文章编号:1671−7872(2025)04−0410−08

基于离散物理信息神经网络的线性偏微分方程长时积分

杨明威,黄文龙,王子寒
(安徽工业大学 计算机科学与技术学院,安徽 马鞍山 243032)

摘要:针对连续物理信息神经网络在偏微分方程长时积分中面临的时间因果性失效问题,提出一种融合热启动技术和双精度计算的离散物理信息神经网络改进方法。通过引入时间离散策略强化神经网络对时间因果关系的遵循能力,同时采用热启动方案将前一时间步训练获得的模型参数作为下一时间步的初始参数,降低计算资源的消耗。在计算精度方面,通过实施双精度浮点数运算提高线性偏微分方程的求解精度。为验证方法的有效性,设计对流方程和波动方程的数值对比实验。结果表明:热启动技术的应用使计算效率提高2~3倍,同时将计算精度提高约20%;在长时积分任务中,双精度计算可将计算精度提高约10倍,但计算时间相应增加7~8倍;而引入额外的物理约束后计算精度可进一步提高5~6倍,且几乎不增加额外计算开销。结合热启动方案和双精度计算,离散物理信息神经网络可在可控的计算成本下实现高精度长时积分,为复杂系统长时间模拟提供新方案。

关键词:物理信息神经网络;长时积分;时间离散;线性偏微分方程;热启动;双精度计算;波动方程;对流方程
中图分类号:TP 183 **文献标志码:**A **doi:**10.12415/j.issn.1671−7872.24157

Long-time Integration of Linear Partial Differential Equations Based on Discrete Physics-informed Neural Network

YANG Mingwei, HUANG Wenlong, WANG Zihan
(School of Computer Science & Technology, Anhui University of Technology, Maanshan 243032, China)

Abstract: An improved discrete physics-informed neural network method incorporating both warm-start techniques and double-precision computing was proposed to address the temporal causality failure encountered in continuous physics-informed neural networks for long-time integration of partial differential equations. The temporal causality compliance of neural network was enhanced through the introduction of a time-discretization strategy, while computational resource consumption was reduced by employing a warm-start scheme that utilized model parameters obtained from previous time-step training as initial parameters for subsequent time steps. In terms of computational accuracy, the solution precision for linear partial differential equations was improved through the implementation of double-precision floating-point arithmetic. To validate the effectiveness of the proposed method, comparative numerical experiments were designed involving both convection equations and wave equations. The results demonstrate that the application of warm-start techniques achieves a 2–3 fold improvement in computational efficiency while providing approximately 20% enhancement in computational accuracy. For long-time integration

收稿日期:2024−08−29
基金项目:安徽省自然科学基金项目(2108085QA34)
作者简介:杨明威(2001—),男,河南周口人,硕士生,主要研究方向为科学人工智能。
通信作者:黄文龙(1988—),男,安徽铜陵人,博士,副教授,主要研究方向为等离子体物理及科学人工智能。
引文格式:杨明威,黄文龙,王子寒. 基于离散物理信息神经网络的线性偏微分方程长时积分[J]. 安徽工业大学学报(自然科学版),2025,42(4):410−417.

tasks, the implementation of double-precision computing is shown to yield about 10 times higher computational accuracy, though accompanied by a 7–8 fold increase in computation time. Furthermore, when additional physical constraints are incorporated, the computational accuracy is observed to be further improved by 5–6 times without significant additional computational overhead. Through the combined application of warm-start schemes and double-precision computing, high-accuracy long-time integration is successfully realized by the discrete physics-informed neural networks within controllable computational costs, thereby offering a novel solution for prolonged simulations of complex systems.

Keywords: physics-informed neural network; long-time integration; time-discretization; partial differential equation; warm-start; double precision calculation; wave equation; convection equation

偏微分方程 (partial differential equation, PDE) 在科学和工程领域中[1−2] 被广泛应用于各类现象的建模与分析。过去数十年来, 有限差分[3] (finite difference, FD) 和有限元[4] (finite element, FE) 等数值方法已成为 PDE 求解的主流技术。然而, 传统数值方法 (如 FD 和 FE 等) 在处理高维问题和复杂几何结构时仍存在显著局限性。近年来, 基于深度学习求解方法[5−7] 的迅速发展, 其中物理信息神经网络 (physics informed neural network, PINN) 作为一种创新的无网格方法, 通过将物理约束直接嵌入神经网络架构, 有效避免了传统方法中复杂的网格生成过程。这种特性使得 PINN 在求解线性 PDE 时展现出独特优势, 尤其在高维空间和具有复杂几何特征的物理场模拟中表现更为突出[8]。基于这些优势, PINN 及改进算法已被成功应用于多个领域, 包括计算物理学[9−10]、生物医学[11]、空气动力学[12]、热力学[13] 等。但是, 基于 PINN 的长时积分问题尚未得到完全解决, 特别是其时间因果关系的违背问题[14]。因此, 开展基于离散 PINN 的线性 PDE 长时积分研究, 对于增强 PINN 的工程适用性、促进数值计算方法的发展具有重要价值。

在数值计算领域, PDE 长时积分问题始终是核心研究课题。近年来, 众多学者针对这一问题展开了深入研究: Wang 等[15] 研究了能量守恒指数积分器的长期数值行为, 游波等[16] 则探讨了系统在长时间演化过程中可能出现的环面收敛或周期/准周期振荡行为。在基于 PINN 的长时积分研究方面, 学者们也取得了一定进展: Meng 等[17] 提出并行物理信息神经网络构架, 通过时间域分解策略实现了长时间尺度模拟; Wang等[18] 则利用深度算子网络实现了参数化 PDE 的长时积分。其中, 离散 PINN (如 Runge–Kutta physics-informed neural network, RK–PINN) 通过融合数值离散方法与 PINN 框架, 能更严格地保持时间因果关系, 在长时积分任务中展现出独特优势。Zhong 等[19] 应用 RK–PINN 成功模拟了低温等离子体中电子分布、电晕放电及电弧演化等复杂现象。为进一步发挥时间离散特性, Chen 等[20] 将第 l 个时刻解 u^l 作为初始猜测来预测第 $(l+1)$ 个时刻未知解 u^{l+1}, 显著提升了离散 PINN 的计算效率。然而, 现有离散 PINN 方法在处理超长时间尺度的积分问题时, 仍面临积分时间范围有限、计算精度不足等关键问题。鉴于此, 提出融合热启动和双精度计算的改进型 RK–PINN 方法, 用于求解长时间尺度的线性 PDE, 进一步提高 RK–PINN 的精度, 旨在提升线性偏微分方程长时积分精度, 为发展高精度长时间尺度模拟技术提供创新解决方案。

1　基于物理信息神经网络的热启动融合方法

针对线性 PDE 的长时积分问题, 本研究通过以下两个关键策略提升计算性能: 首先, 基于特定应用场景优化选择 PINN 架构; 其次, 引入热启动策略显著加速计算过程。

1.1　物理信息神经网络架构

PINN 框架通过训练神经网络来同时满足偏微分方程及其初始/边界条件。根据实现方式的不同, PINN 可分为连续型和离散型架构, 2 种架构各具特点并适用于不同场景。

1.1.1　连续型架构

连续型 PINN 架构主要适用于连续介质力学问题, 包括固体力学和流体力学等典型应用场景。该架构的核心特征是将 PDE 的物理约束直接嵌入神经网络的损失函数, 从而实现对复杂物理系统的高效求解。在一般形式下, 待求解 PDE 及其初始和边界条件可表示为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{N}[u(x,t)] \tag{1}$$

$$\mathcal{B}[u(x_{\mathrm{B}},t)] = 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{3}$$

其中: t 为时间变量, $t \in [0,T]$; x 为空间变量; x_B 为空

间变量的边界; u为待求解函数; $\mathcal{N}$为u的线性或非线性算子; $\mathcal{B}$为方程的边界算子。利用 Chen 等[20] 提出的 PINN 损失函数框架, 本研究对其进行适应性改进。该损失函数由 PDE 残差项、边界条件约束项和初始条件匹配项构成, 其数学表述如下:

$$\mathcal{L}(\theta)=\lambda_F\mathcal{L}_F(\theta)+\lambda_B\mathcal{L}_B(\theta)+\lambda_I\mathcal{L}_I(\theta) \tag{4}$$

$$\mathcal{L}_F(\theta)=\frac{1}{N_F}\sum_{i=1}^{N_F}\left\|\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(x_F^i,t_F^i;\theta)-\mathcal{N}[\hat{u}(x_F^i,t_F^i;\theta)]\right\|^2 \tag{5}$$

$$\mathcal{L}_B(\theta)=\frac{1}{N_B}\sum_{j=1}^{N_B}\left\|\mathcal{B}[\hat{u}(x_B^j,t_B^j;\theta)]\right\|^2 \tag{6}$$

$$\mathcal{L}_I(\theta)=\frac{1}{N_I}\sum_{k=1}^{N_I}\left\|\hat{u}(x_I^k,0;\theta)-u_0(x_I^k)\right\|^2 \tag{7}$$

其中: θ为神经网络参数; $\hat{u}(x,t;\theta)$为 PINN 的预测解; x_F^i, x_B^j, x_I^k和t_F^i, t_B^j分别为空间和时间的采样点; 上标i, j, k为第i, j, k个采样点; N_F, N_B和N_I为采样点的数量; $\mathcal{L}_F(\theta)$, $\mathcal{L}_B(\theta)$, $\mathcal{L}_I(\theta)$分别表示 PDE、边界条件和初始条件的损失项; λ_F, λ_B, λ_I为相应损失项的权重系数; 下标 F, B, I 分别为偏微分方程项、边界条件、初始条件。通过损失函数$\mathcal{L}(\theta)$最小化可获得 PDE 的 PINN 解, 其求解架构如图 1。

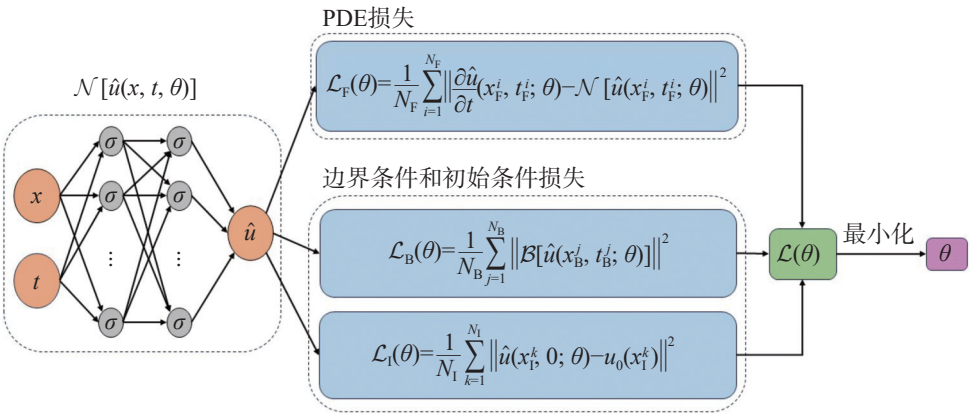

图1 连续型 PINN 构架示意图

Fig. 1 Schematic diagram of continuous PINN architecture

1.1.2 离散型架构

然而, 连续型 PINN 未能考虑时间因果关系, 其训练过程往往过度关注后期时间点的解, 导致计算结果失真。相比之下, 离散型 PINN通过引入时间离散化策略 (如欧拉法、Runge–Kutta 法[21] 等) 能有效保持时间因果性, 在长时积分中展现出显著优势。故文中采用基于 RK 方法的 RK–PINN 框架[7] 方案, 将时间域离散为序列化时间步, 通过多步迭代提升解的精度和稳定性。这种离散化方法不仅能严格遵循时间因果关系, 更能准确捕捉线性 PDE 解的动态演化特征。

当求解具有周期性边界条件的一维 PDE 时, 待求解的系统可表示为:

$$u_t=\mathcal{N}[u(x,t)] \tag{8}$$

$$u(x_0,t)=u(x_n,t) \tag{9}$$

$$u(x,0)=u_0(x) \tag{10}$$

其中$x\in[x_0,x_n]$, x_0和x_n表示周期性边界的端点, $t\in[0,T]$。使用 RK–PINN 求解线性 PDE, 可通过q阶 RK 法对线性 PDE 进行离散化, 并得到表达式[19]:

$$\begin{aligned}
u(x,t_0+\Delta t\cdot c_1)&=u(x,t_0)+\Delta t\sum_{j=1}^{q}a_{1j}\mathcal{N}[u(x,t_0+\Delta t\cdot c_j)]\\
u(x,t_0+\Delta t\cdot c_2)&=u(x,t_0)+\Delta t\sum_{j=1}^{q}a_{2j}\mathcal{N}[u(x,t_0+\Delta t\cdot c_j)]\\
&\vdots\\
u(x,t_0+\Delta t\cdot c_q)&=u(x,t_0)+\Delta t\sum_{j=1}^{q}a_{qj}\mathcal{N}[u(x,t_0+\Delta t\cdot c_j)]\\
u(x,t_0+\Delta t)&=u(x,t_0)+\Delta t\sum_{j=1}^{q}b_j\mathcal{N}[u(x,t_0+\Delta t\cdot c_j)]
\end{aligned} \tag{11}$$

式中: Δt为时间步长; $u(x,t_0)$为t_0时刻的已知解; $u(x,t_0+\Delta t)$为$t_0+\Delta t$时刻的未知解; a_{ij}, b_j, c_j为 RK 法中的参数, 可由 Butcher 表[19] 查询, 其中$i=1,2,\cdots,q$。为便于理解, 式 (11) 可重新整理为:

$$\hat{u}_0^{i,j}(x)=\hat{u}(x,t_0+\Delta t\cdot c_i)-\Delta t\sum_{j=1}^{q}a_{ij}\mathcal{N}[\hat{u}(x,t_0+\Delta t\cdot c_j)] \tag{12}$$

$$\hat{u}_0^{i,q+1}(x)=\hat{u}(x,t_0+\Delta t)-\Delta t\sum_{j=1}^{q}b_j\mathcal{N}[u(x,t_0+\Delta t\cdot c_j)] \tag{13}$$

采用上述策略构建的神经网络具有 q+1 个输出层, 其中第 q+1 个输出对应 RK–PINN 的预测解。

基于时间离散化特性, 损失函数可简化为[19]:

$$\mathcal{L}(\theta)=\lambda_F\mathcal{L}_F(\theta)+\lambda_B\mathcal{L}_B(\theta) \tag{14}$$

$$\mathcal{L}_F(\theta)=\frac{1}{N_F}\sum_{i=1}^{N_F}\sum_{j=1}^{q+1}\left\|\hat{u}_0^j(x)-\hat{u}_0^{i,j}(x)\right\|^2 \tag{15}$$

$$\mathcal{L}_B(\theta)=\frac{1}{q+1}\sum_{j=1}^{q+1}\left\|\hat{u}^j(x_0)-\hat{u}^j(x_n)\right\|^2 \tag{16}$$

其中$\hat{u}_0^i$, $\hat{u}_0^{i,j}$分别为$t=t_0$时刻的解析解$u(x,t_0)$和神经网络预测解。通过优化权重系数组合并最小化总损失函数$\mathcal{L}(\theta)$可获得满足精度要求的数值解$\hat{u}(x,t+\Delta t)$。该求解过程使 RK–PINN 能够严格遵循时间演化规律, 逐步推进求解, 最终实现高精度的长时积分目标。

1.2　热启动

在 RK–PINN 框架中, u^s和u^{s+1}分别表示第s和第$s+1$时间步的数值解, 其中u^s已知, u^{s+1}为待求解。一般而言, 随时间步长Δt的减小, 相邻时间步解 (u^s和u^{s+1}) 之间的差异会减小。因此, 当Δt足够小时, 可将前一步中训练获得的u^s神经网络参数θ_s作为待训练参数θ_{s+1}的初始值, 从而加快训练收敛过程, 该策略在文献 [20] 中已得到理论验证。基于此, 本研究在 RK–PINN 长时积分过程中引入参数热启动机制, 具体实现流程如图 2。

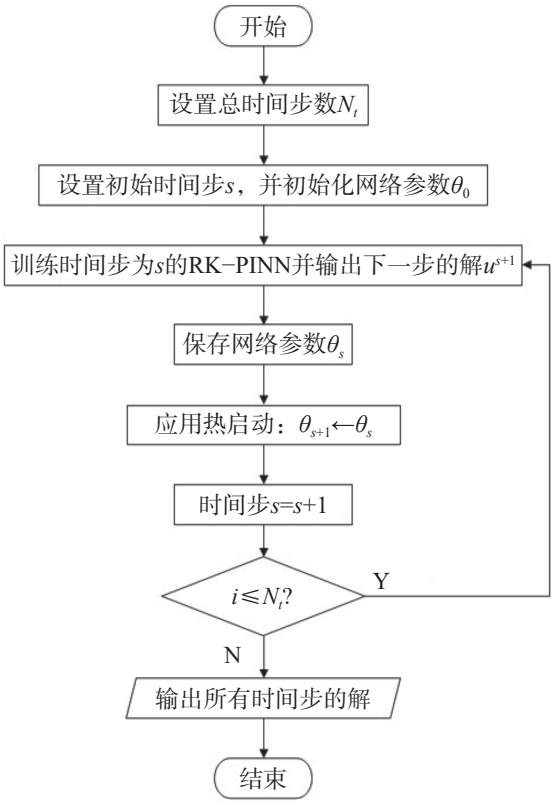

图2　热启动加速 RK–PINN 训练过程的流程图

Fig. 2　Flowchart of warm-start accelerated RK–PINN training process

在 RK–PINN 实现过程中, 设定总时间步数$N_t=T/\Delta t$, 并初始化时间步s的网络参数θ_0, 其中T为总的计算时长; 针对当前时间步s训练 RK–PINN 模型, 获得该时间步的预测解u^{s+1}; 在完成每个时间步的计算后, 系统会保存当前时间步s的网络参数θ_s, 作为下一步的神经网络的初始化参数, 即热启动策略[22]。通过循环迭代上述过程, 当时间步依次递增直至$s(s>N_t)$时, 即可输出完整时间序列的数值解。

另一方面, 在科学计算领域, 特别是针对复杂模型的长时程模拟, 采用双精度 (float64) 计算[23−24]能够显著减少舍入误差, 确保计算结果的可靠性和准确性。然而, L–BFGS–B 优化器常默认采用单精度 (float32) 来设置梯度容差和变化容差等参数, 当其处理敏感参数更新时, 这种精度限制会导致显著的数值误差。为了能够同时在长时积分过程中保持较高的计算精度, 文中采用双精度 (float64) 训练 RK–PINN 模型。

2　数值实验结果与分析

为验证融合热启动和双精度计算的改进型 RK–PINN 方法在长时积分任务中的性能表现, 采用 PyCharm 软件基于 TensorFlow 深度学习框架进行数值实验。网络模型采用 tanh 作为激活函数, 并结合 Adam 优化器和 L–BFGS–B 优化器的混合策略[7], 同时引入自适应学习率策略。实验分为两个阶段: 首先针对一维对流方程设计 3 种不同边界条件权重的对比算例, 评估热启动方案对计算效率的提升效果及边界条件权重系数的影响规律; 在此基础上, 选取最优参数配置的对流方程和典型波动方程作为测试案例, 考察双精度计算对长时积分精度和数值稳定性的改善效果。

2.1　对流方程

对流方程作为典型的双曲型线性 PDE, 可准确描述流体运动中物理量的输运特性, 其控制方程及相应的初始条件与边界条件表示如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\beta\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{17}$$

$$u(x,0)=\sin x \tag{18}$$

$$u(0,t)=u(2\pi,t) \tag{19}$$

其中$t\in[0,T]$, $x\in[0,2\pi]$, β为对流系数。方程 (17) 的精确解可表示为:

$$u=\sin(x-\beta t) \tag{20}$$

采用 RK–PINN 求解对流方程时, 为评估数值解精度, 计算$t=t'$时的相对误差 e, 公式如下[7]:

$$e=\frac{\sum_m \|u(x^m,t')-\hat{u}(x^m,t')\|^2}{\sum_m \|u(x^m,t')\|^2} \tag{21}$$

其中: x^m为空间中的第m个采样点; u和$\hat{u}$分别为精确解和预测解。

为评估热启动方案对 RK–PINN 性能的实际影响, 设计三组算例对比实验: 标准 RK–PINN; 热启动 RK–PINN; 热启动结合边界权重优化的 RK–PINN。设置$T=1.0$, $\Delta t=0.2$, $q=100$, 隐藏层层数为 4, 每层神经元数量为 100, Adam 和 L−BFGS−B 优化器的迭代步数分别为 2 000, 20 000, 通过最小化式 (14) 中的损失函数进行求解, 三组算例的相对误差和计算时间随对流系数 (β) 的变化规律分别如图 3, 4 所示。

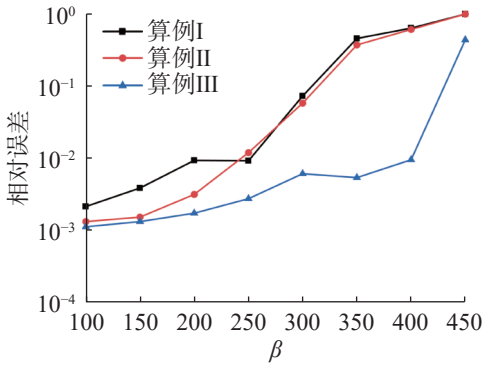

图3 三组算例下数值解相对误差随β的变化规律

Fig. 3 Variation of numerical solution relative error with β for three test cases

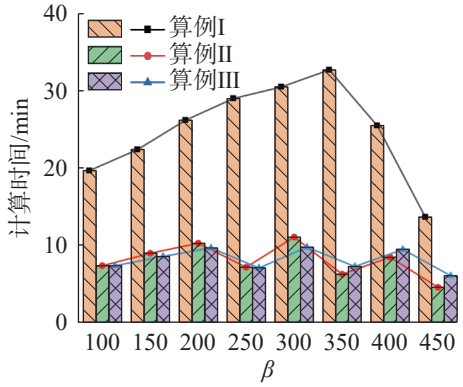

图4 三组算例下计算时间随β的变化规律

Fig. 4 Variation of calculation time with β for three test cases

算例 I 表示仅采用 RK–PINN 求解对流方程。图 3, 4 表明: 随对流系数 (β) 的增大, 数值解相对误差呈上升趋势, 这是由于时间步长未随对流系数增加而相应减小导致的数值困难; 而计算时间基本不受对流系数变化影响。

为提升 RK–PINN 的训练效率, 在算例 I 的基础上引入热启动方案构建算例 II, 如图 3 所示: 算例 II 的计算精度较算例 I 获得一定提升, 同时显著降低了计算资源消耗; 然而随着对流系数的增大, 该方案仍表现出误差逐渐累积的现象。

在 PINN 框架中, 通过合理配置损失项的权重系数可有效增强各约束条件在优化过程中的作用强度[25−26], 促使模型更严格地满足各类边界条件, 从而提升整体精度。基于此, 算例 III 在算例 II 热启动方案的基础上进一步优化边界条件权重, 该调整仅通过重新平衡边界损失与方程损失的权重关系来实现, 既保持了原有网络结构和优化目标函数不变, 又避免了额外计算开销的增加。为确保边界条件得到充分优化, 文中基于数值实验结果对边界权重 (设置边界条件权重$\lambda_B=10$) 进行针对性配置, 重点协调边界约束与方程残差之间的平衡关系。如图 3, 4 所示: 边界条件权重为 10 时, 计算精度明显改善而耗时增加有限。虽然该权重效果显著, 但人工调整参数难以获得最优解且可解释性不足。为此, 采用硬约束方法[27] 替代手动权重选择, 既保证计算效率又增强模型的理论严谨性。

综合实验结果表明: 热启动方案可显著降低计算成本, 而边界条件权重的优化设置可显著提高 RK–PINN 的计算精度。基于此, 采用算例 III 的优化配置 (隐藏层 4 层、每层 100 个神经元) 开展对流方程长时程积分实验。具体设置为$\beta=500$, $T=20.0$, $\Delta t=0.1$, $q=100$, Adam 和 L–BFGS–B 优化器的迭代步数分别为 2 000 和 20 000。通过最小化式 (14) 的复合损失函数求解, 结果如表 1。由表 1 可知: $T=20.0$时, 单精度 (float32) 计算时的相对误差为 15.60%, 而采用双精度 (float64) 计算后的相对误差显著降至 1.16%, 验证了 float32 在长时积分中会产生不可接受的累积误差, 而 float64 能有效保持计算精度, 其误差控制能力提升约 13 倍。

表 1 单双精度计算条件下对流方程求解的误差与耗时对比分析

Tab. 1 Performance comparison of convection equation solutions under single vs double-precision computing

算例 III	相对误差/%						计算时间/h
	$T=0.1$	$T=4.0$	$T=8.0$	$T=12.0$	$T=16.0$	$T=20.0$	
float32	0.17	1.95	2.85	4.91	9.41	15.60	4.2
float64	0.09	0.42	0.66	0.64	1.04	1.16	30.4

表 1 数据还显示, 双精度 (float64)RK–PINN 使计算精度提升约 13 倍, 但计算时间增至单精度 (float32) 的 7 倍。为优化效率, 需开发并行计算或改进网络架构等策略以平衡精度与效率。

2.2　波动方程

波动方程作为另一类重要的双曲型线性 PDE, 可精确描述声波、光波与水波等波动现象的传播机制, 在物理建模与工程仿真中具有重要应用价值, 其控制方程表述为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{22}$$

其中: $x \in [0,\pi]$; $t \in [0,T]$; c为波的传播速度。该方程的初始条件和边界条件可表述为:

$$\begin{aligned} &u(x,0) = \sin x \\ &u_t(x,0) = \sin x \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

理论上u的解析解为:

$$u = (\sin t + \cos t)\sin x \tag{24}$$

为方便起见, 定义$v = u_t$, 则方程 (22)~(23) 可表示为:

$$\begin{aligned} &v = u_t \\ &v_t = c^2 u_{xx} \\ &u(x,0) = \sin x \\ &v(x,0) = \sin x \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

方程 (25) 在数学上与方程组 (22)~(23) 完全等价。数值实验证实, 当对该方程施加附加物理约束时计算精度可获得显著提升。通过分析方程 (25) 的结构特征可以发现:

$$v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \tag{26}$$

方程 (26) 可增强物理约束条件, 为更清晰地表达数学模型, 将耦合方程组 (25)~(26) 重新表述为如下形式:

$$\begin{aligned} &v = u_t \\ &v_t = c^2 u_{xx} \\ &u(x,0) = \sin x \\ &v(x,0) = \sin x \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ &v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

为验证附加约束条件的有效性, 采用 2.1 节算例Ⅲ的优化配置 (隐藏层 4 层、每层 100 个神经元) 对波动方程进行长时积分仿真实验。具体设置为 $T = 500\pi$, $c = 1$, $\Delta t = T/50$, $q = 100$, $\lambda_B = 10$。通过最小化式 (14) 的复合损失函数求解, 数值计算结果如表 2。表 2 数据显示: 采用 float32 计算且未引入边界约束 (v) 时, $T = 500\pi$ 时刻的相对误差达 5.85%; 引入边界约束 (v) 后相对误差降至 1.07%, 精度提升约 5 倍且未显著增加计算耗时; 进一步采用 float64 计算可将误差降至 0.10%, 但计算时间从 1.1 h 增至 9.4 h。这表明边界约束能有效提升精度而不影响效率, 而双精度计算虽可大幅提高精度 (约 10 倍) 却需付出 8.5 倍的时间代价。

表 2　波动方程求解在附加约束条件下的性能对比

Tab. 2　Performance comparison of wave equation solutions with additional constraints

算例Ⅲ	相对误差/%					计算时间/h
	$T = 100\pi$	$T = 200\pi$	$T = 300\pi$	$T = 400\pi$	$T = 500\pi$	
无v边界约束(float32)	0.88	0.11	1.38	3.97	5.85	1.0
有v边界约束(float32)	0.06	0.18	0.60	0.85	1.07	1.1
有v边界约束(float64)	0.08	0.10	0.10	0.10	0.10	9.4

综上可得出: 边界约束条件的引入与双精度计算的结合使 RK–PINN 的计算精度获得显著提升, 但同时导致计算耗时增加。在实际工程应用中, 需结合具体需求选择合适的计算方案。

3　结论

提出一种融合热启动机制与双精度计算的改进型 RK–PINN 方法, 通过对对流方程和波动方程的数值实验验证了在长时积分中的有效性。实验结果表明: 热启动方案可使计算效率提升 2~3 倍并带来约 20% 的精度改善; 双精度计算虽增加 7~8 倍耗时, 但能提高约 10 倍的精度, 对于高精度需求场景不可或缺; 二者结合实现了高精度长时积分。此外, 边界约束的引入可额外提升 5~6 倍精度且基本不增加计算开销, 证实了物理约束在 PINN 中的重要性。该方法为线性 PDE 长时积分提供了兼顾效率与精度的新思路, 展现出良好的应用前景。

然而, 本文研究仍存在一定的局限与改进之处: 一方面, 边界权重采用经验设置, 后续研究将引入硬约束方案提升方法鲁棒性, 并通过算法优化和并行计算技术 (如 GPU 加速) 来降低计算成本; 另一方面, 实验仅针对双曲型方程, 未来可拓展至抛物型 (如热

方程) 和椭圆形 (如泊松方程) 等更多 PDE 类型, 以全面验证方法的普适性。这些改进将可进一步提升 RK–PINN 在工程实际问题中的适用性。

参考文献:

[1] ALI SHAN S, SAEED U, SALEEM H. Coupled nonlinear drift and IAWs in streaming O—H plasma of upper ionosphere[J]. Physics of Plasmas, 2024, 31(3):032104.

[2] 黄浩, 王良龙. 时滞依赖于状态的脉冲中立型随机发展积分微分方程温和解的存在性 [J]. 安徽工业大学学报 (自然科学版), 2019, 36(1):97−102.
HUANG H, WANG L L. Existence of mild solutions for impulsive neutral stochastic evolution integro-differential equations with state-dependent delay[J]. Journal of Anhui University of Technology (Natural Science), 2019, 36(1):97−102.

[3] ZHANG W, WANG S, MA Z W. Influence of helical external driven current on nonlinear resistive tearing mode evolution and saturation in tokamaks[J]. Physics of Plasmas, 2017, 24(6):062510.

[4] HOWELL E C, SOVINEC C R. Solving the Grad–Shafranov equation with spectral elements[J]. Computer Physics Communications, 2014, 185(5):1415−1421.

[5] E W, YU B. The deep ritz method: a deep learning-based numerical algorithm for solving variational problems[J]. Communications in Mathematics and Statistics, 2018, 6(1):1−12.

[6] SIRIGNANO J, SPILIOPOULOS K. DGM: a deep learning algorithm for solving partial differential equations[J]. Journal of Computational Physics, 2018, 375:1339−1364.

[7] RAISSI M, PERDIKARIS P, KARNIADAKIS G E. Physics-informed neural networks: a deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations[J]. Journal of Computational Physics, 2019, 378:686−707.

[8] GROSSMANN T G, KOMOROWSKA U J, LATZ J, et al. Can physics-informed neural networks beat the finite element method?[J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 2024, 89(1):143−174.

[9] HAN J Q, ZHANG L F, WEINAN E. Solving many-electron Schrödinger equation using deep neural networks[J]. Journal of Computational Physics, 2019, 399:108929.

[10] 苟志勇, 蒋权, 黄文清. 并行重采样物理信息神经网络: 用于低雷诺数下不可压缩流体流动分析 [J/OL].计算力学学报, (2024−07−15). https://link.cnki.net/urlid/21.1373.O3.20240711.1851.002.
GOU Z Y, JIANG Q, HUANG W Q. Parallel resampling physical information neural network for fluid dynamics analysis at low Reynolds number[J].Chinese Journal of Computational Mechanics, (2024−07−15). https://link.cnki.net/urlid/21.1373.O3.20240711.1851.002.

[11] KISSAS G, YANG Y B, HWUANG E, et al. Machine learning in cardiovascular flows modeling: predicting arterial blood pressure from non-invasive 4D flow MRI data using physics-informed neural networks[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 358:112623.

[12] 付军泉, 钟伯文, 钟运琴, 等. 基于物理信息神经网络的飞机气动参数辨识方法 [J]. 空气动力学学报, 2023, 41(9):30−37.
FU J Q, ZHONG B W, ZHONG Y Q, et al. A physics informed neural network based method for aircraft aerodynamic parameter identification[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2023, 41(9):30−37.

[13] 张世红, 张弛, 王柏森. 物理信息神经网络代理求解燃烧反应动力学 [J]. 工程热物理学报, 2024, 45(6):1872−1881.
ZHANG S H, ZHANG C, WANG B S. A physics-informed neural network for solving combustion reaction kinetics[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2024, 45(6):1872−1881.

[14] WANG S F, SANKARAN S, PERDIKARIS P. Respecting causality for training physics-informed neural networks[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2024, 421:116813.

[15] WANG B, JIANG Y L. Optimal convergence and long-time conservation of exponential integration for Schrödinger equations in a normal or highly oscillatory regime[J]. Journal of Scientific Computing, 2022, 90(3):93.

[16] 游波, 岑理相. 非马尔科夫耗散系统长时演化下的极限环振荡现象 [J]. 物理学报, 2015, 64(21):177−182.
YOU B, CEN L X. Phenomena of limit cycle oscillations for non-Markovian dissipative systems undergoing long-time evolution[J]. Acta Physica Sinica, 2015, 64(21):177−182.

[17] MENG X H, LI Z, ZHANG D K, et al. PPINN: parareal physics-informed neural network for time-dependent PDEs[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 370:113250.

[18] WANG S F, PERDIKARIS P. Long-time integration of parametric evolution equations with physics-informed DeepONets[J]. Journal of Computational Physics, 2023, 475:111855.

[19] ZHONG L L, WU B Y, WANG Y F. Low-temperature plasma simulation based on physics-informed neural networks: frameworks and preliminary applications[J].

Physics of Fluids, 2022, 34(8):087116.

[20] CHEN S Q, SHAN B, LI Y. Efficient discrete physics-informed neural networks for addressing evolutionary partial differential equations[EB/OL]. 2023:2312.14608. https://arxiv.org/abs/2312.14608v1.

[21] JACKSON K R, BUTCHER J C. The numerical analysis of ordinary differential equations Runge−Kutta and general linear methods[J]. Mathematics of Computation, 1988, 51(183):377.

[22] ZHOU M, HAN J Q, RACHH M, et al. A neural network warm-start approach for the inverse acoustic obstacle scattering problem[J]. Journal of Computational Physics, 2023, 490:112341.

[23] 朱永超, 万晓云, 周保兴. 基于双精度与四精度的重力场解算精度分析 [J]. 大地测量与地球动力学, 2020, 40(1):94−97, 110.
ZHU Y C, WAN X Y, ZHOU B X. Accuracy analysis of the double precision and quadruple precision gravity field solution[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2020, 40(1):94−97, 110.

[24] 金洁茜, 谢和虎, 杜配冰, 等. 基于双倍双精度施密特正交化方法的 QR 分解算法 [J]. 计算机科学, 2023, 50(6): 45−51.
JIN J X, XIE H H, DU P B, et al. QR decomposition based on double-double precision gram-schmidt orthogonalization method[J]. Computer Science, 2023, 50(6):45−51.

[25] WANG S F, TENG Y J, PERDIKARIS P. Understanding and mitigating gradient flow pathologies in physics-informed neural networks[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2021, 43(5):A3055−A3081.

[26] WANG S F, YU X L, PERDIKARIS P. When and why PINNs fail to train: a neural tangent kernel perspective[J]. Journal of Computational Physics, 2022, 449:110768.

[27] 曹嵘晖, 唐卓, 左知微, 等. 面向机器学习的分布式并行计算关键技术及应用 [J]. 智能系统学报, 2021, 16(5): 919−930.
CAO R H, TANG Z, ZUO Z W, et al. Key technologies and applications of distributed parallel computing for machine learning[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2021, 16(5):919−930.

责任编辑: 何莉

(上接第 409 页)

[15] 牛旭, 张志安. 改进 RRT 的复杂障碍物环境路径规划算法研究 [J]. 电子设计工程, 2024, 32(8):162−167,172.
NIU X, ZHANG Z A. Research on path planning algorithm for multi-obstacle environment based on improved RRT[J]. Electronic Design Engineering, 2024, 32(8):162−167,172.

[16] 朱永浩, 李丹, 龚旭, 等. 基于改进 RRT 算法的六自由度机械臂路径规划 [J]. 安徽工业大学学报 (自然科学版), 2024, 41(2):173−181.
ZHU Y H, LI D, GONG X, et al. Path planning of 6-DOF manipulator based on improved RRT algorithm[J]. Journal of Anhui University of Technology (Natural Science), 2024, 41(2):173−181.

[17] DUAN J J, WANG B C, CUI K K, et al. Path planning based on NURBS for hyper-redundant manipulator used in narrow space[J]. Applied Sciences, 2022, 12(3):1314.

[18] 吴凡, 张华, 童以, 等. 多传感器融合的温室机器人自主导航系统设计 [J]. 安徽科技学院学报, 2023, 37(6): 96−102.
WU F, ZHANG H, TONG Y, et al. Design of autonomous navigation system for greenhouse robot based on multi sensor fusion[J]. Journal of Anhui Science and Technology University, 2023, 37(6):96−102.

[19] 陈志澜, 唐昊阳. 改进 RRT−Connect 算法的机器人路径规划研究 [J]. 计算机科学与探索, 2025, 19(2):396−405.
CHEN Z L, TANG H Y. Research on robot path planning based on improved RRT−Connect algorithm[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2025, 19(2):396−405.

[20] 赵卫东, 唐顾杰, 宋江一. 基于改进 JPS 与三次 B 样条插值的路径规划算法 [J]. 安徽工业大学学报 (自然科学版), 2022, 39(2):189−195.
ZHAO W D, TANG G J, SONG J Y. Path planning algorithm based on improved JPS and cubic B-spline interpolation[J]. Journal of Anhui University of Technology (Natural Science), 2022, 39(2):189−195.

[21] FENG W, FAN J H, LIU Q Q, et al. Three-dimensional reconstruction of light field based on cubic B-spline curve fitting[J]. Optics Communications, 2024, 552:130041.

[22] LI K Y, LU Y G, ZHANG Y C. Dynamic obstacle avoidance path planning of UAV Based on improved APF[C]//2020 5th International Conference on Communication, Image and Signal Processing. Chengdu, China: IEEE, 2020:159−163.

[23] LIN X, YU Y J, CHEN S Z, et al. An improved APF method for complex and dynamic obstacles' avoidance[J]. Unmanned Systems, 2023, 11(2):175−189.

责任编辑: 何莉