{X}\cup Y\right]$,若其中一个序列不是有序的前缀,则按字典顺序排序;若a序列是b序列的前缀,则$a<b$。

对于任意$w\in\mathrm{Rig}\left[\tilde{X}\cup Y\right]$, w可唯一地表示为$w=u_1\circ u_2\circ\cdots\circ u_n$,其中$u_i\in\left[\tilde{X}\cup Y\right]$。记$wt(w)=(u_n,u_{n-1},\cdots,u_1)$。对于任意的$u,v\in\mathrm{Rig}\left[\tilde{X}\cup Y\right]$,若其中一个序列不是有序的前缀,则按字典顺序排列$u<v\Rightarrow wt(u)<wt(v)$;若$u$序列是$v$序列的前缀,则$u<v$。

利用Shirshov算法可得到$kM_n[X]$有一组Gröbner–Shirshov基。

定理2 设$<$是半环$\mathrm{Rig}\left[\tilde{X}\cup Y\right]$的项序,则$kM_n[X]$有1组Gröbner–Shirshov基,具体如下:

1) $y_ky_k=y_k$;

2) $y_ky_j=\theta$, $(k\neq j)$;

3) $x_i=\sum\limits_{j\in A_i}{}^{\circ}y_j$,其中$A_i=\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}k_j2^{j-1}|k_i=1,k_1,k_2\cdots k_{i-1},k_{i+1}\cdots k_n\in\{0,1\}\right\}$;

4) $x_i^c=\sum\limits_{j\in A_i^c}{}^{\circ}y_j$,其中$A_i^c=\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}k_j2^{j-1}|k_i=0,k_1,k_2\cdots k_{i-1},k_{i+1}\cdots k_n\in\{0,1\}\right\}$;

5) $\sum\limits_{j\in D-K_n}{}^{\circ}y_j=1$,其中$K_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n-2}\Big((A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_i)\cap A_{i+1}^c\cap A_{i+2}\Big)$;

6) $1\circ y_k=1$;

7) $1\circ 1=1$;

8) $y_p=\theta$, $p\in K_n$。

推论1 Markov半环的标准型为$\left\{1,\ \sum\limits_{k\in B}{}^{\circ}y_k\right\}$,其中$B\subseteq\{0,1,\cdots,2^n-1\}-K'_n$。

2 主要结论及证明

2.1 Markov链的性质

Yeung[18]利用概率的性质,证明了$X_1\to X_2\to\cdots\to X_n$构成一个Markov链时, $X_n\to X_{n-1}\to\cdots\to X_1$构成一个Markov链。文中基于半环的概念给出半环Markov链的定义,利用代数方法证明此性质对半环中的Markov链成立。

定理3 若$X_1\to X_2\to\cdots\to X_n$构成一个Markov链,则$K_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n-2}((A_n\cup A_{n-1}\cup\cdots\cup A_{n-i+1})\cap A_{n-i}^c\cap A_{n-i-1})$,即$X_n\to X_{n-1}\to\cdots\to X_1$构成一个Markov链。

证明 令$A_i=\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}k_j2^{j-1}|k_i=1,k_1,k_2\cdots k_{i-1},k_{i+1}\cdots k_n\in\{0,1\}\right\}$, $A_i^c=\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}k_j2^{j-1}|k_i=0,k_1,k_2\cdots k_{i-1},k_{i+1}\cdots k_n\in\{0,1\}\right\}$,

而$K_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n-2}\bigcup\limits_{k=0}^{i-1}(A_{n-k}\cap A_{n-i}^c\cap A_{n-i-1})$, $K'_n=\bigcup\limits_{j=2}^{n-1}\bigcup\limits_{l=1}^{j-1}\Big(A_l\cap A_j^c\cap A_{j+1}\Big)$。当$0\leqslant k<i\leqslant n-2$时,则$K_n$中的任意一个元素

$$A_{n-k}\cap A_{n-i}^c\cap A_{n-i-1}=(A_{n-i-1}\cap A_{n-i}^c\cap A_{n-i+1}^c\cap A_{n-k})\cup(A_{n-i-1}\cap A_{n-i}^c\cap A_{n-i+1}\cap A_{n-k})$$

又因

$$A_{n-i-1}\cap A_{n-i}^c\cap A_{n-i+1}^c\cap A_{n-k}\subseteq A_{n-i-1}\cap A_{n-i+1}^c\cap A_{n-k}$$

$$A_{n-i-1}\cap A_{n-i}^c\cap A_{n-i+1}\cap A_{n-k}\subseteq A_{n-i-1}\cap A_{n-i}^c\cap A_{n-i+1}$$

则$A_{n-k}\cap A_{n-i}^c\cap A_{n-i-1}\subseteq\Big(A_{n-i-1}\cap A_{n-i+1}^c\cap A_{n-k}\Big)\cup\Big(A_{n-i-1}\cap A_{n-i}^c\cap A_{n-i+1}\Big)$。

而对于$A_{n-i-1}\cap A_{n-i}^c\cap A_{n-i+1}\subseteq K'_n$,故

$$A_{n-k}\cap A_{n-i}^c\cap A_{n-i-1}\subseteq(A_{n-i-1}\cap A_{n-i+1}^c\cap A_{n-k})\cup K'_n$$

同理

$$\begin{aligned}&A_{n-i-1}\cap A_{n-i+1}^c\cap A_{n-k}=\\&(A_{n-i-1}\cap A_{n-i+1}^c\cap A_{n-i+2}^c\cap A_{n+k})\cup\\&(A_{n-i-1}\cap A_{n-i+1}^c\cap A_{n-i+2}\cap A_{n+k})\subseteq(A_{n-i-1}\cap A_{n-i+2}^c\cap A_{n-k})\cup\\&(A_{n-i-1}\cap A_{n-i+1}^c\cap A_{n-i+2})\subseteq(A_{n-i-1}\cap A_{n-i+2}^c\cap A_{n-k})\cup K'_n,\end{aligned}$$

故$A_{n-k}\cap A_{n-i}^c\cap A_{n-i-1}\subseteq\Big(A_{n-i-1}\cap A_{n-i+2}^c\cap A_{n-k}\Big)\cup K'_n$。

以此类推,可得到$A_{n-k}\cap A_{n-i}^c\cap A_{n-i-1}\subseteq\Big(A_{n-i-1}\cap A_{n-k-1}^c\cap A_{n-k}\Big)\cup K'_n\subseteq K'_n$。则$K_n\subseteq K'_n$。同理可证$K'_n\subseteq K_n$,则$K_n=K'_n$得证。

由定理2可得$x_nx_{n-1}^cx_{n-2}=\theta$, $(x_n\circ x_{n-1})x_{n-2}^cx_{n-3}=\theta$, $\cdots$, $(x_n\circ x_{n-1}\circ\cdots\circ x_3)x_2^cx_1=\theta$。根据定义2可得$X_n\to X_{n-1}\to\cdots\to X_1$构成一个Markov链。

定理2给出Markov半环的一组Gröbner–Shirshov基,对于Markov链的子链,可通过Gröbner–Shirshov基约化,证明子链也是一个Markov链。

定理 4　设 $N_n=\{1,2,\cdots,n\}$, 若 $X_1\to X_2\to\cdots\to X_n$ 构成一个 Markov 链, 对 N_n 的任意子集 α, 用 X_α 表示 $(X_i,i\in\alpha)$。设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 N_n 中满足以下条件的任意不相交子集: 对于所有的 $k_j\in\alpha_j, j=1,2,\cdots,m$, 有 $k_1<k_2<\cdots<k_m$。令 $A_{\alpha_i}=\bigcup\limits_{k\in\alpha_i}A_k$, 则 $X_{\alpha_1}\to X_{\alpha_2}\to\cdots\to X_{\alpha_m}$ 构成 Markov 链, 即 $X_1\to X_2\to\cdots\to X_n$ 的子链仍然是一个 Markov 链。

证 明　令 $A_i=\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}k_j2^{j-1}|k_i=1,k_1,k_2\cdots k_{i-1},k_{i+1}\cdots k_n\in\{0,\ 1\}\right\}$, $A_i^c=\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}k_j2^{j-1}|k_i=0,k_1,k_2\cdots k_{i-1},k_{i+1}\cdots k_n\in\{0,\ 1\}\right\}$, 其中 $A_i\cup A_{i+1}\cup\cdots\cup A_{j-1}\cup A_j=A_i\cup A_{(i,j)}\cup A_j$, $i<j,\ i,j\in N_n$。

由定理 2, 对于任意 $(X_{\alpha_1}\circ X_{\alpha_2}\circ\cdots\circ X_{\alpha_i})X_{\alpha_{i+1}}^cX_{\alpha_{i+2}}$, $i\in\{1,2,\cdots,m-2\}$, 通过 Gröbner–Shirshov 基约化可得:

$$\left(\sum_{j\in A_{\alpha_1}}{}^{\circ}y_j\circ\sum_{j\in A_{\alpha_2}}{}^{\circ}y_j\circ\cdots\circ\sum_{j\in A_{\alpha_i}}{}^{\circ}y_j\right)\sum_{j\in A_{\alpha_{i+1}}^c}{}^{\circ}y_j\sum_{j\in A_{\alpha_{i+2}}}{}^{\circ}y_j=\sum_{j\in\left(A_{\alpha_1}\cup\cdots\cup A_{\alpha_i}\right)\cap A_{\alpha_{i+1}}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}}{}^{\circ}y_j$$

因为

$$\begin{aligned}&(A_{\alpha_1}\cup\cdots\cup A_{\alpha_i})\cap A_{\alpha_{i+1}}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}=(A_{\alpha_1}\cup A_{(\alpha_1,\alpha_i)}\cup A_{\alpha_i})\\&\cap A_{\alpha_{i+1}}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}\subseteq(A_1\cup A_{(1,\alpha_1)}\cup A_{\alpha_1}\cup A_{(\alpha_1,\alpha_i)}\cup A_{\alpha_i})\cap\\&A_{\alpha_{i+1}}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}=(A_1\cup A_{(1,\alpha_i)}\cup A_{\alpha_i})\cap A_{\alpha_{i+1}}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}\subseteq\\&(A_1\cup A_{(1,\alpha_i)}\cup A_{\alpha_i}\cup A_{\alpha_i+1}\cup A_{(\alpha_i+1,\alpha_{i+1}-1)}\cup A_{\alpha_{i+1}-1})\cap\\&A_{\alpha_{i+1}}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}=(A_1\cup A_{(1,\alpha_{i+1}-1)}\cup A_{\alpha_{i+1}-1})\cap A_{\alpha_{i+1}}^c\cap\\&A_{\alpha_{i+2}}=(A_1\cup A_{(1,\alpha_{i+1}-1)}\cup A_{\alpha_{i+1}-1})\cap A_{\alpha_{i+1}}^c\cap\\&A_{\alpha_{i+1}+1}^c\cap\cdots\cap A_{\alpha_{i+1}+j}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}\subseteq(A_1\cup A_{(1,\alpha_{i+1}-1)}\cup\\&A_{\alpha_{i+1}-1}\cup A_{\alpha_{i+1}})\cap A_{\alpha_{i+1}+1}^c\cap\cdots\cap A_{\alpha_{i+1}+j}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}\subseteq\\&\qquad\vdots\\&(A_1\cup A_{(1,\alpha_{i+1}-1)}\cup A_{\alpha_{i+1}-1}\cup A_{(\alpha_{i+1}-1,\alpha_{i+1}+j-1)}\cup\\&A_{\alpha_{i+1}+j-1})\cap A_{\alpha_{i+1}+j}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}=(A_1\cup A_{(1,\alpha_{i+1}+j-1)}\cup\\&A_{\alpha_{i+1}+j-1})\cap A_{\alpha_{i+1}+j}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}\end{aligned}$$

对于

$$\begin{aligned}&(A_1\cup A_{(1,\alpha_{i+1}+j-1)}\cup A_{\alpha_{i+1}+j-1})\cap A_{\alpha_{i+1}+j}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}=\\&\left[(A_1\cup A_{(1,\alpha_{i+1}+j-1)}\cup A_{\alpha_{i+1}+j-1})\cap A_{\alpha_{i+1}+j}^c\cap A_{\alpha_{i+1}+j+1}\cap A_{\alpha_{i+2}}\right]\cup\\&\left[(A_1\cup A_{(1,\alpha_{i+1}+j-1)}\cup A_{\alpha_{i+1}+j-1})\cap A_{\alpha_{i+1}+j}^c\cap A_{\alpha_{i+1}+j+1}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}\right]\subseteq\\&\left[(A_1\cup A_{(1,\alpha_{i+1}+j-1)}\cup A_{\alpha_{i+1}+j-1})\cap A_{\alpha_{i+1}+j}^c\cap A_{\alpha_{i+1}+j+1}\right]\cup\\&\left[(A_1\cup A_{(1,\alpha_{i+1}+j-1)}\cup A_{\alpha_{i+1}+j-1}\cup A_{\alpha_{i+1}+j})\cap A_{\alpha_{i+1}+j+1}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}\right]\end{aligned}$$

其中, $(A_1\cup A_{(1,\alpha_{i+1}+j-1)}\cup A_{\alpha_{i+1}+j-1})\cap A_{\alpha_{i+1}+j}^c\cap A_{\alpha_{i+1}+j+1}\subseteq K_n$, 所以

$$\begin{aligned}&(A_1\cup A_{(1,\alpha_{i+1}+j-1)}\cup A_{\alpha_{i+1}+j-1})\cap A_{\alpha_{i+1}+j}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}\subseteq K_n\cup\\&\left[(A_1\cup A_{(1,\alpha_{i+1}+j-1)}\cup A_{\alpha_{i+1}+j-1}\cup A_{\alpha_{i+1}+j})\cap A_{\alpha_{i+1}+j+1}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}\right]\end{aligned}$$

以此类推, 可得

$$\begin{aligned}&(A_1\cup A_{(1,\alpha_{i+1}+j-1)}\cup A_{\alpha_{i+1}+j-1})\cap A_{\alpha_{i+1}+j}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}\subseteq K_n\cup\\&\left[(A_1\cup A_{(1,\alpha_{i+2}-2)}\cup A_{\alpha_{i+2}-2})\cap A_{\alpha_{i+2}-1}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}\right]\subseteq K_n\end{aligned}$$

所以, 由定理 2 可得 $\sum\limits_{j\in\left(A_{\alpha_1}\cup\cdots\cup A_{\alpha_i}\right)\cap A_{\alpha_{i+1}}^c\cap A_{\alpha_{i+2}}}{}^{\circ}y_j=\theta$, 即 $(X_{\alpha_1}\circ X_{\alpha_2}\circ\cdots\circ X_{\alpha_i})X_{\alpha_{i+1}}^cX_{\alpha_{i+2}}=\theta,\ X_{\alpha_{i+2}}=\theta,\quad i\in\{1,2,\cdots,m-2\}$。据定义 2 可得, $X_{\alpha_1}\to X_{\alpha_2}\to\cdots\to X_{\alpha_m}$ 构成一个 Markov 链。

2.2　Markov 随机场的应用

对于 Markov 随机场[19–20], 通过计算 Gröbner–Shirshov 基及标准型, 利用 Shivshov 算法将其条件独立关系转化为对应的幂等补半环中的关系式。文中通过具体实例对其计算过程进行说明, 设一个由随机变量 X_1,X_2,X_3 和 X_4 形成的 Markov 随机场, 如图 1。

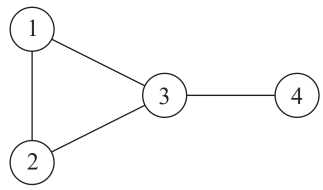

图1　Markov 随机场

Fig. 1　Markov random field

首先, 计算该 Markov 随机场的标准型。根据 Markov 随机场定义, 图 1 所示 Markov 随机场生成的半环由下列关系 R 生成:

$$y_ky_k=y_k,\ \text{其中}k\in D=\{0,1,\cdots,15\}$$

$$y_ky_j=\theta,\ (k\neq j)$$

$$x_i=\sum_{j\in A_i}{}^{\circ}y_j,\ \text{其中}A_i=\left\{\sum_{j=1}^{n}k_j2^{j-1}|k_i=1,k_1,k_2\cdots k_{i-1},k_{i+1}\cdots k_n\in\{0,\ 1\}\right\}$$

$$x_i^c=\sum_{j\in A_i^c}{}^{\circ}y_j,\ \text{其中}A_i^c=\left\{\sum_{j=1}^{n}k_j2^{j-1}|k_i=0,k_1,k_2\cdots k_{i-1},k_{i+1}\cdots k_n\in\{0,\ 1\}\right\}$$

$$\sum_{j\in D}{}^{\circ}y_j=1$$

$$1\circ y_k=1$$

$$1\circ 1=1$$

$$(X_1\circ X_2)X_3^cX_4=\theta$$

$$X_1(X_2\circ X_3)^cX_4=\theta$$

$$X_2(X_1\circ X_3)^c X_4=\theta$$

进一步地,通过 Shirshov 算法把非平凡组合添加到R中。例如,对于$1\wedge 8$,所有可能组合的 ambiguity w为:$w=(x_1\circ x_2)x_3^c x_4 y_k y_k$,其中$k=0,1,\cdots,15$。令$f=y_k y_k-y_k$,$g=(x_1\circ x_2)x_3^c x_4-\theta$并且$(f,g)_w=(y_k y_k-y_k)\left[(x_1\circ x_2)x_3^c x_4\right]-\left[(x_1\circ x_2)x_3^c x_4-\theta\right](y_k y_k)=\theta y_k y_k-y_k\left[(x_1\circ x_2)x_3^c x_4\right]=\theta-y_k\left[(x_1\circ x_2)x_3^c x_4\right]$。

而$(A_1\cup A_2)\cap A_3^c\cap A_4$={9,10,11},所以当$k\notin\{9,10,11\}$时,$(f,g)_w=\theta-\theta$;当$k\in\{9,10,11\}$时,即当$k=5$时,$(f,g)_w=\theta-y_9\left[(x_1\circ x_2)x_3^c x_4\right]=\theta-y_9 y_9=\theta-y_9$,因此把$(y_9,\theta)$添加到$R$中。而当$k\in\{10,11\}$时,把$(y_{10},\theta)$,$(y_{11},\theta)$添加到$R$中。同样地,继续计算$2\wedge 8,\cdots,8\wedge 8$,$i\wedge 9, j\wedge 10$,其中$i\in\{1,\cdots,9\}$,$j\in\{1,\cdots,10\}$,并将未约化的关系添加到$R$中,得到如下关系:

$$y_k y_k=y_k$$

$$y_k y_j=\theta,\ (k\neq j)$$

$$x_i=\sum_{j\in A_i}{}^{\circ} y_j,\ \text{其中}A_i=\left\{\sum_{j=1}^{n}k_j 2^{j-1}\,|\,k_i=1,k_1,k_2\cdots k_{i-1},k_{i+1}\cdots k_n\in\{0,1\}\right\}$$

$$x_i^c=\sum_{j\in A_i^c}{}^{\circ} y_j,\ \text{其中}A_i^c=\left\{\sum_{j=1}^{n}k_j 2^{j-1}\,|\,k_i=0,k_1,k_2\cdots k_{i-1},k_{i+1}\cdots k_n\in\{0,1\}\right\}$$

$$\sum_{j\in D}{}^{\circ} y_j=1$$

$$1\circ y_k=1$$

$$1\circ 1=1$$

$$(X_1\circ X_2)X_3^c X_4=\theta$$

$$X_1(X_2\circ X_3)^c X_4=\theta$$

$$X_2(X_1\circ X_3)^c X_4=\theta$$

$$y_p=\theta,\ p\in K_4,\ \text{其中}K_4=\{9,10,11\}$$

更进一步地,利用 Shirshov 算法计算$i\wedge 11$的所有组合,并重复上述步骤,可得到 Gröbner–Shirshov 基R',其中R'由下列关系组成:

$$y_k y_k=y_k$$

$$y_k y_j=\theta,\ (k\neq j)$$

$$x_i=\sum_{j\in A_i}{}^{\circ} y_j,\ \text{其中}A_i=\left\{\sum_{j=1}^{n}k_j 2^{j-1}\,|\,k_i=1,k_1,k_2\cdots k_{i-1},k_{i+1}\cdots k_n\in\{0,1\}\right\}\tag{1}$$

$$x_i^c=\sum_{j\in A_i^c}{}^{\circ} y_j,\ \text{其中}A_i^c=\left\{\sum_{j=1}^{n}k_j 2^{j-1}\,|\,k_i=0,k_1,k_2\cdots k_{i-1},k_{i+1}\cdots k_n\in\{0,1\}\right\}\tag{2}$$

$$\sum_{j\in D-K_4}{}^{\circ} y_j=1,\ \text{其中}K_4=\{9,10,11\}$$

$$1\circ y_k=1$$

$$1\circ 1=1$$

$$(X_1\circ X_2)X_3^c X_4=\theta\tag{3}$$

$$X_1(X_2\circ X_3)^c X_4=\theta\tag{4}$$

$$X_2(X_1\circ X_3)^c X_4=\theta\tag{5}$$

$$y_p=\theta,\ p\in K_4$$

又因式(3),(5)的首项可被式(1),(2)的首项整除,故简化后得到的 Gröbner–Shirshov 基R^{comp}由以下关系组成:

$$y_k y_k=y_k$$

$$y_k y_j=\theta,\ (k\neq j)$$

$$x_i=\sum_{j\in A_i}{}^{\circ} y_j,\ \text{其中}A_i=\left\{\sum_{j=1}^{n}k_j 2^{j-1}\,|\,k_i=1,k_1,k_2\cdots k_{i-1},k_{i+1}\cdots k_n\in\{0,1\}\right\}$$

$$x_i^c=\sum_{j\in A_i^c}{}^{\circ} y_j,\ \text{其中}A_i^c=\left\{\sum_{j=1}^{n}k_j 2^{j-1}\,|\,k_i=0,k_1,k_2\cdots k_{i-1},k_{i+1}\cdots k_n\in\{0,1\}\right\}$$

$$\sum_{j\in D-K_4}{}^{\circ} y_j=1,\ \text{其中}K_4=\{9,10,11\}$$

$$1\circ y_k=1$$

$$1\circ 1=1$$

$$y_p=\theta,\ p\in K_4$$

而通过定理1和 Gröbner–Shirshov 基R^{comp}可得到半环的标准型为$\left\{1,\sum_{k\in B}{}^{\circ} y_k\right\}$,其中$B\subseteq\{D-K_4\}$。则随机变量$X_1,X_2,X_3,X_4$形成如图1所示 Markov 随机场当且仅当$y_p=\theta,p\in K_4$。

参考文献:

[1] HU G D. On the amount of information[J]. Teor Veroyatnosti Primenen, 1962, 4:447−455.

[2] YEUNG R W. A new outlook on Shannon's information measures[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 37(3): 466−474.

[3] GOLAN J S. Semirings and Their Appliations[M]. Berlin:

Springer Netherlands, 1992.

[4] GIBSON J. Minimum mean squared error estimation and mutual information gain[J]. Information, 2024, 15(8):497.

[5] DING H F, PENG C G, TIAN Y L, et al. A risk adaptive access control model based on Markov for big data in the cloud[J]. International Journal of High Performance Computing and Networking, 2019, 13(4):464.

[6] RYU J, PARK J, LEE J, et al. Community-based diffusion scheme using Markov chain and spectral clustering for mobile social networks[J]. Wireless Networks, 2019, 25(2):875−887.

[7] ADAM T, ÖTTING M, MICHELS R. Markov-switching decision trees[J]. AStA Advances in Statistical Analysis, 2024, 108(2):461−476.

[8] SMITH E, BILEC M M, KHANNA V. Evaluating the global plastic waste management system with Markov chain material flow analysis[J]. ACS Sustainable Chemistry & Engineering, 2023, 11(6):2055−2065.

[9] ÜNAL C, ÖZEL G, EROGLU AZAK T. A Markov chain approach for earthquake sequencing in the Aegean Graben system of Turkey[J]. Earth Science Informatics, 2023, 16(2):1227−1239.

[10] YUE W C, QIN C H, SU M R, et al. Simulation and prediction of land use change in Dongguan of China based on ANN cellular automata-Markov chain model[J]. Environmental and Sustainability Indicators, 2024, 22: 100355.

[11] SHEEBA A, JAYAPARVATHY R. Modeling of emergency evacuation in high rise buildings considering congestion at stairs based on Markov chains[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2024, 633:129352.

[12] LATIFI F, NASSIRI R, MOHSENZADEH M, et al. A Markov chain-based multi-criteria framework for dynamic cloud service selection using user feedback[J]. The Journal of Supercomputing, 2024, 81(1):89.

[13] NIU X H, LI W X, WANG Z Z. On Gröbner−Shirshov bases for Markov semirings[EB/OL]. 2024: 2401.05731. https://arxiv.org/abs/2401.05731v1.

[14] BOKUT L A, CHEN Y Q, MO Q H. Gröbner−Shirshov bases for semirings[J]. Journal of Algebra, 2013, 385:47−63.

[15] BOKUT L A, CHEN Y Q. Gröbner−shirshov bases and their calculation[J]. Bulletin of Mathematical Sciences, 2014, 4(3):325−395.

[16] BOKUT L, CHEN Y Q. Gröbner−Shirshov bases for universal algebras[J]. Journal of South China Normal University (Natural Science Edition), 2014, 46(6):1−9.

[17] 田丰, 马仲蕃. 图与网络流理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1987.
TIAN F, MA Z F. Theory of Graphs and Network Flows [M]. Beijing: Science Press, 1987.

[18] YEUNG R W. Information Theory and Network Coding[M]. New York: Springer, 2008.

[19] YEUNG R W, LEE T T, YE Z X. Information-theoretic characterizations of conditional mutual independence and Markov random fields[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2002, 48(7):1996−2011.

[20] COMER M, SIMMONS J. The Markov random field in materials applications: a synoptic view for signal processing and materials readers[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2022, 39(1):16−24.

责任编辑: 丁吉海