

# 带边界无界区域中 Beltrami 流的刘维尔型定理

时亚博, 章志兵

(安徽工业大学 微电子与数据科学学院, 安徽 马鞍山 243032)

**摘要:** 针对星形域带边界无界区域中的 Beltrami 流, 建立更弱积分条件下的刘维尔型定理, 得到 4 种不同形式的判定条件。通过引入 2 个重要引理构建 Beltrami 流的体积分与面积分的恒等关系, 证明过程中结合反证法、不等式放缩技术以及星形域边界单位外法向量的几何特性, 推导无界区域中 Beltrami 流的刘维尔型定理。特别地, 针对其中一类特殊情况, 采用截断函数技术完善证明过程。这些结果显著改进了现有文献中的积分条件要求, 为无界区域 Beltrami 流的研究提供了新的理论工具。

**关键词:** Beltrami 流; 刘维尔型定理; 星形域; 弱积分条件; 无界区域; 单位外法向量; 截断函数

**中图分类号:** O 175.2 **文献标志码:** A **doi:** 10.12415/j.issn.1671-7872.23155



## Liouville Type Theorem for Beltrami Flow in Unbounded Domain with Nonempty Boundary

SHI Yabo, ZHANG Zhibing

(School of Microelectronics & Data Science, Anhui University of Technology, Maanshan 243032, China)

**Abstract:** Liouville-type theorems for Beltrami flows in unbounded domains with starlike boundaries were established under weakened integral conditions, yielding four distinct criteria. Two key lemmas were introduced to construct exact identities between volume and surface integrals of the Beltrami flows. The proofs were developed by combining contradiction methods, refined inequality estimates, and geometric properties of the unit outward normal vector on starlike boundaries. Notably, a truncation function technique was employed to address special critical cases. These results were shown to significantly relax the integral requirements in existing literature and provide new theoretical tools for analyzing Beltrami flows in unbounded domains.

**Keywords:** Beltrami flow; Liouville type theorem; star-shaped domain; weakened integral conditions; unbounded domains; unit outer normal vector; cut-off function

Beltrami 流指的是向量值函数  $\mathbf{u}$  满足下面的方程组

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

这里  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (u_1(x), u_1(x), u_1(x))$  为三维向量值函数,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ 。由恒等式  $\operatorname{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{u} =$

$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla |\mathbf{u}|^2 / 2$  可知, 每个 Beltrami 流都是稳态欧拉方程的特解,  $\times$  为向量的向量积,  $\cdot$  为向量的数量积,  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$  为梯度算子,  $\operatorname{curl} \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}$  为函数  $\mathbf{u}$  的旋度,  $\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$  为函数  $\mathbf{u}$  的散度。curl, div 分别为旋度算子、散度算子。Arnold 等<sup>[1]</sup> 给出了 Beltrami

收稿日期: 2023-10-16

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11901003)

作者简介: 时亚博 (2000—), 男, 河南驻马店人, 硕士生, 主要研究方向为偏微分方程。

通信作者: 章志兵 (1989—), 男, 安徽潜山人, 博士, 副教授, 主要研究方向为偏微分方程。

引文格式: 时亚博, 章志兵. 带边界无界区域中 Beltrami 流的刘维尔型定理 [J]. 安徽工业大学学报(自然科学版), 2025, 42(4):418-423.

流的基本性质,在磁流体动力学中<sup>[2-4]</sup>,Beltrami 流又被称作无力磁场或 Beltrami 场,因为当  $\mathbf{u}$  代表磁场时,  $\text{curl } \mathbf{u} \times \mathbf{u}$  代表洛伦兹力。

学者们对 Beltrami 流进行了大量研究,且取得系列重要进展。Enciso 等<sup>[5]</sup>在  $\mathbb{R}^3$  中构造了满足  $\text{curl } \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$  (其中  $\lambda$  为任意非零常数),且  $\mathbf{u}$  在无穷远处满足衰减性条件  $|\mathbf{u}(x)| < C/|x|$  的 Beltrami 流,此时对任意常数  $p > 3$ ,  $\mathbf{u} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ ; Lei 等<sup>[6]</sup>也独立构造了类似的 Beltrami 流。后续研究中,Enciso 等<sup>[7-8]</sup>探讨了具有非常值比例因子的 Beltrami 流, Clelland 等<sup>[9]</sup>进一步将研究拓展至  $\mathbb{R}^3$  中开子集的非恒定比例因子情况。Nadirashvili<sup>[10]</sup>针对  $\Omega = \mathbb{R}^3$  情形下的 Beltrami 流,证明了当  $\mathbf{u} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ ,  $p \in [2, 3]$ , 或  $|x| \rightarrow +\infty$ ,  $|\mathbf{u}(x)| = o(|x|^{-1})$  时,  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ 。Chae 等<sup>[11]</sup>研究了稳态欧拉方程的 Beltrami 解,采用比较初等的方法得到类似结论,且部分结论覆盖 Nadirashvili<sup>[10]</sup>的结论;进一步地,Chae 等<sup>[12]</sup>对弱 Beltrami 流研究取得进展,其刘维尔型定理不仅更全面且包含重要改进,将向量场  $\mathbf{u}$  分解为法向  $\mathbf{u}_N$  和切向  $\mathbf{u}_T$ ,  $\mathbf{u}_N$  和  $\mathbf{u}_T$  的定义如下:

$$\mathbf{u}_N = \left( \mathbf{u} \cdot \frac{x}{|x|} \right) \frac{x}{|x|}, \mathbf{u}_T = \frac{x}{|x|} \times \left( \mathbf{u} \times \frac{x}{|x|} \right) = \mathbf{u} - \mathbf{u}_N$$

证明了如果存在序列  $R_k \rightarrow +\infty$  使得  $k \rightarrow +\infty$  时,  $\int_{\partial B_{R_k}(0)} |\mathbf{u}_T|^2 dS \rightarrow 0$ , 那么  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ 。由此可得以下刘维尔型定理成立的充分条件(满足任意一条即可):

- (I)  $|\mathbf{u}_T| = o(|x|^{-1})$  ( $|x| \rightarrow +\infty$ )
- (II)  $\mathbf{u}_T \in L^p(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ,  $p \in [2, 3]$
- (III)  $|\mathbf{u}_T|^2/|x|^\alpha \in L^1(\mathbb{R}^3)$ ,  $\alpha \in (-\infty, 1]$

Wang 等<sup>[13]</sup>前述结果进行了重要改进,并提出了两种创新性证明方法。Enciso 等<sup>[14]</sup>证明在欧几里得空间中存在无穷远处急剧衰减的 Beltrami 流。Gerner<sup>[15-16]</sup>研究了实解析 Beltrami 流的零点集分类问题,同时证明了在任意黎曼流形上几乎所有的对称变换都存在对应的特征向量场。Abe<sup>[17-18]</sup>通过轴对称 Beltrami 流构造了三维欧拉方程的涡环解,并严格证明了当比例因子满足特定对称性时,有界 Beltrami 流必然保持对称结构。Enciso 等<sup>[19]</sup>系统总结了打结涡旋存在性研究的最新进展,重点阐述了 Beltrami 流近似理论、谱分析技术和随机场方法等核心工具,并将这些方法成功应用于 Navier-Stokes 方程涡旋动力学研究。Cardona 等<sup>[20-21]</sup>则建立了 Beltrami 流与计算理论的深刻联系,不仅构造了具有图灵完备性的稳态解,证明了欧几里得空间中存在可模拟通用图灵机的 Beltrami 型精确解。

现有研究主要集中于无边界全空间中的 Beltrami 流刘维尔型定理,而关于带边界无界区域的相关结果较为有限。Zeng 等<sup>[22]</sup>研究了有界区域及带边界无界区域中 Beltrami 流的刘维尔型问题,获得了如下带边界无界区域的刘维尔型定理:设  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  为具有  $C^1$  边界的无界区域,  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \neq \emptyset$ 。假设  $\mathbf{u} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  是式(1)的解,当  $|x| \rightarrow +\infty$  时,  $|\mathbf{u}(x)| = o(|x|^{-1})$ 。此外,  $\Omega$  和  $\mathbf{u}$  满足  $\Omega$  是星形域,在  $\partial\Omega$  上有  $\mathbf{u} \times \nu = \mathbf{0}$ , 或  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ , 其中  $D$  是星形域,在  $\partial\Omega$  上有  $\mathbf{u} \cdot \nu = 0$ , 则在  $\Omega$  中  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ 。这里,星形域的定义为区域  $D \subset \mathbb{R}^3$ , 若存在  $x_0 \in D$  使得对于任意的  $x \in \bar{D}$ , 连接  $x_0$  与  $x$  所得的线段完全包含于  $\bar{D}$  内, 则称  $D$  为星形域。为方便起见,取  $x_0 = 0$ 。若  $D$  是具有  $C^1$  边界的星形域, 则对于任意的  $x \in \partial D$  有  $x \cdot \nu(x) \geq 0$ <sup>[23]</sup>, 其中  $\nu$  表示区域边界上的单位外法向量。

文献[10-13]中研究了全空间中 Beltrami 流的刘维尔型定理,逐步放宽了对速度场衰减性的限制条件。Zeng 等<sup>[22]</sup>考察带边界无界区域中的同类问题,重点分析了边界条件对问题的影响,在与星形域相关的无界区域中建立了刘维尔型定理,但其衰减性条件限制较强。本文基于文献[10-13]关于全空间 Beltrami 流的研究思路,将其刘维尔型定理推广至带边界无界区域情形,通过构造 Beltrami 流的体积分-面积分恒等式,结合精细不等式估计及星形域边界单位外法向量的几何特性,建立适用于带边界无界区域的刘维尔型定理。与 Zeng 等<sup>[22]</sup>的结果相比,建立的定理显著弱化了 Beltrami 流所需的衰减性条件限制。

## 1 带界无界区域中 Beltrami 流的刘维尔型定理

**定理 1** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  是具有  $C^1$  边界的无界区域,  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \neq \emptyset$ 。假设  $\mathbf{u} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  为式(1)的解, 函数  $\mathbf{u}$  满足下面条件之一:

- ①  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{(B_{2R}(0) \setminus \bar{B}_R(0)) \cap \Omega} |\mathbf{u}_T|^2 dx = 0$
- ②  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln R} \int_{(B_R(0) \setminus \bar{B}_1(0)) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}_T|^2}{|x|} dx = 0$
- ③  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln^{1-\beta} R} \int_{(B_R(0) \setminus \bar{B}_1(0)) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}_T|^2}{|x| \ln^\beta |x|} dx = 0, \beta \in (-\infty, 1)$
- ④  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln \ln R} \int_{(B_R(0) \setminus \bar{B}_1(0)) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}_T|^2}{|x| \ln |x|} dx = 0$  (2)

此外,  $\Omega$  和  $\mathbf{u}$  满足: (i)  $\Omega$  是星形域, 在  $\partial\Omega$  上有  $\mathbf{u} \times \nu = \mathbf{0}$ , 或 (ii)  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ , 其中  $D$  是星形域, 在  $\partial\Omega$  上有  $\mathbf{u} \cdot \nu = 0$ , 则有  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ 。

采用反证法证明定理 1, 对于  $\mathbf{u}$  满足条件①的情况使用引入截断函数的方法。

**注** 条件  $|\mathbf{u}(x)| = o(|x|^{-1}) (|x| \rightarrow \infty)$  较条件①, ②, ③, ④中的任一具有更强的约束性。以①为例说明, 若条件  $|\mathbf{u}(x)| = o(|x|^{-1}) (|x| \rightarrow \infty)$  成立, 由极限定义知对任意的正数  $\varepsilon$  存在正数  $M$ , 使得当  $|x| > M$  时,  $|\mathbf{u}(x)| \leq \varepsilon|x|^{-1}$ 。当  $R > M$  时, 利用不等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \int_{(B_{2R}(\mathbf{0}) \setminus \overline{B_R(\mathbf{0})}) \cap \Omega} |\mathbf{u}_T|^2 dx &\leq \frac{1}{R} \int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \setminus \overline{B_R(\mathbf{0})}} |\mathbf{u}|^2 dx \leq \\ \frac{1}{R} \int_R^{2R} \int_{\partial B_r(\mathbf{0})} \frac{\varepsilon^2}{|x|^2} dS dr &= 4\pi\varepsilon^2 \end{aligned}$$

可直接导出条件①成立。

显然, 式 (2) 的条件要求较 Chae 等<sup>[12]</sup> 给出的条件(I), (II), (III) 更宽松, 因此具有更广泛的适用性。

## 2 带边界情形的关键引理

定理 1 的证明需用到 2 个引理, 其中引理 1 源自 Zeng 等<sup>[22]</sup> 的研究。

**引理 1** 设  $D$  是  $\mathbb{R}^3$  中具有  $C^1$  边界的区域,  $\mathbf{u} \in W^{1,q}(D, \mathbb{R}^3)$ , 其中  $q \geq \frac{3}{2}$ , 且  $\varphi$  是  $\overline{D}$  中的光滑函数, 则下面等式成立:

$$\begin{aligned} \int_D \operatorname{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi dx + \int_D (\operatorname{div} \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi) dx = \\ \int_D \left[ \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \Delta \varphi - \sum_{i,j=1}^3 u_i u_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right] dx + \\ \int_{\partial D} \left[ \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \nabla \varphi \cdot \nu - (\mathbf{u} \times \nabla \varphi) \cdot (\mathbf{u} \times \nu) \right] dS \quad (3) \end{aligned}$$

第二个引理的证明运用引理 1。

**引理 2** 设  $D$  是  $\mathbb{R}^3$  中具有  $C^1$  边界的有界区域, 假设  $\mathbf{u} \in W^{1,q}(D, \mathbb{R}^3)$ ,  $q \geq \frac{3}{2}$ , 则对于任意实数  $\alpha$  和任意正数  $\varepsilon$  下式成立:

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\operatorname{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}} dx = \\ \int_D \frac{1}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \left[ \frac{1-\alpha}{2} |\mathbf{u}|^2 |x|^2 + \frac{|\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2} + \alpha (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})^2 \right] dx + \\ \int_{\partial D} \frac{|\mathbf{u}|^2 \mathbf{x} \cdot \nu - 2(\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u} \times \nu)}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}} dS = \\ \int_D \frac{1}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \left[ \frac{1-\alpha}{2} |\mathbf{u}|^2 |x|^2 + \frac{|\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2} + \alpha (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})^2 \right] dx + \\ \int_{\partial D} \frac{2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{u} \cdot \nu) - |\mathbf{u}|^2 (\mathbf{x} \cdot \nu)}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}} dS \quad (4) \end{aligned}$$

**证明** 在引理 1 中, 取光滑函数  $\varphi$  如下:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{1}{2-\alpha} (|x|^2 + \varepsilon)^{1-\frac{\alpha}{2}}, & \alpha \neq 2 \\ \ln \sqrt{|x|^2 + \varepsilon}, & \alpha = 2 \end{cases}$$

经计算:

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \frac{\mathbf{x}}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}} \\ \Delta \varphi &= \operatorname{div}(\nabla \varphi) = \frac{(3-\alpha)|x|^2 + 3\varepsilon}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{x_j}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}} \right] = \frac{\delta_{ij} (|x|^2 + \varepsilon) - \alpha x_i x_j}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}+1}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\delta_{ij}$  是 Kronecker 记号。将式 (5) 代入式 (3), 可得到式 (4) 的第一个等式, 基于恒等式  $(\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u} \times \nu) = |\mathbf{u}|^2 (\mathbf{x} \cdot \nu) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{u} \cdot \nu)$ , 易验证式 (4) 的第二个等式也成立。

## 3 带边界定理的证明方法

考虑  $\Omega$  满足条件 (i) 和  $\mathbf{u}$  满足条件①的情况, 在引理 2 中, 取  $D = B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega$ , 其中  $R_1 > 0$ 。在  $\Omega$  中  $\operatorname{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , 由式 (4) 中的第一个等式得:

$$\begin{aligned} \int_{B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{1}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}+1}} \left[ \frac{1-\alpha}{2} |\mathbf{u}|^2 |x|^2 + \frac{|\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2} + \alpha (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})^2 \right] dx + \\ \int_{\partial(B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega)} \frac{|\mathbf{u}|^2 \mathbf{x} \cdot \nu - 2(\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u} \times \nu)}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}} dS = 0 \\ \text{取 } \alpha = 1, \text{ 在 } \partial \Omega \text{ 上 } \mathbf{u} \times \nu = \mathbf{0}, \text{ 得到:} \\ \int_{B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 \varepsilon + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})^2}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx + \int_{B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \partial \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 \mathbf{x} \cdot \nu}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} dS + \\ \int_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 \mathbf{x} \cdot \nu - 2(\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u} \times \nu)}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} dS = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

因为  $\Omega$  是星形域, 在  $\partial \Omega$  上  $\mathbf{x} \cdot \nu \geq 0$ , 且在  $\partial B_{R_1}(\mathbf{0})$  上  $\nu = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ , 将其代入式 (6) 有:

$$\begin{aligned} \int_{B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 \varepsilon + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})^2}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx + \\ \int_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{1}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \left[ |\mathbf{u}|^2 |x| - 2(\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \cdot \left( \mathbf{u} \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) \right] dS \leq 0 \end{aligned}$$

运用等式

$$|\mathbf{u}_T|^2 = \left| \mathbf{u} \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right|^2$$

可得:

$$\int_{B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx + \int_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 R_1}{2(R_1^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} dS \leq \int_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}_T|^2 R_1}{(R_1^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} dS - \int_{B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})^2}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx \quad (7)$$

由于

$$\int_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 R_1}{2(R_1^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} dS \geq 0, \quad \int_{B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})^2}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx \geq 0$$

对式 (7) 两端进行放缩, 可得:

$$\int_{B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx \leq \frac{R_1}{(R_1^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \int_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} |\mathbf{u}_T|^2 dS \leq \int_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} |\mathbf{u}_T|^2 dS \quad (8)$$

然后采用反证法, 假设在  $\Omega$  中  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , 则可选取足够大的  $R_2$  使得:

$$\int_{B_{R_2}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx = \theta > 0 \quad (9)$$

因此, 对于  $R_1 \geq R_2$ , 有下式成立:

$$\theta \leq \int_{B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx \leq \int_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} |\mathbf{u}_T|^2 dS \quad (10)$$

取  $R_3 > R_2$ , 令式 (10) 两端对  $R_1$  从  $R_3$  到  $2R_3$  积分得

$$R_3 \theta \leq \int_{(B_{2R_3}(\mathbf{0}) \setminus B_{R_3}(\mathbf{0})) \cap \Omega} |\mathbf{u}_T|^2 dx \quad (11)$$

将式 (11) 改写为:

$$\theta \leq \frac{1}{R_3} \int_{(B_{2R_3}(\mathbf{0}) \setminus B_{R_3}(\mathbf{0})) \cap \Omega} |\mathbf{u}_T|^2 dx$$

令  $R_3 \rightarrow +\infty$ , 并结合条件 ① 可得  $\theta \leq 0$ . 这与  $\theta > 0$  矛盾.

再考虑  $\Omega$  满足条件 (i),  $\mathbf{u}$  满足条件 ②, ③, ④ 三者之一的情况. 同样假设在  $\Omega$  中  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , 则式 (9) 成立, 由式 (8), (9) 得:

$$\theta \leq \int_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} |\mathbf{u}_T|^2 dS \quad (12)$$

取  $R_1 \geq R_2 > e, R_3 > R_2$ , 由式 (12) 可得:

$$\frac{\theta}{R_1} \leq \int_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}_T|^2}{|x|} dS \quad (13)$$

$$\frac{\theta}{R_1 \ln^\beta R_1} \leq \int_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}_T|^2}{|x| \ln^\beta |x|} dS$$

令式 (13) 的两个不等式两端对  $R_1$  分别从  $R_2$  到  $R_3$  积分, 可得:

$$\theta(\ln R_3 - \ln R_2) \leq \int_{(B_{R_3}(\mathbf{0}) \setminus B_{R_2}(\mathbf{0})) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}_T|^2}{|x|} dx \leq \int_{(B_{R_3}(\mathbf{0}) \setminus B_{R_2}(\mathbf{0})) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}_T|^2}{|x|} dx$$

$$\frac{\theta(\ln^{1-\beta} R_3 - \ln^{1-\beta} R_2)}{1-\beta} \leq \int_{(B_{R_3}(\mathbf{0}) \setminus B_{R_2}(\mathbf{0})) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}_T|^2}{|x| \ln^\beta |x|} dx \leq \int_{(B_{R_3}(\mathbf{0}) \setminus B_{R_2}(\mathbf{0})) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}_T|^2}{|x| \ln^\beta |x|} dx, \quad \beta < 1$$

$$\theta(\ln \ln R_3 - \ln \ln R_2) \leq \int_{(B_{R_3}(\mathbf{0}) \setminus B_{R_2}(\mathbf{0})) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}_T|^2}{|x| \ln |x|} dx \leq \int_{(B_{R_3}(\mathbf{0}) \setminus B_{R_2}(\mathbf{0})) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}_T|^2}{|x| \ln |x|} dx, \quad \beta = 1 \quad (14)$$

$$\int_{(B_{R_3}(\mathbf{0}) \setminus B_{R_2}(\mathbf{0})) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}_T|^2}{|x| \ln |x|} dx, \quad \beta = 1$$

整理式 (14) 可得:

$$\theta \leq \frac{\ln R_3}{\ln R_3 - \ln R_2} \cdot \frac{1}{\ln R_2} \int_{(B_{R_3}(\mathbf{0}) \setminus B_{R_2}(\mathbf{0})) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}_T|^2}{|x|} dx$$

$$\theta \leq \frac{(1-\beta) \ln^{1-\beta} R_3}{\ln^{1-\beta} R_3 - \ln^{1-\beta} R_2}$$

$$\frac{1}{\ln^{1-\beta} R_3} \int_{(B_{R_3}(\mathbf{0}) \setminus B_{R_2}(\mathbf{0})) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}_T|^2}{|x| \ln^\beta |x|} dx, \quad \beta < 1$$

$$\theta \leq \frac{\ln \ln R_3}{\ln \ln R_3 - \ln \ln R_2}$$

$$\frac{1}{\ln \ln R_3} \int_{(B_{R_3}(\mathbf{0}) \setminus B_{R_2}(\mathbf{0})) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}_T|^2}{|x| \ln |x|} dx, \quad \beta = 1$$

令  $R_3 \rightarrow +\infty$ , 在条件 (i) 和条件 ②, ③, ④ 三者之一同时成立的情况下, 均可得到  $\theta \leq 0$ , 其与假设矛盾.

最后考虑  $\Omega$  满足条件 (ii) 的情况. 在式 (4) 的第二个等式中, 取  $D = B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega$ . 由于在  $\Omega$  中  $\text{curl } \mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, \text{div } \mathbf{u} = 0$ , 在  $\partial \Omega$  上  $\mathbf{u} \cdot \nu = 0$ , 取  $\alpha = 1$  有

$$\int_{B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 \varepsilon + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})^2}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx - \int_{B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \partial \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 x \nu}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} dS + \int_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{u} \cdot \nu) - |\mathbf{u}|^2 x \nu}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} dS = 0$$

因为  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ ,  $D$  是星形域, 所以在  $\partial \Omega$  上有  $\mathbf{x} \cdot \nu \leq 0$ . 此外在  $\partial B_{R_1}(\mathbf{0})$  上有  $\nu = \frac{\mathbf{x}}{|x|}$ , 从而

$$\int_{B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 \varepsilon + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})^2}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx + \int_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|x|}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \left[ \left( \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}{|x|} \right)^2 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \left( \frac{x}{|x|} \right)^2 \right] dS \leq 0 \quad (15)$$

整理式 (15) 得:

$$\int_{B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 \varepsilon + 2(\mathbf{u}\mathbf{x})^2}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx \leq \frac{R_1}{(R_1^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \int_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} - |\mathbf{u}_N|^2 \right) dS \quad (16)$$

运用恒等式  $|\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{u}_T|^2 + |\mathbf{u}_N|^2$ , 并对式 (16) 两端放缩得:

$$\int_{B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx \leq \frac{1}{2} \int_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0}) \cap \Omega} |\mathbf{u}_T|^2 dS \quad (17)$$

类似于  $\Omega$  满足条件 (i) 时的证明, 可得到在  $\Omega$  内  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ 。

关于  $\mathbf{u}$  满足条件 ① 的情况, 还可给出另一种证明。首先引入光滑截断函数  $\eta_R(x)$ , 其定义如下:

$$\eta_R(x) = \eta\left(\frac{|x|}{R}\right) = \begin{cases} 1, & |x| \leq R \\ 0, & |x| \geq 2R \end{cases}$$

令向量值函数:

$$\mathbf{h}(x) = (h_1(x), h_2(x), h_3(x)) = \frac{x\eta_R(x)}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

其中  $\varepsilon$  为任意正数。经过计算可知:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{\partial h_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

故存在函数  $f = f(x_1, x_2, x_3)$  使得式 (18) 成立。

$$df = h_1 dx_1 + h_2 dx_2 + h_3 dx_3 \quad (18)$$

通过计算可得:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = (h_1, h_2, h_3) = \frac{x\eta_R(x)}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{\eta_R(x) [\delta_{ij} (|x|^2 + \varepsilon) - \alpha x_i x_j]}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2} + 1}} + \\ &\quad \eta' \left( \frac{|x|}{R} \right) \frac{x_i x_j}{R|x| (|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \\ \Delta f &= \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h_2}{\partial x_2} + \frac{\partial h_3}{\partial x_3} = \frac{\eta_R(x) [3(|x|^2 + \varepsilon) - \alpha|x|^2]}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2} + 1}} + \\ &\quad \eta' \left( \frac{|x|}{R} \right) \frac{|x|}{R(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}} \end{aligned} \quad (19)$$

考虑  $\Omega$  满足条件 (i) 和  $\mathbf{u}$  满足条件 ① 的情况。在引理 1 中, 取  $D = B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega$ ,  $\varphi = f$ , 其中  $f$  为式 (18) 定义的函数。将式 (19) 中的各式代入式 (3) 可得:

$$\begin{aligned} &\int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{\eta_R(x)|\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2} + 1}} dx + \\ &\int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|x|^2 \eta_R(x) [(1-\alpha)|\mathbf{u}_T|^2 + (\alpha+1)|\mathbf{u}_N|^2]}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2} + 1}} dx + \\ &\int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \eta' \left( \frac{|x|}{R} \right) \frac{|x| (|\mathbf{u}_T|^2 - |\mathbf{u}_N|^2)}{2R(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}} dx + \\ &\int_{\partial B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \left[ \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} (\nabla f \cdot \nu) - (\mathbf{u} \times \nabla f)(\mathbf{u} \times \nu) \right] dS + \\ &\int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \partial \Omega} \left[ \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} (\nabla f \cdot \nu) - (\mathbf{u} \times \nabla f)(\mathbf{u} \times \nu) \right] dS = 0 \quad (20) \end{aligned}$$

由  $\nabla f = \frac{\eta_R(x)}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}} x$ , 在  $\partial B_{2R}(\mathbf{0})$  上  $\eta_R(x) = 0$ , 在  $\partial \Omega$  上  $\mathbf{u} \times \nu = \mathbf{0}$ ,  $x \cdot \nu \geq 0$  得:

$$\begin{aligned} &\int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{\eta_R(x)|\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2} + 1}} dx + \\ &\int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|x|^2 \eta_R(x) [(1-\alpha)|\mathbf{u}_T|^2 + (\alpha+1)|\mathbf{u}_N|^2]}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2} + 1}} dx + \\ &\int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \eta' \left( \frac{|x|}{R} \right) \frac{|x| (|\mathbf{u}_T|^2 - |\mathbf{u}_N|^2)}{2R(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}} dx \leq 0 \quad (21) \end{aligned}$$

取  $\alpha = 1$ , 整理式 (21) 得

$$\begin{aligned} &\int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{\eta_R(x)|\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx + \int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|x|^2 \eta_R(x)|\mathbf{u}_N|^2}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx \leq \\ &\int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \eta' \left( \frac{|x|}{R} \right) \frac{|x| (|\mathbf{u}_N|^2 - |\mathbf{u}_T|^2)}{2R(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} dx \quad (22) \end{aligned}$$

将式 (22) 记为  $I_1 \leq I_2$ , 分别对  $I_1$  和  $I_2$  进行放缩:

$$\begin{aligned} I_1 &\geq \int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{\eta_R(x)|\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx \geq \int_{B_R(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx \\ I_2 &\leq \int_{(B_{2R}(\mathbf{0}) \setminus \overline{B_R(\mathbf{0})}) \cap \Omega} \eta' \left( \frac{|x|}{R} \right) \frac{|x| (|\mathbf{u}_T|^2)}{2R(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} dx \leq \\ &\frac{C}{R} \int_{(B_{2R}(\mathbf{0}) \setminus \overline{B_R(\mathbf{0})}) \cap \Omega} \frac{|x| |\mathbf{u}_T|^2}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} dx \leq \\ &\frac{C}{R} \int_{(B_{2R}(\mathbf{0}) \setminus \overline{B_R(\mathbf{0})}) \cap \Omega} |\mathbf{u}_T|^2 dx \end{aligned}$$

其中  $C$  是大于零的常数。从而

$$\int_{B_R(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx \leq \frac{C}{R} \int_{(B_{2R}(\mathbf{0}) \setminus \overline{B_R(\mathbf{0})}) \cap \Omega} |\mathbf{u}_T|^2 dx$$

令  $R \rightarrow +\infty$ , 可得:

$$\int_{\Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx = 0$$

因此, 在  $\Omega$  内  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ 。

考虑  $\Omega$  满足条件 (ii) 和  $\mathbf{u}$  满足条件 ① 的情况。对式 (20) 运用恒等式:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u} \times \nabla f)(\mathbf{u} \times \nu) = |\mathbf{u}|^2 (\nabla f \cdot \nu) - (\mathbf{u} \cdot \nabla f)(\mathbf{u} \nu) \\ & \text{得} \\ & \int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{\eta_R(x) |\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}+1}} dx + \\ & \int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|x|^2 \eta_R(x) [(1-\alpha)|\mathbf{u}_T|^2 + (\alpha+1)|\mathbf{u}_N|^2]}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}+1}} dx + \\ & \int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \eta' \left( \frac{|x|}{R} \right) \frac{|x| (|\mathbf{u}_T|^2 - |\mathbf{u}_N|^2)}{2R(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx + \\ & \int_{\partial B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \left[ (\mathbf{u} \cdot \nabla f)(\mathbf{u} \nu) - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} (\nabla f \cdot \nu) \right] dS + \\ & \int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \partial \Omega} \left[ (\mathbf{u} \cdot \nabla f)(\mathbf{u} \nu) - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} (\nabla f \cdot \nu) \right] dS = 0 \quad (23) \end{aligned}$$

$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ ,  $D$  是星形域, 所以在  $\partial \Omega$  上  $x\nu \leq 0$ 。此外在  $\partial B_{2R}(\mathbf{0})$  上  $\eta_R(x) = 0$ , 在  $\partial \Omega$  上有  $\mathbf{u} \nu = 0$ 。将这些条件代入式 (23), 并取  $\alpha = 1$ , 得到:

$$\begin{aligned} & \int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{\eta_R(x) |\mathbf{u}|^2 \varepsilon}{2(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx + \int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \frac{|x|^2 \eta_R(x) |\mathbf{u}_N|^2}{(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} dx \leq \\ & \int_{B_{2R}(\mathbf{0}) \cap \Omega} \eta' \left( \frac{|x|}{R} \right) \frac{|x| (|\mathbf{u}_N|^2 - |\mathbf{u}_T|^2)}{2R(|x|^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} dx \end{aligned}$$

采用与  $\Omega$  满足条件 (i) 时同样的证明方法, 可得到在  $\Omega$  内  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ 。

参考文献:

[1] ARNOLD V I, KHESIN B A. Topological Methods in Hydrodynamics[M]. New York: Springer, 1998:109–111.  
 [2] CHANDRASEKHAR S. On force-free magnetic fields[J]. Proc Nat Acad Sci USA, 1956, 42(1):1–5.  
 [3] CHANDRASEKHAR S, KENDALL P C. On force-free magnetic fields[J]. Astrophys J, 1957, 126:457–460.  
 [4] VAINSHTEIN S I. Force-free magnetic fields with constant alpha topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas[J]. NATO ASI Series, 1992, 218:177–193.  
 [5] ENCISO A, PERALTA-SALAS D. Existence of knotted vortex tubes in steady Euler flows[J]. Acta Math, 2015, 214(1):61–134.  
 [6] LEI Z, LIN F H, ZHOU Y. Structure of helicity and global solutions of incompressible Navier–Stokes equation[J].

Arch Ration Mech Anal, 2015, 218(3):1417–1430.  
 [7] ENCISO A, PERALTA-SALAS D. Beltrami fields with a nonconstant proportionality factor are rare[J]. Arch Ration Mech Anal, 2016, 220(1):243–260.  
 [8] ENCISO A, POYATO D, SOLER J. Stability results, almost global generalized Beltrami fields and applications to vortex structures in the Euler equations[J]. Comm Math Phys, 2018, 360(1):197–269.  
 [9] CLELLAND J N, KLOTZ T. Beltrami fields with nonconstant proportionality factor[J]. Arch Ration Mech Anal, 2020, 236(2):767–800.  
 [10] NADIRASHVILI N. Liouville theorem for Beltrami flow[J]. Geom Funct Anal, 2014, 24(3):916–921.  
 [11] CHAE D, CONSTANTIN P. Remarks on a Liouville-type theorem for Beltrami flows[J]. Int Math Res Not IMRN, 2015(20):10012–10016.  
 [12] CHAE D, WOLF J. On the Liouville theorem for weak Beltrami flows[J]. Nonlinearity, 2016, 29(11):3417–3425.  
 [13] WANG N, ZHANG Z B. An improved Liouville type theorem for Beltrami flows[J]. Nonlinearity, 2022, 35(5):2622–2632.  
 [14] ENCISO A, LUQUE A, PERALTA-SALAS D. Beltrami fields with hyperbolic periodic orbits enclosed by knotted invariant tori[J]. Advances in Mathematics, 2020, 373:1–46.  
 [15] GERNER W. Zero set structure of real analytic Beltrami fields[J]. J Geom Anal, 2021, 31(10):9928–9950.  
 [16] GERNER W. Existence and structure of symmetric Beltrami flows on compact 3-manifolds[J]. Differential Geom Appl, 2021, 78:101801.  
 [17] ABE K. Existence of vortex rings in Beltrami flows[J]. Comm. Math. Phys, 2022, 391(2):873–899.  
 [18] ABE K. Rigidity of Beltrami fields with a non-constant proportionality factor[J]. J Math Phys, 2022, 63(4):041507.  
 [19] ENCISO A, PERALTA-SALAS D. Beltrami fields and knotted vortex structures in incompressible fluid flows[J]. Bull Lond Math Soc, 2023, 55(3):1059–1103.  
 [20] CARDONA R, MIRANDA E, PERALTA-SALAS D, PRESAS F. Universality of Euler flows and flexibility of Reeb embeddings[J]. Advances in Mathematics, 2023, 428:109142.  
 [21] CARDONA R, MIRANDA E, PERALTA-SALAS D. Computability and Beltrami fields in Euclidean space[J]. J Math Pures Appl, 2023, 169(9):50–81.  
 [22] ZENG Y, ZHANG Z B. Applications of a formula on Beltrami flow[J]. Math Methods Appl Sci, 2018, 41(10):2632–2642.  
 [23] EVANS L C. Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, vol.19[M]. Providence: American Mathematical Society, 1998.

责任编辑: 丁吉海