

具有 Markov 切换和时滞脉冲的随机延迟系统 稳定性分析

金映波, 姚凤麒, 谢本旺

(安徽工业大学 电气与信息工程学院, 安徽 马鞍山 243032)

摘要: 针对含有 Markov 切换的时滞脉冲随机系统的 p 阶矩指数稳定性问题, 基于 Lyapunov-Krasovskii 理论与平均脉冲区间方法, 建立保证系统 p 阶矩指数稳定的充分条件。该系统在连续动力学过程与脉冲作用中均存在时滞效应, 通过构造合适的 Lyapunov-Krasovskii 泛函并对其微分算子施加约束, 结合平均脉冲控制策略调节脉冲触发频率与间隔, 有效降低稳定性判据的保守性, 数值仿真进一步验证了理论结果的有效性。结果表明: 时滞脉冲对系统稳定性具有双重作用, 稳定的时滞脉冲有助于系统趋于稳定, 而不稳定的时滞脉冲则会对系统稳定性产生不利影响。特别地, 当系统受到不稳定的时滞脉冲作用时, Markov 链的转移概率将影响系统的衰减率, 通过合理调整子系统之间的转移概率可改变整体系统的衰减率性能, 从而促使系统实现稳定。具体而言, 需确保系统以足够大的转移概率由不稳定子系统切换到稳定子系统, 同时以较小的转移概率由稳定子系统切换到不稳定子系统, 这种转移概率的合理配置是实现系统 p 阶矩指数稳定性的关键。

关键词: 混合系统; 脉冲控制; 时滞系统; Lyapunov-Krasovskii 方法; p 阶矩指数稳定; Markov 切换; 稳定性分析

中图分类号: O 231.5 **文献标志码:** A **doi:** 10.12415/j.issn.1671-7872.25038



Stability Analysis of Stochastic Delay Systems with Markov Switching and Delayed Impulses

JIN Yingbo, YAO Fengqi, XIE Benwang

(School of Electrical & Information Engineering, Anhui University of Technology, Maanshan 243032, China)

Abstract: The p -th moment exponential stability problem was investigated for stochastic systems with Markovian switching, time delayed, and impulses. Based on the Lyapunov-Krasovskii theory and the average impulsive interval approach, sufficient conditions ensuring the p -th moment exponential stability of the system were established. The time-delay effects were considered in both the continuous dynamics and the impulsive actions. By constructing an appropriate Lyapunov-Krasovskii functional and imposing constraints on its differential operator, and by utilizing the average impulse control strategy to regulate the impulse frequency and intervals, the conservatism of the stability criteria was effectively reduced. The validity of the theoretical results was verified through numerical simulations. The results indicate that delayed impulses have a dual effect on system stability, where stabilizing delayed impulses promote stability while destabilizing delayed impulses adversely affect it. Furthermore, under destabilizing delayed impulses, the transition probabilities of the Markov chain influence the system's decay rate. The overall decay rate can thus be modified by properly adjusting the transition probabilities between subsystems to ensure stability.

收稿日期: 2025-04-02

基金项目: 安徽省高校自然科学研究重点项目 (2022AH050108); 安徽工业大学沃土计划项目 (WTZ202417)

作者简介: 金映波 (1995—), 男, 浙江台州人, 硕士生, 主要研究方向为脉冲随机延迟系统的稳定与控制。

通信作者: 姚凤麒 (1984—), 女, 安徽马鞍山人, 博士, 副教授, 主要研究方向为随机混杂系统的稳定性与控制。

引文格式: 金映波, 姚凤麒, 谢本旺. 具有 Markov 切换和时滞脉冲的随机延迟系统稳定性分析 [J]. 安徽工业大学学报(自然科学版), 2025, 42(6):634-642, 668.

Specifically, the p -th moment exponential stability is effectively guaranteed when the transition probability from unstable subsystems to stable ones is sufficiently large, while the transition probability from stable subsystems to unstable ones is sufficiently small.

Keywords: hybrid systems; impulsive control; time-delay systems; Lyapunov–Krasovskii method; p -th moment exponential stability; Markov switching; stability analysis

在工程实践与复杂系统运行过程中, 多源不确定因素的耦合作用常导致系统的性能退化乃至失稳。以电力系统为例, 这类具有强非线性特性的动态混杂大系统在运行中易受多种随机因素干扰, 这些干扰以环境噪声形式出现, 可促使系统运行状态由稳定逐渐演变为振荡, 最终可能导致系统崩溃^[1-3]。与此同时, 系统运行状态也可能因自然环境变化、人为干扰或内部机制突变等因素而发生瞬间跳变^[4]。此类脉冲效应在生态系统中表现为种群数量的骤变, 在电力系统中体现为雷击引发的电压脉冲, 在金融系统中则呈现为价格的剧烈波动。根据对系统稳定性的影响方向, 脉冲效应可分稳定型脉冲与不稳定型脉冲, 前者可被应用于实现脉冲控制, 后者则可构成系统扰动^[5-6]。此外, 在控制、通信及航空航天等领域, 由于信号传输与接收存在固有延迟, 系统的连续动态与离散脉冲行为均会受到时滞影响, 致使当前状态与脉冲时刻状态均依赖历史信息, 从而形成一类具有时滞依赖特性的脉冲系统。尽管时滞系统理论已取得重要进展^[7-10], 但时滞、脉冲与随机干扰三者耦合所形成的时滞脉冲随机系统, 仍存在诸多尚未完善的稳定性问题。特别是在新型电力系统建设背景下, 解决该类系统的稳定性问题对增强电网抗干扰能力、缩短故障恢复时间具有关键作用, 不仅能够提高发电效率和系统稳定水平, 也为实现“双碳”目标下的能源安全提供重要支撑。

近年来, 时滞脉冲随机延迟系统的稳定性研究取得了显著进展。Li 等^[11]基于平均脉冲区间和 Lyapunov 函数法, 建立了该类系统的输入状态稳定性判据; Xu 等^[12]结合 Razumikhin 定理、平均脉冲区间与随机分析技术, 提出了 p 阶矩指数稳定性的判定准则; Liu 等^[13]引入脉冲平均随机延迟概念进一步拓展了理论框架, 不仅考虑了脉冲效应的双重影响, 还放宽了传统分析中对脉冲时滞的限制, 允许其超过脉冲区间; Li 等^[14]基于 Razumikhin 定理和平均驻留时间等方法, 构建了时滞脉冲控制下的稳定性准则。值得注意的是, Xu 等^[15]将时滞扩展到无穷, 利用 Razumikhin 技巧建立了一类无界时滞脉冲随机微分系统的稳定性条件。另一方面, Markov 切换系统作为一类具有无记忆特性的混杂动态系统, 能

够准确描述多模态随机转移跳变, 其已在经济、控制与生态等领域展现出广泛的应用价值^[16-19]。该方向的研究亦不断深化: Wang 等^[20]探讨了脉冲随机耦合系统的一致渐近稳定性; Xu 等^[21]基于线性矩阵不等式技术建立了有限时间稳定判据; Yao 等^[22]探讨了系统的全局渐近稳定性和输入状态稳定性准则; Chen 等^[23]通过 Lyapunov 函数法分析了 semi-Markov 切换系统的稳定性条件。然而, 现有研究大多未充分考虑时滞因素与 Markov 切换及脉冲效应三者之间的耦合机制。因此, 本文针对一类具有 Markov 切换和时滞脉冲的随机延迟系统, 研究其 p 阶矩指数稳定性问题, 通过构造 Lyapunov–Krasovskii 泛函并结合平均脉冲区间理论, 建立系统稳定的充分条件, 旨在为复杂随机系统的稳定性分析与控制提供新的理论依据和方法支撑。

1 预备知识

记 \mathbf{R}^n 为 n 维实空间, 自然数集 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbf{R} \in (-\infty, +\infty)$, $\mathbf{R}^+ \in [0, +\infty)$, \mathbf{A}^T 表示矩阵 \mathbf{A} 的转置, $|\cdot|$ 表示向量的欧几里得范数。 $\varphi(t_k^-)$, $\varphi(t_k^+)$ 分别表示函数 $\varphi(t)$ 在 t_k 处的左右极限。 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ 表示完备的概率空间, 且 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 为满足常规条件的 σ 代数流, 即 \mathcal{F}_t 右连续且 \mathcal{F}_0 包括所有 \mathbf{P} 的空集。 $\mathbb{E}[\cdot]$ 表示关于概率测度 \mathbf{P} 的期望算子。 $B(t) = (B_1^t, B_2^t, \dots, B_m^t)$ 表示定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ 上的 m 维布朗运动。 $L((-\infty, 0]; \mathbf{R}^n) = \{\varphi : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbf{R}^n | \varphi(t) \text{ 在 } (-\infty, 0] \text{ 上至多有有限个间断点, 在间断点处左极限存在且右连续}\}$, $\|\varphi\| = \sup_{t \leq 0} |\varphi(t)|$ 表示其范数。对于 $\tau > 0$, $L_{\mathcal{F}_0}^b((-\tau, 0], \mathbf{R}^n)$ 表示所有在 $L((-\infty, 0], \mathbf{R}^n)$ 上有界且 \mathcal{F}_0 可测的随机变量的集合。有限状态空间 $\mathbf{S} = \{1, 2, 3, \dots, Z\}$, $r(t)$ 表示在 \mathbf{S} 中取值的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ 上右连续的 Markov 链, 记 $r(t) = i$, ($i \in \mathbf{S}$), Markov 生成器 $\Gamma = (\gamma_{ij})_{Z \times Z}$ 满足下式:

$$\mathbf{P}\{r(t+\Delta) = j | r(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta), i \neq j \\ 1 + \gamma_{ii}\Delta + o(\Delta), i = j \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Delta > 0$, $\gamma_{ij} > 0$ 为 i 到 j 的转移概率, $\gamma_{ii} = -\sum_{i \neq j} \gamma_{ij}$, 且 $r(t)$ 独立于布朗运动 $B(t)$ 。

考虑如下—类具有 Markov 切换和时滞脉冲的

随机延时系统:

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t), x(t - \delta(t)), r(t))dt + g(t, x(t), x(t - \delta(t)), r(t))dB(t), t \neq t_k \text{ 且 } t \geq t_0 \\ x(t_k) = H_k(t_k^-, x(t_k^-), x(t_k^+), r(t_k^-)), k \in \mathbf{N} \\ x_{t_0}(\theta) = \xi(\theta), -\bar{\delta} \leq \theta \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中: 初始值 $\xi \in L((-\bar{\delta}, 0], \mathbf{R}^n)$; $\bar{\delta}$ 为非负可导时变时滞函数 $\delta(t)$ 上界, 即 $\bar{\delta} = \sup_{t \in (0, +\infty)} \delta(t)$; t_0 为初始时刻. Markov 链的初始状态 $r(t_0) = r_0 \in \mathbf{S}$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ 为系统 n 维状态向量, 可测函数 $f: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $g: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$. 时滞脉冲函数 $H_k: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}^n$. 为防止 Zeno 现象出现, 假设脉冲序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ 满足 $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$, $0 < \bar{\delta} < (t_k - t_{k-1})$, 脉冲序列中的时滞序列 $\{\tau_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ 满足: 当 $k \geq 1$ 时, $\tau_k = (1 - \alpha_k)(t_k - t_{k-1})$, 其中 $\alpha_k \in (0, 1)$, 记 $\bar{\alpha} = \inf_{k \in \mathbf{N}} \alpha_k$. 当 $k=0$ 时, 初始脉冲时滞 $\tau_0 = 0$. 假设 $f(t, 0, 0, i) \equiv 0$, $g(t, 0, 0, i) \equiv 0$, $H_k(t, 0, 0, i) \equiv 0$ 且 f, g 和 H_k 满足合适的条件, 从而保证系统 (2) 存在唯一解 $x(t, \xi)$.

令 $C^{1,2}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}; \mathbf{R}^+)$ 为定义在 $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}$ 上的非负实值函数集, 其元素 $V(t, x, i)$ 对 t 一阶连续可微, 对 x 二阶连续可微, 则对每个 $V \in C^{1,2}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}; \mathbf{R}^+)$ 定义一个微分算子 $\mathcal{L}V: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}^+$, 其表达式如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(t, x, y, i) &= V_t(t, x, i) + V_x(t, x, i)f(t, x, y, i) + \\ &\frac{1}{2} \text{trace}[g^T(t, x, y, i)V_{xx}(t, x, i)g(t, x, y, i)] + \\ &\sum_{j=1}^Z \gamma_{ij}V(t, x, j) \end{aligned}$$

其中 $V_t(t, x, i) = \frac{\partial V(t, x, i)}{\partial t}$, $V_x(t, x, i) = \left[\frac{\partial V(t, x, i)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(t, x, i)}{\partial x_n} \right]$, $V_{xx}(t, x, i) = \left[\frac{\partial^2 V(t, x, i)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{n \times n}$.

定义 1^[24] 若对于任意 $\xi \in L((-\bar{\delta}, 0], \mathbf{R}^n)$, 则系统 (2) 的平凡解满足:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln E|x(t, \xi)|^p}{t} < 0 \quad (3)$$

则称该系统具有 p 阶矩指数稳定性. 特别地, 当 $p=2$ 时, 该系统具有均方指数稳定性.

2 主要结果

定理 1 若存在连续函数 $V \in C^{1,2}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}; \mathbf{R}^+)$, 以及正常数 $\lambda, p, d, \mu, \varepsilon, \beta_1 > \beta_2 > 0$ 以及 $c_2 > c_1 > 0$ 使得:

- 1) $c_1|x|^p \leq V(t, x, i) \leq c_2|x|^p, \forall (t, x, i) \in (\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S})$;
- 2) $E\mathcal{L}V(t, x(t), x(t - \delta(t)), i) \leq -\beta_1 EV(t, x(t), i) + \beta_2 EV(t - \delta(t), x(t - \delta(t)), i), t \neq t_k \text{ 且 } k \in \mathbf{N}$;

$$3) \beta_2 < (\beta_1 - \varepsilon)e^{-\bar{\delta}};$$

$$4) EV(t, x(t), i) \leq e^d EV((t - \tau_k)^-, x(t - \tau_k)^-, i), t = t_k;$$

$$5) dN(t, t_0) \leq \mu + (\varepsilon \bar{\alpha} - \lambda)(t - t_0).$$

其中 $N(t, t_0)$ 为 $(t_0, t]$ 内的脉冲次数, 则系统 (2) 是 p 阶矩指数稳定的.

证明 设 $x(t)$ 为系统 (2) 沿 (t_0, ξ, r_0) 路径上的解. 为方便, 记连续函数 $V(t, i) = V(t, x(t), r(t)), i \in \mathbf{S}, t \geq t_0$. 证明对于任意 $t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbf{N}$, 式 (4) 均成立.

$$EV(t, i) \leq \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\left[kd + \varepsilon \sum_{l=0}^k \tau_l - \varepsilon(t - t_0) \right]} \quad (4)$$

令 $EM(t, i) = e^{\varepsilon(t - t_0)} EV(t, i)$, 则式 (4) 转化为:

$$EM(t, i) \leq \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\left[kd + \varepsilon \sum_{l=0}^k \tau_l \right]}, t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbf{N} \quad (5)$$

再记 $I(k) = e^{\left[kd + \varepsilon \sum_{l=0}^k \tau_l \right]}$, 则式 (5) 转化为:

$$EM(t, i) \leq I(k) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i), t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbf{N} \quad (6)$$

Step 1: 当 $k=0$ 时, $t \in [t_0, t_1)$, $I(0) = e^0 = 1$, 考虑 $t = t_0$ 时刻, 有如下不等式成立:

$$EM(t_0, i) = EV(t_0, i) \leq \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) = I(0) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) \quad (7)$$

因此, 在 $t = t_0$ 时式 (6) 成立. 假设式 (6) 在 $t \in (t_0, t_1)$ 内不成立, 则必存在点 $\hat{t} = \inf \left\{ t \in (t_0, t_1) : EM(t, i) > I(0) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) \right\}$, 由函数 $M(t, i)$ 的连续性得 $EM(\hat{t}, i) = I(0) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i)$ 以及 $EM(t, i) \leq I(0) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i), \forall t \in (t_0, \hat{t}]$. 另外, $\forall t \in (\hat{t}, \hat{t} + \varpi)$, 其中 $\varpi > 0$ 且足够小, 有 $EM(t, i) > I(0) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i)$. 根据 Dini 右上导数可得:

$$D^+[EM(t, i)]|_{t=\hat{t}} \geq 0 \quad (8)$$

再根据定理 1 中条件 2) 和 3) 可知:

$$\begin{aligned} D^+[EM(t, i)]|_{t=\hat{t}} &= E\mathcal{L}V(t, i)|_{t=\hat{t}} + \varepsilon e^{\varepsilon(\hat{t} - t_0)} EV(\hat{t}, i) = \\ &E\mathcal{L}V(t, i)|_{t=\hat{t}} + \varepsilon EM(\hat{t}, i) \leq \\ &e^{\varepsilon(\hat{t} - t_0)} [-\beta_1 EV(\hat{t}, i) + \beta_2 EV(\hat{t} - \delta(\hat{t}), i)] + \varepsilon EM(\hat{t}, i) = \\ &\beta_2 EV(\hat{t} - \delta(\hat{t}), i) e^{\varepsilon(\hat{t} - t_0)} - \beta_1 EM(\hat{t}, i) + \varepsilon EM(\hat{t}, i) = \\ &\beta_2 EV(\hat{t} - \delta(\hat{t}), i) e^{\varepsilon[\hat{t} - \delta(\hat{t}) + \delta(\hat{t}) - t_0]} - \beta_1 EM(\hat{t}, i) + \varepsilon EM(\hat{t}, i) = \\ &\beta_2 EM(\hat{t} - \delta(\hat{t}), i) e^{\varepsilon \delta(\hat{t})} - \beta_1 EM(\hat{t}, i) + \varepsilon EM(\hat{t}, i) \leq \\ &\beta_2 EM(\hat{t}, i) e^{\varepsilon \bar{\delta}} - \beta_1 EM(\hat{t}, i) + \varepsilon EM(\hat{t}, i) = \\ &(\beta_2 e^{\varepsilon \bar{\delta}} - \beta_1 + \varepsilon) EM(\hat{t}, i) < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

显然, 式 (8) 与式 (9) 矛盾, 故假设不成立, 即不

存在 $t = \hat{t}$ 这样的点使得:

$$EM(\hat{t}, i) = I(0) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i)$$

因此, $t \in [t_0, t_1]$ 均有 $EM(t, i) \leq I(0) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i)$ 成立, 即当 $k=0$ 时, 式 (6) 成立。

Step 2: 假设对于 $k = 1, 2, \dots, \bar{N}-1$, 式 (6) 均成立, 其中 \bar{N} 为自然数集 \mathbf{N} 中最大的自然数, 显然 $I(k)$ 随 k 的增大而增大, 故 $t \in [t_0, t_{\bar{N}}]$ 时有不等式成立:

$$EM(t, i) \leq I(\bar{N}-1) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) \quad (10)$$

证明当 $k = \bar{N}$ 时式 (6) 仍成立, 即证明 $\forall t \in [t_{\bar{N}}, t_{\bar{N}+1})$ 有:

$$EM(t, i) \leq I(\bar{N}) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) \quad (11)$$

当 $t = t_{\bar{N}}$ 时, 由于 $t_{\bar{N}} - \tau_{\bar{N}} \in [t_{\bar{N}-1}, t_{\bar{N}})$, 结合式 (10) 和定理 1 的条件 4) 可得:

$$\begin{aligned} EM(t_{\bar{N}}, i) &= EV(t_{\bar{N}}, i)e^{\varepsilon(t_{\bar{N}}-t_0)} \leq \\ &EV((t_{\bar{N}} - \tau_{\bar{N}})^-, i)e^{d+\varepsilon(t_{\bar{N}}-t_0)} = \\ &EV((t_{\bar{N}} - \tau_{\bar{N}})^-, i)e^{[d+\varepsilon(t_{\bar{N}}-t_0-\tau_{\bar{N}}+\tau_{\bar{N}})]} = \\ &EM((t_{\bar{N}} - \tau_{\bar{N}})^-, i)e^{(d+\varepsilon\tau_{\bar{N}})} \leq \\ &e^{(d+\varepsilon\tau_{\bar{N}})} I(\bar{N}-1) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) = \\ &I(\bar{N}) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) \end{aligned} \quad (12)$$

假设 $t \in (t_{\bar{N}}, t_{\bar{N}+1})$ 时式 (6) 不成立, 则必存在点 t^* 满足:

$$t^* = \inf \left\{ t \in (t_{\bar{N}}, t_{\bar{N}+1}) : EM(t, i) > I(\bar{N}) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) \right\} \quad (13)$$

同理, 由函数 $M(t, i)$ 的连续性可得: $EM(t^*, i) = I(N) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i)$ 以及 $EM(t, i) \leq I(N) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i)$, $t \in (t_N, t^*)$ 。 $EM(t, i) > I(N) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i)$, $t \in (t^*, t^* + \nu)$, 其中 $\nu > 0$ 且足够小。由 Dini 右上导数定义可得:

$$D^+[EM(t, i)]|_{t=t^*} \geq 0 \quad (14)$$

结合定理 1 中的条件 2) 和 3) 可得:

$$\begin{aligned} D^+[EM(t, i)]|_{t=t^*} &= E\mathcal{L}V(t, i)|_{t=t^*} e^{\varepsilon(t^*-t_0)} + \varepsilon e^{\varepsilon(t^*-t_0)} EV(t^*, i) \leq \\ &e^{\varepsilon(t^*-t_0)} [-\beta_1 EV(t^*, i) + \beta_2 EV(t^* - \delta(t^*), i)] + \varepsilon EM(t^*, i) = \\ &\beta_2 EV(t^* - \delta(t^*), i) e^{\varepsilon[t^* - \delta(t^*) + \delta(t^*) - t_0]} - \beta_1 EM(t^*, i) + \varepsilon EM(t^*, i) = \\ &\beta_2 EM(t^* - \delta(t^*), i) e^{\varepsilon\delta(t^*)} - \beta_1 EM(t^*, i) + \varepsilon EM(t^*, i) \leq \\ &\beta_2 EM(t^*, i) e^{\varepsilon\delta} - \beta_1 EM(t^*, i) + \varepsilon EM(t^*, i) = \\ &(\beta_2 e^{\varepsilon\delta} - \beta_1 + \varepsilon) EM(t^*, i) < 0 \end{aligned} \quad (15)$$

显然, 式 (15) 与式 (14) 矛盾, 故假设不成立, 即不存在点 t^* 。因此 $t \in [t_{\bar{N}}, t_{\bar{N}+1})$ 时, 均有不等式 $EM(t, i) \leq I(\bar{N}) \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i)$ 成立, 故当 $k = \bar{N}$ 时式 (6) 仍然成立。由数学归纳法知式 (4)~(6) 均成立。

Step 3: 对于任意 $t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbf{N}$ 有

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{l=0}^k \tau_l &\leq \varepsilon(1 - \bar{\alpha})[(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \dots + (t_k - t_{k-1})] = \\ &\varepsilon(1 - \bar{\alpha})(t_k - t_0) \end{aligned} \quad (16)$$

可推得:

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{l=0}^k \tau_l - \varepsilon(t - t_0) &\leq \varepsilon(1 - \bar{\alpha})(t_k - t_0) + \varepsilon(t_0 - t) = \\ \varepsilon(1 - \bar{\alpha})(t_k - t) + \varepsilon(1 - \bar{\alpha})(t - t_0) + \varepsilon(t_0 - t) &= \\ \varepsilon(1 - \bar{\alpha})(t_k - t) - \varepsilon\bar{\alpha}(t - t_0) &\leq -\varepsilon\bar{\alpha}(t - t_0) \end{aligned} \quad (17)$$

当 $t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbf{N}$ 时, $N(t, t_0) = k$, 将式 (17) 代入式 (4), 并通过定理 1 的条件 5) 可得:

$$\begin{aligned} EV(t, i) &\leq \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\left[kd + \varepsilon \sum_{l=0}^k \tau_l - \varepsilon(t - t_0) \right]} \leq \\ &\sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{[N(t, t_0)d - \varepsilon\bar{\alpha}(t - t_0)]} \leq \\ &\sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\mu - \lambda(t - t_0)} \end{aligned} \quad (18)$$

根据定理 1 的条件 1) 和式 (18) 可得:

$$c_1 E|x|^p \leq EV(t, i) \leq \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\mu - \lambda(t - t_0)}, t \geq t_0 \quad (19)$$

因此

$$E|x|^p \leq \frac{\sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\mu - \lambda(t - t_0)}}{c_1} \quad (20)$$

最后, 将式 (20) 代入式 (3) 可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln E|x(t; \xi)|^p}{t} \leq -\lambda < 0 \quad (21)$$

故根据定义 1 可知系统 (2) 是 p 阶矩指数稳定的。

注 1 根据定理 1 的条件 5) 分析表明: 当参数 $d > 0$ 时, 系统受到不稳定的时滞脉冲作用, 该类脉冲对整体稳定性产生负面效应。随着脉冲时滞增大 (对应参数 $\bar{\alpha}$ 减小), 系统所允许的脉冲次数 $N(t, t_0)$ 上界相应降低, 表明稳定性对脉冲频率的敏感性随时滞增加而增强, 因此须严格控制脉冲发生次数才能维持稳定, 该现象印证时滞会进一步放大脉冲的破坏性效应。同时, 定理 1 对连续动态过程中的时滞函数 $\delta(t)$ 施加了严格约束, 一旦时滞函数上界超过临界值, 将导致关键参数过小, 使得条件 5) 无法满足, 从而破坏系统的稳定性。另外, 通过优化 Markov 切换参数, 如降低稳定子系统切换到不稳定子系统的转移概率, 或增大不稳定子系统切换到稳定子系统的转移概率, 可有效提升系统衰减率 β_1 , 从而加快其收敛速度。

当系统 (2) 中的脉冲时滞和连续动态中的时滞函数均为给定常数 τ 和 δ 时, 该系统可退化为一个具有 Markov 切换和常时滞脉冲的随机常时滞系统, 其表达式如下:

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t), x(t-\delta), r(t))dt + g(t, x(t), x(t-\delta), r(t)) \\ dB(t), t \neq t_k \text{ 且 } t \geq t_0 \\ x(t) = H_k(t, r(t^-)), t = t_k \text{ 且 } k \in \mathbf{N} \\ x_{t_0}(\theta) = \xi(\theta), -\delta \leq \theta \leq 0 \end{cases} \quad (22)$$

其中 $(t_k - t_{k-1}) > \delta > 0$ 。当 $k \geq 1$ 时, $0 < \tau < (t_k - t_{k-1})$; 当 $k=0$ 时, $\tau=0$ 。显然, 系统 (22) 为系统 (2) 在常时滞的特殊情况, 类似定理 1 可得到以下推论。

推论 1 假设存在连续函数 $V \in C^{1,2}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}; \mathbf{R}^+)$, $c_2 > c_1 > 0$ 以及正常数 $\lambda, p, \mu, d, \varepsilon, \beta_1 > \beta_2 > 0$, 使得定理 1 的条件 1) 成立, 且条件 2) 和 4) 的 $\delta(t)$ 替换为常数 δ , 条件 3), 5) 修正为如下相应形式:

$$\begin{aligned} 3^*) \quad & \beta_2 < (\beta_1 - \varepsilon)e^{-\varepsilon\delta} \\ 5^*) \quad & (d + \varepsilon\tau)N(t, t_0) \leq \mu + (\varepsilon - \lambda)(t - t_0) \end{aligned}$$

则系统 (22) 是 p 阶矩指数稳定的。

定理 2 若存在函数 $V \in C^{1,2}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}; \mathbf{R}^+)$, 正常数 $\beta, \varepsilon, \eta, p, \lambda, \mu, \bar{d} < 0, c_2 > c_1 > 0, i \in \mathbf{S}$ 使得下列条件成立:

- 1) $c_1|x|^p \leq V(t, x, i) \leq c_2|x|^p, \forall (t, x, i) \in (\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S})$;
- 2) $E\mathcal{L}V(t, x(t), x(t-\delta(t)), i) \leq -\beta EV(t, x(t), i) + \eta EV(t-\delta(t), x(t-\delta(t)), i), t \neq t_k \text{ 且 } k \in \mathbf{N}$;
- 3) $\eta < (\beta + \varepsilon)e^{\bar{d}}$;
- 4) $EV(t, x(t), i) \leq e^{\bar{d}}EV((t-\tau_k)^-, x(t-\tau_k)^-, i), t = t_k$;
- 5) $\bar{d}N(t, t_0) \leq \mu - \varepsilon(\bar{\delta} + \bar{\tau}) - (\varepsilon\bar{\alpha} + \lambda)(t - t_0)$ 。

则系统 (2) 是 p 阶矩指数稳定的。其中:

$\bar{\tau} = \sup_{k \in \mathbf{N}} \tau_k$; $N(t, t_0)$ 为 $(t_0, t]$ 内的脉冲次数。

证明 设 $x(t)$ 为系统 (2) 沿 (t_0, ξ, r_0) 路径上的解, 为方便记连续函数 $V(t, i) = V(t, x(t), r(t)), i \in \mathbf{S}$ 且 $t \geq t_0, t_0$ 为初始时刻。证明 $\forall t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbf{N}$, 式 (23) 成立:

$$EV(t, i) \leq \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\left[kd + \varepsilon \left(t - t_0 + \bar{\delta} - \sum_{l=0}^k \tau_l \right) \right]} \quad (23)$$

令连续分段函数 $K(t, i)$ 的期望为:

$$EK(t, i) = \begin{cases} EV(t, i), t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0) \\ EV(t, i)e^{-\varepsilon(t-t_0)}, t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbf{N} \end{cases} \quad (24)$$

Step 1: 证明当 $k=0$ 时式 (23) 成立, 即证明

$$EK(t, i) \leq \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\varepsilon\delta}, t \in [t_0, t_1) \quad (25)$$

当 $t = t_0$ 时, 有 $EK(t_0, i) = EV(t_0, i) \leq \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) \leq \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\varepsilon\delta}$, 显然式 (25) 成立。若式 (25) 对于 $t \in (t_0, t_1)$ 不成立, 由于连续性, 必存在点 $\tilde{t} \in (t_0, t_1)$ 以及足够小的实数 $\rho > 0$, 使得 $\tilde{t} + \rho \in (t_0, t_1)$ 满足:

$$\begin{aligned} EK(t, i) & \leq \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\varepsilon\delta}, t \in [t_0, \tilde{t}) \\ EK(\tilde{t}, i) & = \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\varepsilon\delta} \\ EK(t, i) & > \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\varepsilon\delta}, t \in (\tilde{t}, \tilde{t} + \rho) \end{aligned} \quad (26)$$

故由 Dini 右上导数可得:

$$D^+[EK(t, i)]|_{t=\tilde{t}} \geq 0 \quad (27)$$

考虑不同长度的连续延迟函数 $\delta(t)$ 的影响, 分以下 2 种情况讨论:

Case 1: 当 $(\tilde{t} - \delta(\tilde{t})) \in [t_0, \tilde{t})$ 时, 结合定理 2 的条件 2) 和 3) 可得:

$$\begin{aligned} D^+[EK(t, i)]|_{t=\tilde{t}} & = E\mathcal{L}V(t, i)|_{t=\tilde{t}} e^{-\varepsilon(\tilde{t}-t_0)} - \varepsilon e^{-\varepsilon(\tilde{t}-t_0)} EV(\tilde{t}, i) \leq \\ & e^{-\varepsilon(\tilde{t}-t_0)} [-\beta EV(\tilde{t}, i) + \eta EV(\tilde{t} - \delta(\tilde{t}), i)] - \varepsilon EK(\tilde{t}, i) = \\ & \eta EK(\tilde{t} - \delta(\tilde{t}), i) e^{-\varepsilon\delta(\tilde{t})} - \beta EK(\tilde{t}, i) - \varepsilon EK(\tilde{t}, i) \leq \\ & \eta EK(\tilde{t} - \delta(\tilde{t}), i) - (\beta + \varepsilon) EK(\tilde{t}, i) = \\ & (\eta - \beta - \varepsilon) EK(\tilde{t}, i) < 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Case 2: 当 $(\tilde{t} - \delta(\tilde{t})) \in [t_0 - \delta(t_0), t_0)$ 时, 通过定理 2 的条件 2) 可得:

$$\begin{aligned} D^+[EK(t, i)]|_{t=\tilde{t}} & = E\mathcal{L}V(t, i)|_{t=\tilde{t}} e^{-\varepsilon(\tilde{t}-t_0)} - \varepsilon e^{-\varepsilon(\tilde{t}-t_0)} EV(\tilde{t}, i) \leq \\ & e^{-\varepsilon(\tilde{t}-t_0)} [-\beta EV(\tilde{t}, i) + \eta EV(\tilde{t} - \delta(\tilde{t}), i)] - \varepsilon EK(\tilde{t}, i) = \\ & \eta EK(\tilde{t} - \delta(\tilde{t}), i) e^{-\varepsilon\delta(\tilde{t})} - (\beta + \varepsilon) EK(\tilde{t}, i) \end{aligned} \quad (29)$$

当 $\tilde{t} - \delta(\tilde{t}) \in [t_0 - \delta(t_0), t_0)$ 时, $EK(\tilde{t} - \delta(\tilde{t}), i) = EV(\tilde{t} - \delta(\tilde{t}), i)$, 结合式 (26) 则有以下不等式成立:

$$\begin{aligned} EV(\tilde{t} - \delta(\tilde{t}), i) e^{-\varepsilon\delta(\tilde{t})} & < \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\varepsilon\delta} = \\ EK(\tilde{t}, i) & < e^{-\bar{d}} EK(\tilde{t}, i) \end{aligned} \quad (30)$$

将式 (30) 代入式 (29), 再结合定理 2 的条件 3) 可知:

$$\begin{aligned} D^+[EK(t, i)]|_{t=\tilde{t}} & \leq -(\beta + \varepsilon) EK(\tilde{t}, i) + \eta EK(\tilde{t} - \delta(\tilde{t}), i) e^{-\varepsilon\delta(\tilde{t})} < \\ \eta EK(\tilde{t}, i) e^{-\bar{d}} - (\beta + \varepsilon) EK(\tilde{t}, i) & = [\eta e^{-\bar{d}} - (\beta + \varepsilon)] EK(\tilde{t}, i) < 0 \end{aligned} \quad (31)$$

上述 2 种情况下, 均有 $D^+[EK(t, i)]|_{t=\tilde{t}} < 0$ 与式 (27) 矛盾, 故假设不成立。

综上, 式 (25) 对于 $t \in [t_0, t_1)$ 均成立, 即当 $k=0$ 时式 (23) 成立。

Step 2: 假设 $k=1, 2, \dots, \bar{N}$ 时式 (23) 均成立, 即当 $t \in [t_{\bar{N}}, t_{\bar{N}+1})$ 时均有式 (23) 成立:

$$EV(t, i) \leq \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\left[\bar{N}\bar{d} + \varepsilon \left(t - t_0 + \bar{\delta} - \sum_{l=0}^{\bar{N}} \tau_l \right) \right]} \quad (32)$$

证明 $k=\bar{N}+1$ 时式 (23) 也成立, 即证明下式成立:

$$\begin{aligned} EK(t, i) & = EV(t, i) e^{-\varepsilon(t-t_{\bar{N}+1})} \leq \\ \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\left[(\bar{N}+1)\bar{d} + \varepsilon \left(t_{\bar{N}+1} - t_0 + \bar{\delta} - \sum_{l=0}^{\bar{N}+1} \tau_l \right) \right]} & , t \in [t_{\bar{N}+1}, t_{\bar{N}+2}) \end{aligned} \quad (33)$$

结合定理 2 的条件 4) 可得:

$$EK(t_{\bar{N}+1}, i) = EV(t_{\bar{N}+1}, i) \leq e^{\bar{d}} EV((t_{\bar{N}+1} - \tau_{\bar{N}+1})^-, i) \quad (34)$$

又因 $(t_{\bar{N}+1} - \tau_{\bar{N}+1}) \in [t_{\bar{N}}, t_{\bar{N}+1})$, 故有:

$$EV((t_{\bar{N}+1} - \tau_{\bar{N}+1})^-, i) \leq \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\left[\bar{N} \bar{d} + \varepsilon \left(t_{\bar{N}+1} - \tau_{\bar{N}+1} - t_0 + \bar{\delta} - \sum_{l=0}^{\bar{N}} \tau_l \right) \right]} \quad (35)$$

将式 (35) 代入式 (34) 可得:

$$EK(t_{\bar{N}+1}, i) \leq e^{\bar{d}} EV((t_{\bar{N}+1} - \tau_{\bar{N}+1})^-, i) \leq \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\left[(\bar{N}+1) \bar{d} + \varepsilon \left(t_{\bar{N}+1} - t_0 + \bar{\delta} - \sum_{l=0}^{\bar{N}+1} \tau_l \right) \right]} \quad (36)$$

由此可知当 $t = t_{\bar{N}+1}$ 时, 式 (33) 成立。假设 $t \in (t_{\bar{N}+1}, t_{\bar{N}+2})$ 时式 (33) 不成立, 根据函数连续性, 则必存在点 $\hat{t} \in (t_{\bar{N}+1}, t_{\bar{N}+2})$ 以及足够小的正实数 ω 使得:

$$\begin{cases} EK(t, i) > \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\left[(\bar{N}+1) \bar{d} + \varepsilon \left(t_{\bar{N}+1} - t_0 + \bar{\delta} - \sum_{l=0}^{\bar{N}+1} \tau_l \right) \right]}, \\ t \in (\hat{t}, \hat{t} + \omega); \\ EK(t, i) \leq \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\left[(\bar{N}+1) \bar{d} + \varepsilon \left(t_{\bar{N}+1} - t_0 + \bar{\delta} - \sum_{l=0}^{\bar{N}+1} \tau_l \right) \right]}, \\ t \in (t_{\bar{N}+1}, \hat{t}); \end{cases} \quad (37)$$

式 (37) 在 \hat{t} 处取等号, 由式 (37) 可得:

$$D^+[EK(t, i)]|_{t=\hat{t}} \geq 0 \quad (38)$$

考虑 $\hat{t} - \delta(\hat{t})$ 的位置, 有以下 2 种情况:

Case 1: 当 $\hat{t} - \delta(\hat{t}) \in [t_{\bar{N}+1}, \hat{t})$ 时, 结合定理 2 的条件 2) 和 3) 可得:

$$\begin{aligned} D^+[EK(t, i)]|_{t=\hat{t}} &= E\mathcal{L}V(t, i)|_{t=\hat{t}} e^{-\varepsilon(\hat{t}-t_{\bar{N}+1})} - \varepsilon e^{-\varepsilon(\hat{t}-t_{\bar{N}+1})} EV(\hat{t}, i) \leq \\ &e^{-\varepsilon(\hat{t}-t_{\bar{N}+1})} [-\beta EV(\hat{t}, i) + \eta EV(\hat{t} - \delta(\hat{t}), i)] - \varepsilon EK(\hat{t}, i) = \\ &\eta EV(\hat{t} - \delta(\hat{t}), i) e^{-\varepsilon[\hat{t}-\delta(\hat{t})-t_{\bar{N}+1}]} e^{-\varepsilon\delta(\hat{t})} - (\beta + \varepsilon) EK(\hat{t}, i) = \\ &\eta EK(\hat{t} - \delta(\hat{t}), i) e^{-\varepsilon\delta(\hat{t})} - (\beta + \varepsilon) EK(\hat{t}, i) \leq \\ &\eta EK(\hat{t} - \delta(\hat{t}), i) - (\beta + \varepsilon) EK(\hat{t}, i) \leq \\ &(\eta - \beta - \varepsilon) EK(\hat{t}, i) < 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Case 2: 当 $\hat{t} - \delta(\hat{t}) \in [t_{\bar{N}}, t_{\bar{N}+1})$ 时, 由定理 2 的条件 2) 可推得:

$$\begin{aligned} D^+[EK(t, i)]|_{t=\hat{t}} &= E\mathcal{L}V(t, i)|_{t=\hat{t}} e^{-\varepsilon(\hat{t}-t_{\bar{N}+1})} - \varepsilon e^{-\varepsilon(\hat{t}-t_{\bar{N}+1})} EV(\hat{t}, i) \leq \\ &e^{-\varepsilon(\hat{t}-t_{\bar{N}+1})} [-\beta EV(\hat{t}, i) + \eta EV(\hat{t} - \delta(\hat{t}), i)] - \varepsilon EK(\hat{t}, i) = \\ &\eta EK(\hat{t} - \delta(\hat{t}), i) e^{-\varepsilon\delta(\hat{t})} - (\beta + \varepsilon) EK(\hat{t}, i) \end{aligned} \quad (40)$$

此时 $\hat{t} - \delta(\hat{t}) \in [t_{\bar{N}}, t_{\bar{N}+1})$, 将 $t = \hat{t} - \delta(\hat{t})$ 代入 (32) 式, 并结合式 (37) 可推得:

$$\begin{aligned} EK(\hat{t} - \delta(\hat{t}), i) e^{-\varepsilon\delta(\hat{t})} &\leq EK(\hat{t} - \delta(\hat{t}), i) = \\ EV(\hat{t} - \delta(\hat{t}), i) e^{-\varepsilon[\hat{t}-\delta(\hat{t})-t_{\bar{N}}]} &\leq \\ e^{-\varepsilon[\hat{t}-\delta(\hat{t})-t_{\bar{N}}]} \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\left\{ \bar{N} \bar{d} + \varepsilon \left[\hat{t} - \delta(\hat{t}) - t_0 + \bar{\delta} - \sum_{l=0}^{\bar{N}} \tau_l \right] \right\}} &= \\ \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\left[\bar{N} \bar{d} + \varepsilon \left(t_{\bar{N}} - t_0 + \bar{\delta} - \sum_{l=0}^{\bar{N}} \tau_l \right) \right]} &= \\ e^{-\bar{d}} \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\left[(\bar{N}+1) \bar{d} + \varepsilon \left(t_{\bar{N}+1} - t_0 + t_{\bar{N}} - t_{\bar{N}+1} + \bar{\delta} - \sum_{l=0}^{\bar{N}} \tau_l \right) \right]} &\leq \\ e^{-\bar{d}} \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\left[(\bar{N}+1) \bar{d} + \varepsilon \left(t_{\bar{N}+1} - t_0 - \tau_{\bar{N}+1} + \bar{\delta} - \sum_{l=0}^{\bar{N}} \tau_l \right) \right]} &= \\ e^{-\bar{d}} \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\left[(\bar{N}+1) \bar{d} + \varepsilon \left(t_{\bar{N}+1} - t_0 + \bar{\delta} - \sum_{l=0}^{\bar{N}+1} \tau_l \right) \right]} &= e^{-\bar{d}} EK(\hat{t}, i) \end{aligned} \quad (41)$$

将式 (41) 代入式 (40), 再通过定理 2 的条件 3) 可得:

$$\begin{aligned} D^+[EK(t, i)]|_{t=\hat{t}} &\leq -(\beta + \varepsilon) EK(\hat{t}, i) + \\ \eta EK(\hat{t} - \delta(\hat{t}), i) e^{-\varepsilon\delta(\hat{t})} &\leq \\ \eta e^{-\bar{d}} EK(\hat{t}, i) - (\beta + \varepsilon) EK(\hat{t}, i) &= \\ [\eta e^{-\bar{d}} - (\beta + \varepsilon)] EK(\hat{t}, i) < 0 \end{aligned} \quad (42)$$

综上所述, $D^+[EK(t, i)]|_{t=\hat{t}} < 0$ 与式 (38) 矛盾, 假设不成立。故当 $t \in [t_{\bar{N}+1}, t_{\bar{N}+2})$ 时式 (33) 均成立。由数学归纳法知 $\forall t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbf{N}$, 式 (23) 均成立。

Step 3: $\forall t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbf{N}$ 有:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(t - t_0 - \sum_{l=0}^k \tau_l + \bar{\delta} \right) &\leq \varepsilon [(\bar{\alpha} - 1)(t_k - t_0) + \bar{\delta} + (t - t_0)] = \\ \varepsilon [(\bar{\alpha} - 1)(t_k - t) + (\bar{\alpha} - 1)(t - t_0) + \bar{\delta} + (t - t_0)] &= \\ \varepsilon [(1 - \bar{\alpha})(t - t_k) + \bar{\alpha}(t - t_0) + \bar{\delta}] &\leq \\ \varepsilon [(1 - \bar{\alpha})(t_{k+1} - t_k) + \bar{\alpha}(t - t_0) + \bar{\delta}] &\leq \\ \varepsilon [\bar{\tau} + \bar{\alpha}(t - t_0) + \bar{\delta}] \end{aligned} \quad (43)$$

将式 (43) 代入式 (23), 再结合定理 2 的条件 5) 可得:

$$\begin{aligned} EV(t, i) &\leq \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\left[k \bar{d} + \varepsilon \left(t - t_0 + \bar{\delta} - \sum_{l=0}^k \tau_l \right) \right]} \leq \\ \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\{N(t, t_0) \bar{d} + \varepsilon [\bar{\tau} + \bar{\alpha}(t - t_0) + \bar{\delta}]\}} &\leq \\ \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\mu - \lambda(t - t_0)} \end{aligned} \quad (44)$$

将式 (44) 代入定理 2 的条件 1) 可得:

$$E|x|^p \leq c_1^{-1} EV(t, i) \leq c_1^{-1} \sup_{t \in [t_0 - \delta(t_0), t_0]} EV(t, i) e^{\mu - \lambda(t - t_0)} \quad (45)$$

将式 (45) 代入式 (3) 可得:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln E|x(t; \xi)|^p}{t} \leq -\lambda < 0 \quad (46)$$

因此,根据定义 1 可知系统 (2) 是 p 阶矩指数稳定的。

注 2 由定理 2 的条件 5) 可知,当 $\bar{d} < 0$ 时,系统受到的是镇定脉冲 (即稳定的时滞脉冲),这类脉冲能有效增强系统的稳定性。随着脉冲时滞增大 (即 $\bar{\alpha}$ 减小),脉冲次数 $N(t, t_0)$ 下界相应减小,表明即使脉冲发生频率因时滞增大而减少,系统仍能保持稳定,充分说明时滞效应可强化脉冲的稳定作用。

3 平均脉冲区间的讨论

为确保系统 (2) 的稳定,无需同时要求连续动态过程与脉冲作用本身均稳定,其关键在于合理调节连续动力学的衰减速率、有效抑制脉冲增益,并维持脉冲序列的适当间隔。在定理 1 中,上述三者之间的定量关系由条件 5) 具体刻画,即

$$dN(t, t_0) \leq \mu + (\varepsilon\bar{\alpha} - \lambda)(t - t_0), \forall t \geq t_0 \quad (47)$$

为降低稳定性判据的保守性,可将平均脉冲区间条件作为式 (47) 的一种特殊情况,其详细的讨论见文献 [25-26]。将式 (47) 转化为:

$$N(t, t_0) \leq \frac{\mu}{d} + \frac{(\varepsilon\bar{\alpha} - \lambda)(t - t_0)}{d}, \forall t \geq t_0 \quad (48)$$

其中 $\mu > 0, d > 0$, 此时系统为反镇定脉冲 (即不稳定的时滞脉冲), 此类脉冲将对系统稳定性产生破坏性影响。在时间趋向于无穷时, 不等式仅在 $\varepsilon\bar{\alpha} - \lambda > 0$ 的情况下成立, 在这种情况下将式 (48) 简化为平均脉冲区间条件:

$$N(t, s) \leq \frac{t - s}{\tau_a} + N_0, t \geq s \geq t_0 \quad (49)$$

其中: $\tau_a \geq \frac{d}{\varepsilon\bar{\alpha} - \lambda}$ 为平均脉冲间隔; $0 < N_0 \leq \frac{\mu}{d}$; N_0 为弹性数。鉴于不稳定的时滞脉冲对系统稳定性具有破坏性效应, 必须通过限制其发生频率以确保系统稳定运行。具体而言, 这要求平均脉冲间隔 τ_a 的取值足够大, 以有效抑制不稳定脉冲的累积影响, 该稳定性条件在数学上等价为平均脉冲间隔设定了一个下界。

对于定理 2, 其条件 5) 可转化为:

$$N(t, t_0) \geq \frac{\mu - \varepsilon(\bar{\delta} + \bar{\tau}) - (\varepsilon\bar{\alpha} + \lambda)(t - t_0)}{\bar{d}}, \forall t \geq t_0 \quad (50)$$

当 $\bar{d} < 0$ 时, 系统受到镇定脉冲 (即稳定的时滞脉冲) 作用, 此类脉冲有助于增强系统的稳定性。在此情况下, 可由式 (50) 相应地导出反向平均脉冲区间条件:

$$N(t, s) \geq \frac{t - s}{\tau_a} - N_0, t \geq s \geq t_0 \quad (51)$$

其中 $0 < \tau_a \leq \frac{\bar{d}}{-\varepsilon\bar{\alpha} - \lambda}, N_0 \geq \frac{\varepsilon(\bar{\delta} + \bar{\tau}) - \mu}{\bar{d}} > 0$ 。稳定的时

滞脉冲能够增强系统稳定性, 因此需要其频繁出现, 即平均脉冲间隔 τ_a 需足够小。这一要求实质上为平均脉冲间隔赋予了一个上界约束。

注 3 文献 [25] 建立了一个满足式 (49) 和式 (51) 的特殊脉冲序列, 其形式如下:

$$\zeta_{\{\tau_a, N_0\}} = \{h, 2h, \dots, (N_0 - 1)h, N_0\tau_a, N_0\tau_a + h, N_0\tau_a + 2h, \dots, N_0\tau_a + (N_0 - 1)h, 2N_0\tau_a, \dots\} \quad (52)$$

其中 $0 < h < \tau_a$ 。

4 仿真验证与分析

本节通过数值仿真验证所得定理的有效性。情形一证明不稳定的时滞脉冲对系统稳定性的破坏作用, 同时表明通过合理调节 Markov 转移概率, 即使存在不稳定子系统也能确保整体系统的稳定性; 情形二则用于验证稳定的时滞脉冲对系统所具有的促进作用。考虑如下一维 Markov 切换随机时滞脉冲系统:

$$\begin{cases} dx(t) = [a(r(t))x(t) + b(r(t))x(t - \delta(t))]dt + \\ w(r(t))x(t - \delta(t))dB(t), t \neq t_k \text{ 且 } t \geq t_0 \\ x(t_k) = ux(t_k - \tau_k)^-, k \in \mathbf{N} \\ x_{t_0}(\theta) = 1, -\bar{\delta} \leq \theta \leq 0 \end{cases} \quad (53)$$

其中: $r(t)$ 为取值于有限状态空间 $S = \{1, 2\}$ 的右连续的 Markov 链, $i \in S$ 。Markov 生成器 $\Gamma = (\gamma_{ij})_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ 。子系统参数 $\begin{cases} a(1) = 0.5 \\ b(1) = 1 \\ w(1) = 1 \end{cases}$ 以及 $\begin{cases} a(2) = -3 \\ b(2) = 1 \\ w(2) = 1 \end{cases}$ 。

4.1 情形一

当 $u = 1.1$, 则系统 (53) 可看作如下 2 个子系统根据 Markov 链切换定律所得的结果:

$$\begin{cases} dx(t) = [0.5x(t) + x(t - \delta(t))]dt + \\ x(t - \delta(t))dB(t), t \neq t_k \text{ 且 } t \geq t_0 \\ x(t_k) = 1.1x(t_k - \tau_k)^-, k \in \mathbf{N} \\ x_{t_0}(\theta) = 1, -\bar{\delta} \leq \theta \leq 0 \end{cases} \quad (54)$$

$$\begin{cases} dx(t) = [-3x(t) + x(t - \delta(t))]dt + \\ x(t - \delta(t))dB(t), t \neq t_k \text{ 且 } t \geq t_0 \\ x(t_k) = 1.1x(t_k - \tau_k)^-, k \in \mathbf{N} \\ x_{t_0}(\theta) = 1, -\bar{\delta} \leq \theta \leq 0 \end{cases} \quad (55)$$

系统 (54) 与 (55) 的均方轨迹仿真结果分别如图 1, 2。由图 1, 2 可以直观看出: 子系统 (54) 的均方轨迹呈发散趋势, 表明该子系统不稳定; 而子系统 (55) 的均方轨迹则表现出收敛特性, 说明其具有稳定性。两图对比清晰地展现了稳定与不稳定子系统在动态行为上的本质差异。

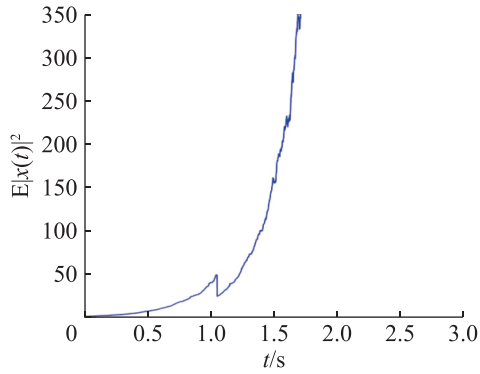


图1 系统 (54) 的均方轨迹

Fig. 1 Mean-square trajectory of system (54)

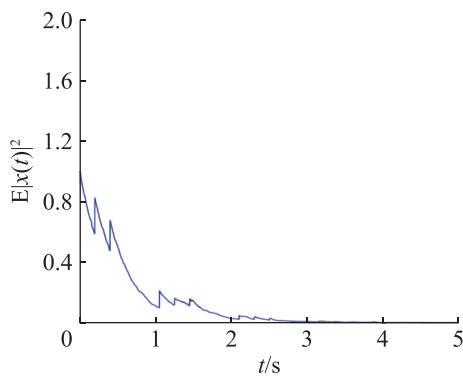


图2 系统 (55) 的均方轨迹

Fig. 2 Mean-square trajectory of system (55)

令 $p = 2, q_1 = 2, q_2 = 1, \delta(t) = 0.1e^{-t}, \bar{\delta} = 0.1,$

$V(t, x, i) = q_i x^2, i \in S,$ 计算 $\mathcal{L}V:$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(t, x, i) &= 2q_i x^T f(t, x, x(t-\delta(t)), i) + \\ & q_i |g(t, x, x(t-\delta(t)), i)|^2 + \sum_{j=1}^2 \gamma_{ij} q_j x^2 = \\ & 2q_i a(i)x + 2q_i b(i)xx(t-\delta(t)) + q_i w^2(i)x^2(t-\delta(t)) + \end{aligned} \quad (56)$$

$$\sum_{j=1}^2 \gamma_{ij} q_j x^2 \leq \left[2a(i) + 1 + \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^2 \gamma_{ij} q_j \right] V(t, x, i) +$$

$$\left[b^2(i) + w^2(i) \right] V(t-\delta(t), x(t-\delta(t)), i)$$

$$\text{则 } \beta_1 = -\max_{i \in S} \left\{ 2a(i) + 1 + \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^2 \gamma_{ij} q_j \right\},$$

$\beta_2 = \max_{i \in S} \{b^2(i) + w^2(i)\}.$ 取 $c_1 = \min_{i \in S} q_i = 1, c_2 = \max_{i \in S} q_i = 2,$

则定理 1 中条件 1) 得到满足。代入子系统参数与转移概率可得: 当 $\beta_1 = 3, \beta_2 = 2$ 时定理 1 中的条件 2) 成立; 当 $\varepsilon = 1.2$ 时定理 1 中的条件 3) 成立。当 Markov 切换发生在脉冲时刻时, 则有:

$$\begin{aligned} V(t_k, x(t_k), j) &= q_j |x(t_k)|^2 = q_j |1.1x(t_k - \tau_k)|^2 = \\ & \frac{1.21q_j}{q_i} V(t_k - \tau_k, x(t_k - \tau_k), i) \leq \end{aligned}$$

$$1.21 \max_{i, j \in S} \frac{q_j}{q_i} V(t_k - \tau_k, x(t_k - \tau_k), i)$$

可知 $e^d = 1.21 \max_{i, j \in S} \frac{q_j}{q_i} = 2.42,$ 当脉冲时刻不发生

切换时 $e^d = 1.21,$ 故取 $d = \ln 1.21$ 时定理 1 的条件 4) 成立。当取 $\bar{\alpha} = 0.7, N_0 = 3,$ 由于 $\lambda > 0,$ 则可选择 $\tau_a = \frac{d}{\varepsilon \bar{\alpha}} = 0.35, \mu \geq dN_0, \mu$ 可取 0.58, 此时 $0 < \lambda \leq \varepsilon \bar{\alpha} - \frac{d}{\tau_a},$ 可取 $\lambda = 0.29,$ 则定理 1 的条件 5) 成立。至此定理 1 中所有条件均得到满足, 由定理 1 可知系统 (53) 是均方稳定的。根据式 (52) 构建脉冲序列 $\{h, 2h, \dots, (N_0 - 1)h, N_0\tau_a, N_0\tau_a + h, N_0\tau_a + 2h, \dots, N_0\tau_a + (N_0 - 1)h, 2N_0\tau_a, \dots\},$ 由于 $0 < h < \tau_a = 0.35,$ 可取 $h = 0.1,$ 对应的时滞脉冲序列时域分布如图 3。

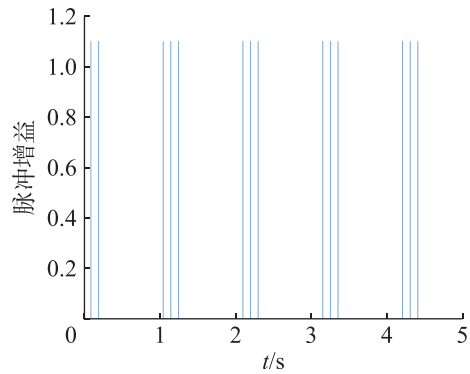


图3 时滞脉冲序列

Fig. 3 Time-delayed impulse sequence

在代入所有满足定理 1 条件的参数并进行仿真后, 得到整体系统 (53) 的均方轨迹如图 4。图 4 显示, 尽管不稳定时滞脉冲导致系统在脉冲时刻均方值出现剧烈跳动并延长了系统趋于稳定的过渡过程, 但由于 Markov 链转移概率经过优化配置, 显著提高了系统的整体衰减率, 最终仍能确保系统实现均方稳定。这一结果表明, 合理设计的 Markov 切换机制能够有效补偿不稳定时滞脉冲引起的不利影响, 通过增强系统自身的衰减能力来保障其整体稳定性。

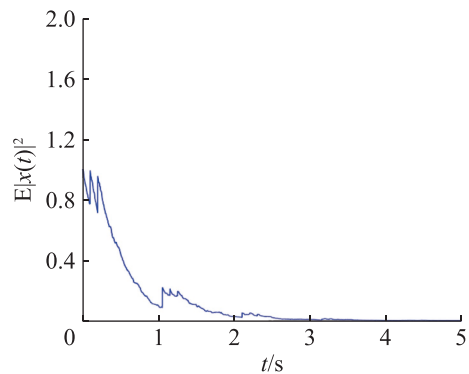


图4 当 $u=1.1$ 时系统 (53) 的均方轨迹

Fig. 4 Mean-square trajectory of system (53) under $u=1.1$

注 4 在 $u = 1.1$ 的情况下, $d = \ln 1.21 > 0$ 时, 时滞脉冲表现为反镇定脉冲 (即不稳定的时滞脉冲), 会破坏系统的整体稳定性, 图 4 中脉冲触发时刻系统

出现的突变与恶化,验证了该脉冲的不利影响。尽管图 1, 2 表明子系统 (54) 本身具有发散性,而子系统 (55) 具有稳定性,但通过合理配置 Markov 链转移概率,仍可确保系统 (53) 均方稳定。考虑到连续动态的衰减率 $\beta_1 = -\max_{i \in S} \{3 - \gamma_{12}, \gamma_{21} - 5\}$ 和 $\beta_2 = 2$,为使整体系统稳定,须保证 $\beta_1 > \beta_2 > 0$,故 $\gamma_{12} > 5$ 且 $0 < \gamma_{21} < 3$ 。由此可知,只有当不稳定子系统 (54) 向稳定子系统 (55) 的转移概率 γ_{12} 足够大,且稳定子系统 (55) 向不稳定子系统 (54) 的转移概率 γ_{21} 足够小,才能保证系统在整体上达到稳定。

4.2 情形二

当 $u = 0.5$ 时,同理令 $p = 2, q_1 = 2, q_2 = 1, \delta(t) = 0.1e^{-t}, \bar{\delta} = 0.1, V(t, x, i) = q_i x^2, i \in S$,取 $c_1 = 1, c_2 = 2$,定理 2 中的条件 1) 得到满足。由式 (56) 可知,选择 $\beta = 3, \eta = 2$,使得定理 2 的条件 2) 成立。取 $\bar{d} = \ln 0.25 = -\ln 4 < 0$,定理 2 的条件 4) 成立。将 \bar{d}, β, η 代入定理 2 的条件 3) 可得 $\varepsilon > 5$,故 ε 可取 10。取 $\bar{\alpha} = 0.7, N_0 = 1$,由于 $0 < \tau_a < \frac{\bar{d}}{-\varepsilon \bar{\alpha}}, \tau_a$ 可取 0.19,则 $\bar{\tau} = 0.19$ 时, $\lambda = -\left(\frac{\bar{d}}{\tau_a} + \varepsilon \bar{\alpha}\right) = 0.29, \mu = \varepsilon(\bar{\delta} + \bar{\tau}) - \bar{d}N_0 = 4.28$,定理 2 的条件 5) 得到满足。至此,定理 2 中所有条件均得到满足,由定理 2 可知系统 (53) 是均方稳定的。当 $u = 0.5$ 时,系统 (53) 的均方轨迹仿真结果如图 5。

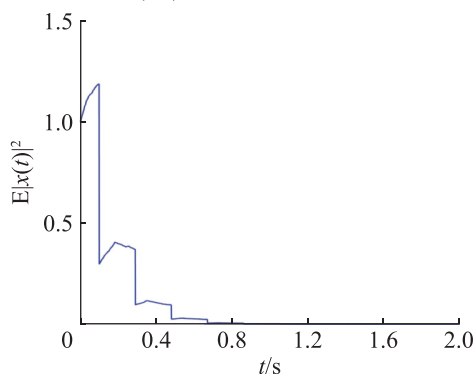


图5 当 $u=0.5$ 时系统 (53) 的均方轨迹

Fig. 5 Mean-square trajectory of system (53) under $u=0.5$

注 5 在 $u = 0.5$ 的情况下, $\bar{d} = -\ln 4 < 0$ 时,时滞脉冲表现为镇定脉冲(即稳定的时滞脉冲),能有效提升系统的整体稳定性。图 5 的仿真结果表明,在镇定脉冲作用下,系统在脉冲触发时刻的均方值出现显著下降,该特性有效缩短了系统达到均方收敛所需的时间,从而说明此类脉冲能够显著加速系统的整体稳定过程。

5 结论

本文探讨了一类具有 Markov 切换和时滞脉冲

的随机延迟系统的 p 阶矩指数稳定性问题,基于 Lyapunov-Krasovskii 泛函和平均脉冲区间理论,建立了保证系统 p 阶矩指数稳定的充分条件。结果表明:不稳定的时滞脉冲会显著破坏系统稳定性,其破坏程度与脉冲时滞大小呈正相关;而稳定的时滞脉冲则能有效促进系统稳定,且稳定效果随脉冲频率和脉冲时滞的增加而增强。特别地,当系统存在不稳定脉冲时,通过合理调节 Markov 链转移概率(即增大不稳定子系统切换到稳定子系统的转移概率,同时减小稳定子系统切换到不稳定子系统的转移概率),可以显著提升连续动态的衰减率,从而使系统满足稳定性要求。数值仿真结果验证了理论分析的正确性,并揭示了转移概率的调节规律:必须确保不稳定子系统切换到稳定子系统的转移概率足够大($\gamma_{12} > 5$),同时稳定子系统切换到不稳定子系统的转移概率足够小($0 < \gamma_{21} < 3$),这样才能保证系统具备足够的衰减率,即使在受到不稳定脉冲干扰的情况下仍能维持稳定状态。本文研究结论主要针对限时时间域的渐近稳定性问题,后续研究可进一步拓展至有限时间稳定性分析,并考虑时变时滞和 semi-Markov 切换等更复杂情形。

参考文献:

- [1] FARMER W J, RIX A J. Impact of continuous stochastic and spatially distributed perturbations on power system frequency stability[J]. Electric Power Systems Research, 2021, 201:107536.
- [2] 王冲,王秀丽,鞠平,等. 电力系统随机分析方法研究综述[J]. 电力系统自动化, 2022, 46(3):184-199.
WANG C, WANG X L, JU P, et al. Review of stochastic analysis methods for power systems[J]. Automation of Electric Power Systems, 2022, 46(3):184-199.
- [3] 尹浩,姚凤麒,王国庆. 具有 Markov 切换脉冲随机时滞系统的有限时间稳定[J]. 安徽工业大学学报(自然科学版), 2024, 41(2):182-188.
YIN H, YAO F Q, WANG G Q. Finite time stability of impulsive stochastic time-delay system with Markov switching[J]. Journal of Anhui University of Technology (Natural Science), 2024, 41(2):182-188.
- [4] LIU B, XU B, ZHANG G H, et al. Review of some control theory results on uniform stability of impulsive systems[J]. Mathematics, 2019, 7(12):1186.
- [5] JIANG B X, LU J Q, LI X D, et al. Impulsive control for attitude stabilization in the presence of unknown bounded external disturbances[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2021, 32(3):1316-1330.