山东大学学报(理学版)2026年5月 第61卷 第5期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.61, No.5, 2026 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2026)05-0114-09 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2025.270

实参软集理论及其与模糊集之间的联系

王兆浩[1,2],李智荣[1],董竹韵[1]
(1.山西师范大学数学科学学院, 山西 太原 030031; 2.山西师范大学密码学与数据安全山西省重点实验室, 山西 太原 030031)

摘要:针对软集理论中因不同软集的参数集互异而限制软集间运算与应用的问题,本文提出实参软集概念及运算法则,通过补充无效参数统一参数集,解决软集间运算受限的问题。证明模糊集可表述为一类特殊实参软集(划分软集),广义犹豫模糊集与实参软集之间存在一一对应关系,该对应关系既为实参软集理论的进一步扩展提供方向,也为犹豫模糊集的研究提供了新的视角。

关键词:实参软集;软集;模糊集;犹豫模糊集
中图分类号:TP181 **文献标志码**:A
引用格式:王兆浩,李智荣,董竹韵. 实参软集理论及其与模糊集之间的联系[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(5):114-122,138.

The theory of real parameter soft sets and its connection with fuzzy sets

WANG Zhaohao[1,2], LI Zhirong[1], DONG Zhuyun[1]
(1. School of Mathematical Sciences, Shanxi Normal University, Taiyuan 030031, Shanxi, China; 2. Shanxi Key Laboratory of Cryptography and Data Security, Shanxi Normal University, Taiyuan 030031, Shanxi, China)

Abstract: In response to the issue that the operations and application research among soft sets are restricted because of the different parameter sets of distinct soft sets in the soft set theory. The concept of a real-parameter soft set along with its operational rules is proposed. By supplementing invalid parameters to unify the parameter sets, the problem of limited inter-soft-set operations is resolved. Furthermore, the paper shows that fuzzy sets can be expressed as a special type of real-parameter soft set—partition soft sets. There exists a one-to-one correspondence between generalized hesitant fuzzy sets and real-parameter soft sets. This correspondence not only provides direction for the further extension of real-parameter soft set theory but also offers a new perspective for research on hesitant fuzzy sets.

Key words: real-parameter soft set; soft set; fuzzy set; hesitant fuzzy set

0 引言

Zadeh[1]通过扩展经典集合的概念引入模糊集,为处理不确定性数据提供有效工具。然而,模糊集的局限在于其隶属度的选择往往具有主观性,无法确定最优隶属度值。相比之下,犹豫模糊集[2]突破单一隶属度的限制,允许一个对象对应多个可能的隶属度值,拓展模糊集理论的应用范围[3]。软集[4]作为模糊集理论的另一个重要拓展,从参数化的角度(而非传统隶属函数),为研究不确定性问题提供新方法。

许多学者对软集与模糊集理论之间的整合问题进行了探讨。Roy 等[5]将模糊集与软集融合,提出模糊软集的概念;Sanl1baba[6]研究全模糊软集相关理论及其应用;Elamir 等[7]将模糊软集应用于新冠肺炎防控决策研究中;进一步地,Zulqarnain 等[8]构建毕达哥拉斯模糊软集模型并发展相关理论;Sahoo 等[9]基于毕达哥拉斯模糊软集提出一种群决策方法,应用于材料选择问题;雷理香等[10]将直觉模糊软集应用于逻辑推理;

收稿日期:2025-08-30; **网络出版时间**:2026-03-12
基金项目:山西省研究生教育创新计划资助项目(2024KY449)
第一作者:王兆浩(1979—),男,副教授,硕士生导师,博士,主要研究方向为模糊决策分析、粒计算. E-mail:nysywzh@163.com

此外,还有一些新型模糊软集模型相继被提出[11]。这些研究不仅推动模糊集理论的发展,也丰富了软集理论体系。

现有研究主要集中构建模糊集与软集的交叉融合模型,然而,由于模糊集和软集本身是自成体系的独立理论,探究它们之间的内在关联而不应局限于融合模型。本文为克服不同软集参数集不一致所带来的困难,提出实参软集的概念,并基于该概念建立模糊集与软集之间的理论联系。

1　软集的基本概念

文中 U 表示非空集合,$P(U)$ 表示 U 的幂集。这部分回顾与软集相关的概念。

定义 1 (软集)[12]　设 U 为非空集合,E 是参数集且 $A\subseteq E$,则称序对 (F,A) 为 U 上的一个软集,其中 F 是一个由 A 到 $P(U)$ 的映射。

关于软集之间包含关系的定义存在多种方式,下文介绍 2 种常见的定义形式。

定义 2 (软 F-包含)[13]　设 U 为非空集合,(F_1,A) 与 (F_2,B) 是 U 上的软集,称 (F_1,A) 软 F-包含于 (F_2,B),如果 $A\subseteq B$ 且 $\forall\lambda\in A$,总有 $F_1(\lambda)\subseteq F_2(\lambda)$ 成立,记作 $(F_1,A)\subseteq_F(F_2,B)$。而且若 $(F_1,A)\subseteq_F(F_2,B)$ 且 $(F_2,B)\subseteq_F(F_1,A)$,则称 (F_1,A) 与 (F_2,B) 是软 F-相等,记作 $(F_1,A)=_F(F_2,B)$。

定义 3 (软 J-包含)[14]　设 U 为非空集合,(F_1,A) 与 (F_2,B) 是 U 上的两个软集,称 (F_1,A) 软 J-包含于 (F_2,B),如果 $\forall\lambda\in A$, $\exists\alpha\in B$ 使得 $F_1(\lambda)\subseteq F_2(\alpha)$,记作 $(F_1,A)\subseteq_J(F_2,B)$。而且若 $(F_1,A)\subseteq_J(F_2,B)$ 且 $(F_2,B)\subseteq_J(F_1,A)$,则称 (F_1,A) 与 (F_2,B) 是软 J-相等,记作 $(F_1,A)=_J(F_2,B)$。

定义 4 (并)[15]　设 U 为非空集合,(F_1,A) 与 (F_2,B) 是 U 上的两个软集,称 (H,C) 为软集 (F_1,A) 与 (F_2,B) 的并,其中,$C=A\cup B$, $\forall\lambda\in C$,

$$H(\lambda)=\begin{cases}F_1(\lambda), & \lambda\in A-B,\\ F_2(\lambda), & \lambda\in B-A,\\ F_1(\lambda)\cup F_2(\lambda), & \lambda\in A\cap B。\end{cases}$$

记作 $(F_1,A)\tilde{\cup}(F_2,B)=(H,C)$。

定义 5 (交)[15]　设 U 为非空集合,(F_1,A) 与 (F_2,B) 是 U 上的软集,称 (H,C) 为软集 (F_1,A) 与 (F_2,B) 的交,其中,$C=A\cap B$, $\forall\lambda\in C$, $H(\lambda)=F_1(\lambda)$ 或 $F_2(\lambda)$,(当 $F_1(\lambda)=F_2(\lambda)$ 时),记作 $(F_1,A)\tilde{\cap}(F_2,B)=(H,C)$。

由定义 4、5 可以看出,在定义软集之间的交、并运算时,往往须要引入新的参数集合 C,并且映射 H 的表达式结构较为复杂,它未能直观体现与 F_1 和 F_2 之间的关系。这些问题使得软集交并运算的定义显得不够直观和自然。因此,构建一个具有统一参数集的软集理论是十分必要的。考虑到参数通常可映射至实数集,本文拟建立以实数为参数集的软集理论,即软集理论。

2　实参软集的基本运算

2.1　实参软集与划分软集

本节引入实参软集的概念及其包含关系,并进一步探讨一类特殊的实参软集——划分软集。由于不同软集具有不同的参数集,这里引入无效参数的定义。

定义 6 (无效参数)　设 U 为非空集合,E 是参数集,(F,A) 为 U 上的一个软集,对 $\lambda\in A$,若 $F(\lambda)=\varnothing$,则称 λ 为一个无效参数。

本文仅讨论参数集为 $[0,1]$ 的软集。由于对于任意的 $A\subseteq[0,1]$,映射 $F:A\rightarrow P(U)$ 总可以被扩展为 $[0,1]$ 到 $P(U)$ 上的映射:

$$F'(\lambda)=\begin{cases}F(\lambda), & \lambda\in A,\\ \varnothing, & 其他。\end{cases}\tag{1}$$

即通过补充一些无效参数,总可将 $A\rightarrow P(U)$ 的映射扩展为 $[0,1]\rightarrow P(U)$ 的映射。

反之,若 F 是一个由[0,1]到 $P(U)$ 的映射,记 $A=\{\lambda \mid F(\lambda)\neq\varnothing\}$,则根据定义1,$(F,A)$ 和 $(F,[0,1])$ 都是软集。由于无效参数在决策中不提供任何信息,因此不影响数据处理的结果,这说明软集 (F,A) 和 $(F,[0,1])$ 是等效的。基于这一等效性,我们提出如下实参软集的定义。

定义 7 (实参软集) 设 U 为非空集合,[0,1]为参数集,映射 $F:[0,1]\to P(U)$,则称 $(F,[0,1])$ 为 U 上的一个实参软集。将 $(F,[0,1])$ 简记为 F,即称 F 为 U 上的一个实参软集。

注 1 设 $A\subseteq[0,1]$,软集 (F,A) 可被看作是一个实参软集 F^A,其中 F^A 的定义如式(1)所示,$\forall\lambda\in[0,1]$,即

$$F^A(\lambda)=\begin{cases}F(\lambda), & \lambda\in A,\\ \varnothing, & \lambda\notin A。\end{cases}$$

显然由 F^A 可得到软集 (F,A)。说明把软集 (F,A) 解读为实参软集 F^A 是合理的,因此本文将软集 (F,A) 与实参软集 F^A 理解为同一个对象。

根据注1容易验证:若软集 (F,A) 不含无效参数,则 (F,A) 与实参软集 F^A 可相互唯一确定,换言之,在忽略无效参数的前提下,软集 (F,A) 与实参软集 F^A 之间存在一一对应关系。

下面定义实参软集之间的包含关系。设 F 为 U 上的实参软集,对 $K\subseteq[0,1]$,记 $F(K)$ 为

$$F(K)=\bigcup_{\alpha\in K}F(\alpha)。\tag{2}$$

定义 8 (包含关系) 设 U 为非空集合,F_1 与 F_2 为 U 上的实参软集,若对任意 $\lambda\in[0,1]$,存在 $K\subseteq[\lambda,1]$ 使得 $F_1(\lambda)\subseteq F_2(K)$,则称实参软集 F_1 包含于 F_2,记作 $F_1\subseteq_R F_2$。

在定义8中,$F_1(\lambda)\subseteq F_2(K)$ 表示对于任意参数 λ,F_1 在 λ 下所描述的对象集,可以被 F_2 在参数集 $K\subseteq[\lambda,1]$ 内所描述的对象集覆盖,这比要求"在同一个 λ 下包含"(即 $F_1(\lambda)\subseteq F_2(\lambda)$)更为宽松,因此定义8给出的包含关系更广。此外,本文定义的包含关系与模糊集的包含关系之间存在深刻的内在联系。

注 2 若实参软集 F_1 与 F_2 满足条件 $\forall\lambda\in[0,1]$, $F_1(\lambda)\subseteq F_2(\lambda)$,自然地,则可记 $F_1\subseteq F_2$,即

$$F_1\subseteq F_2\Leftrightarrow\forall\lambda\in[0,1],\quad F_1(\lambda)\subseteq F_2(\lambda)。$$

性质 1 设 F_1、F_2 为 U 上的实参软集,若 $F_1\subseteq F_2$,则 $F_1\subseteq_R F_2$。

证明 由式(2)和定义8,性质1显然成立。

根据定义8得到实参软集包含关系的等价刻画。

定理 1 设 F_1、F_2 为 U 上的实参软集,那么 $F_1\subseteq_R F_2$ 的充要条件是对 $\forall\lambda\in[0,1]$,

$$F_1(\lambda)\subseteq F_2([\lambda,1])。$$

证明 由定义8结论显然。

由定义7可知,一个实参软集实际上是一个从[0,1]到 U 的映射,因此2个实参软集相等是指这2个映射相等,即

$$F_1=F_2\Leftrightarrow\forall\lambda\in[0,1],\quad F_1(\lambda)=F_2(\lambda)。\tag{3}$$

一般情况下,由 $F_1\subseteq_R F_2$ 且 $F_2\subseteq_R F_1$ 并不能推出 $F_1=F_2$ 的结论。下面例子就说明这一点。

例 1 设 $U_1=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$,实参软集 F_1' 与 F_2' 被定义为

$$F_1'(\lambda)=\begin{cases}\{x_1\}, & \lambda=0.1,\\ \{x_2,x_3\}, & \lambda=0.5,\\ U_1, & \lambda=1,\\ \varnothing, & \text{其他。}\end{cases}\quad F_2'(\lambda)=\begin{cases}\{x_2\}, & \lambda=0.1,\\ \{x_3\}, & \lambda=0.5,\\ U_1, & \lambda=1,\\ \varnothing, & \text{其他。}\end{cases}$$

显然 F_1' 与 F_2' 为 U_1 上的2个实参软集。根据式(2)可知,$\forall\lambda\in[0,1]$, $F_1'([\lambda,1])=F_2'([\lambda,1])=U_1$。因此,根据定理1,容易验证 $F_1'\subseteq_R F_2'$ 且 $F_2'\subseteq_R F_1'$ 是成立的,但 $F_1'\neq F_2'$。

例1说明 $F_1\subseteq_R F_2$ 且 $F_2\subseteq_R F_1$ 并不能推出 $F_1=F_2$。那么当 F_1 与 F_2 满足什么条件时,该结论成立?为此我们首先定义一类实参软集。

定义 9 (划分软集) 设 F 是 U 上的一个实参软集,若 $\bigcup_{\lambda\in[0,1]}F(\lambda)=U$ 且对任意 $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$,当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时,有 $F(\lambda_1)\cap F(\lambda_2)=\varnothing$,则称 F 为 U 上的一个划分软集。

当 F 是 U 上的一个划分软集时,集合 $\{F(\lambda)\mid\lambda\in[0,1]\}$ 并不一定是 U 的一个划分。因为 $\varnothing$ 可能是

$\{F(\lambda)\mid\lambda\in[0,1]\}$的元素,所以下面结论成立。

性质 2　若 F 是 U 上的一个划分软集,则$\{F(\lambda)\mid\lambda\in[0,1]\}-\{\varnothing\}$是 U 的一个划分。

证明　由定义 9 结论显然成立。

下面证明当 F_1、F_2 为 U 上的划分软集时,$F_1\subseteq_R F_2$ 且 $F_2\subseteq_R F_1$ 与 $F_1=F_2$ 彼此等价。

定理 2　设 F_1、F_2 为 U 上的划分软集,那么 $F_1=F_2$ 的充要条件是 $F_1\subseteq_R F_2$ 且 $F_2\subseteq_R F_1$。

证明　由式(3)和定义 8,必要性显然,下证充分性。假设 $F_1\neq F_2$,那么 $\exists\lambda_0\in[0,1]$,使得 $F_1(\lambda_0)\neq F_2(\lambda_0)$,因此 $F_2(\lambda_0)\nsubseteq F_1(\lambda_0)$或 $F_1(\lambda_0)\nsubseteq F_2(\lambda_0)$。假设 $F_2(\lambda_0)\nsubseteq F_1(\lambda_0)$,那么 $\exists x_0\in F_2(\lambda_0)$但 $x_0\notin F_1(\lambda_0)$。由 $F_2\subseteq_R F_1$ 和定理 1 可得 $F_2(\lambda_0)\subseteq F_1([\lambda_0,1])$,因此 $x_0\in F_1([\lambda_0,1])$。根据式(2)可知,$\exists\lambda'\in[\lambda_0,1]$,即 $\lambda'\geqslant\lambda_0$, $x_0\in F_1(\lambda')$。因为 $x_0\notin F_1(\lambda_0)$,所以 $F_1(\lambda_0)\neq F_1(\lambda')$,这说明 $\lambda'\neq\lambda_0$,即 $\lambda'>\lambda_0$。此外,再由 $F_1\subseteq_R F_2$ 和定理 1,可得 $F_1(\lambda')\subseteq F_2([\lambda',1])$。因此 $x_0\in F_2([\lambda',1])$。再根据式(2)可知,$\exists\lambda''\in[\lambda',1]$,即 $\lambda''\geqslant\lambda'>\lambda_0$, $x_0\in F_2(\lambda'')$,因此,$x_0\in F_2(\lambda_0)\cap F_2(\lambda'')\neq\varnothing$,且 $\lambda''\neq\lambda_0$, 这与 F_2 为 U 上的划分软集矛盾,同理可证 $F_1(\lambda_0)\nsubseteq F_2(\lambda_0)$也不成立。即证 $F_1=F_2$。充分性得证。

性质 3　若 F 为 U 上的划分软集,则对任意 $x\in U$,存在唯一的 $\lambda\in[0,1]$使得 $x\in F(\lambda)$。

证明　由定义 9,结论成立。

2.2　包含关系之间的比较

将定义 2、3 定义的软集包含关系转化为实参软集之间的包含关系。

注 3 符号说明　设 F_1 与 F_2 是实参软集,再由注 1 可知 F_1 与 F_2 为软集$(F_1,[0,1])$与$(F_2,[0,1])$。根据定义 2、3,$(F_1,[0,1])\subseteq_F(F_2,[0,1])$简记为 $F_1\subseteq_F F_2$, $(F_1,[0,1])\subseteq_J(F_2,[0,1])$简记为 $F_1\subseteq_J F_2$。

定理 3　设 F_1 与 F_2 为 U 上的实参软集,下列结论成立:

(1) $F_1\subseteq_F F_2\Leftrightarrow\forall\lambda\in[0,1]$, $F_1(\lambda)\subseteq F_2(\lambda)$。

(2) $F_1\subseteq_J F_2\Leftrightarrow\forall\lambda\in[0,1]$, $\exists\alpha\in[0,1]$, $F_1(\lambda)\subseteq F_2(\alpha)$。

证明　(1) 由注 1 和定义 2 结论是显然的。

(2) 由注 1 和定义 3 结论显然。

由注 2 和定理 3 可得下面推论。

推论 1　设 F_1 与 F_2 为 U 上的实参软集,那么 $F_1\subseteq_F F_2\Leftrightarrow F_1\subseteq F_2$。

定理 4　设(F_1,A)与(F_2,B)是 U 上的软集,且 $A\subseteq B$,那么$(F_1,A)\subseteq_F(F_2,B)$的充要条件是 $F_1^A\subseteq F_2^B$。

证明　先证必要性。设$(F_1,A)\subseteq_F(F_2,B)$,由定义 2,可知 $\forall\lambda\in A$, $F_1(\lambda)\subseteq F_2(\lambda)$。由式(1)可知,$\forall\lambda\in A$, $F_1^A(\lambda)\subseteq F_2^B(\lambda)$。再由式(1)知,对 $\forall\lambda\in[0,1]-A$, $F_1^A(\lambda)=\varnothing$,可得

$$\forall\lambda\in[0,1]-A,\quad F_1^A(\lambda)\subseteq F_2^B(\lambda)。$$

即证 $\forall\lambda\in[0,1]$, $F_1^A(\lambda)\subseteq F_2^B(\lambda)$,因此 $F_1^A\subseteq F_2^B$。必要性得证。充分性可直接由条件 $A\subseteq B$、$F_1^A\subseteq F_2^B$ 和定义 2 证得。

下述结论旨在阐明本文定义的包含关系(定义 8)与定义 2 给出的包含关系二者间的异同。

定理 5　设 F_1 与 F_2 为 U 上的实参软集,若 $F_1\subseteq_F F_2$,则 $F_1\subseteq_R F_2$。

证明　对 $\forall\lambda\in[0,1]$, $F_1\subseteq_F F_2$,由定理 3,可知 $F_1(\lambda)\subseteq F_2(\lambda)$,根据式(2)可知 $F_2(\lambda)\subseteq F_2([\lambda,1])$,因此 $F_1(\lambda)\subseteq F_2([\lambda,1])$。已经证明 $\forall\lambda\in[0,1]$, $F_1(\lambda)\subseteq F_2([\lambda,1])$,根据定理 1,即证 $F_1\subseteq_R F_2$。

定理 5 的逆命题不成立,如下例所示,这也表明本文提出的实参软集包含比 F-软包含更一般的概念。

例 2　在例 1 中,显然有 $F_1'(0.1)\nsubseteq F'_2(0.1)$,由定理 3,可得 $F_1'\nsubseteq_F F_2'$,但是,由例 1 可知 $F_1'\subseteq_R F_2'$是成立的,这说明定理 5 的逆命题是不成立的。

下面例子说明软 J-包含与实参软包含之间没有必然的蕴含关系。

例 3　设 $U_2=\{x_1,x_2,x_3\}$,实参软集 P_1 与 P_2 分别定义如下:

$$P_1(\lambda)=\begin{cases}\{x_1\}, & \lambda=0.1,\\ \{x_2,x_3\}, & \lambda=0.5,\\ \varnothing, & \text{其他。}\end{cases}\quad P_2(\lambda)=\begin{cases}U_2, & \lambda=0.1,\\ \{x_3\}, & \lambda=0.5,\\ \varnothing, & \text{其他。}\end{cases}$$

容易验证 $P_1(0.5)=\{x_2,x_3\}\nsubseteq\{x_3\}=P_2([0.5,1])$。根据定理 1 可得 $P_1\nsubseteq_R P_2$。根据定理 3，容易验证 $P_1\subseteq_J P_2$，这说明 $P_1\subseteq_J P_2$ 并不蕴含 $P_1\subseteq_R P_2$。

例 4　设 $U_2=\{x_1,x_2,x_3\}$，实参软集 Q_1 与 Q_2 分别定义如下：

$$Q_1(\lambda)=\begin{cases}\{x_1,x_2\}, & \lambda=0.1,\\ \{x_2\}, & \lambda=0.5,\\ \varnothing, & \text{其他。}\end{cases}\quad Q_2(\lambda)=\begin{cases}\{x_1\}, & \lambda=0.1,\\ \{x_2\}, & \lambda=0.5,\\ \varnothing, & \text{其他。}\end{cases}$$

容易验证，$\forall\alpha\in[0,1]$，$Q_1(0.1)=\{x_1,x_2\}\nsubseteq Q_2(\alpha)$，根据定理 3，可得 $Q_1\nsubseteq_J Q_2$。根据定理 1，容易验证 $Q_1\subseteq_R Q_2$，这说明 $Q_1\subseteq_R Q_2$ 并不蕴含 $Q_1\subseteq_J Q_2$。

例 3、4 表明，软 J-包含与实参软包含之间不存在必然的蕴含关系，但二者仍存在一定的相容性。例如，例 1 中易证 F_1'与 F_2'互相软 J-包含（即 $F_1'\subseteq_J F_2'$且 $F_2'\subseteq_J F_1'$），但 $F_1'\neq F_2'$，这与实参软包含下的关系一致。

2.3　集的交、并、补运算

本节旨在为实参软集建立交、并、补运算的新定义。通过深入分析与文献[2]所提运算间的理论联系，阐明本文定义的运算更合理。

定义 10（交）　设 U 为非空集合，F_1 与 F_2 是 U 上的两个实参软集，$\forall\lambda\in[0,1]$，记

$$(F_1\cap F_2)(\lambda)=F_1(\lambda)\cap F_2(\lambda),$$

显然 $F_1\cap F_2$ 也是 U 上的一个实参软集，称 $F_1\cap F_2$ 为实参软集 F_1 与 F_2 的交。

定义 11（并）　设 U 为非空集合，F_1 与 F_2 是 U 上的两个实参软集，$\forall\lambda\in[0,1]$，记

$$(F_1\cup F_2)(\lambda)=F_1(\lambda)\cup F_2(\lambda),$$

显然 $F_1\cup F_2$ 也是 U 上的一个实参软集，称 $F_1\cup F_2$ 为实参软集 F_1 与 F_2 的并。

定义 12（补）　设 U 为非空集合，F 是 U 上的一个实参软集，$\forall\lambda\in[0,1]$，记

$$F^c(\lambda)=F(1-\lambda),$$

显然 F^c也是 U 上的一个实参软集，称 F^c为实参软集 F 的补。

记所有的实参软集构成的集合为 $\mathscr{R}(U)$。

定理 6　设 U 为非空集合，对 $F,G,H\in\mathscr{R}(U)$，下述性质成立：

（1）幂等律　$F\cap F=F$, $F\cup F=F$。

（2）交换律　$F\cup G=G\cup F$, $F\cap G=G\cap F$。

（3）结合律　$(F\cup G)\cup H=F\cup(G\cup H)$，且$(F\cap G)\cap H=F\cap(G\cap H)$。

（4）吸收律　$(F\cup G)\cap F=F$, $(F\cap G)\cup F=F$。

（5）分配律　$(F\cup G)\cap H=(F\cap H)\cup(G\cap H)$，且$(F\cap G)\cup H=(F\cup H)\cap(G\cup H)$。

（6）复原律　$(F^c)^c=F$。

证明　由定义 10、11，可知(1)至(5)是显然成立的。由定义 12 推得(6)是正确的。

定理 6 说明$(\mathscr{R}(U),\cap,\cup)$构成一个分配格。下面讨论本文定义的交并运算与文献[15]中的交并运算之间的关系。

为了建立由定义 4 的并与定义 11 的并之间的关联，先说明符号意义。

注 4　由注 1，软集(F_1,A)与(F_2,B)记为 F_1^A 与 F_2^B，定义 4 中的$(F_1,A)\tilde{\cup}(F_2,B)$简记为 $F_1^A\tilde{\cup}F_2^B$，定义 4 中的 H 可以直接用 $F_1^A\tilde{\cup}F_2^B$ 替代，即

$$(F_1^A\tilde{\cup}F_2^B)(\lambda)=\begin{cases}F_1(\lambda), & \lambda\in A-B,\\ F_2(\lambda), & \lambda\in B-A,\\ F_1(\lambda)\cup F_2(\lambda), & \lambda\in A\cap B。\end{cases}$$

据式(1)，对于参数 $\lambda\in[0,1]-(A\cup B)$，本文将 λ 看作无效参数，$(F_1^A\tilde{\cup}F_2^B)(\lambda)=\varnothing$。

定理 7　设(F_1,A)与(F_2,B)是 U 上的软集，其中 $A,B\subseteq[0,1]$，那么 $F_1^A\tilde{\cup}F_2^B=F_1^A\cup F_2^B$。

证明　只须证明$\forall\lambda\in[0,1]$，$(F_1^A\tilde{\cup}F_2^B)(\lambda)=(F_1^A\cup F_2^B)(\lambda)$。下面分 4 种情况讨论：

（ⅰ）因为 $\lambda\in A-B$，所以 $\lambda\notin B$。由式(1)知 $F_2^B(\lambda)=\varnothing$，由注 3 和定义 11，得

$$(F_1^A\tilde{\cup}F_2^B)(\lambda)=F_1^A(\lambda)=F_1^A(\lambda)\cup F_2^B(\lambda)。$$

（ⅱ）因为 $\lambda \in B-A$，所以 $\lambda \notin A$。由式（1）知 $F_1^A(\lambda)=\varnothing$，由注 3 和定义 11，得

$$(F_1^A \tilde{\cup} F_2^B)(\lambda)=F_2^B(\lambda)=F_1^A(\lambda)\cup F_2^B(\lambda)。$$

（ⅲ）$\lambda \in A\cap B$，根据式（1）知 $F_1^A(\lambda)=F_1(\lambda)$，$F_2^B(\lambda)=F_2(\lambda)$，因此由注 3 和定义 11，得 $(F_1^A \tilde{\cup} F_2^B)(\lambda)=F_1(\lambda)\cup F_2(\lambda)=F_1^A(\lambda)\cup F_2^B(\lambda)$。

（ⅳ）$\lambda \in [0,1]-(A\cup B)$，根据式（1）知 $F_1^A(\lambda)=\varnothing$，$F_2^B(\lambda)=\varnothing$，因此由注 3 和定义 11，得 $(F_1^A \tilde{\cup} F_2^B)(\lambda)=\varnothing=F_1^A(\lambda)\cup F_2^B(\lambda)$。

综上所述，由（ⅰ）—（ⅳ）和定义 11，证得 $F_1^A \tilde{\cup} F_2^B=F_1^A\cup F_2^B$。

定理 7 中并 $\tilde{\cup}$ 是由定义 4 定义，并 $\cup$ 由定义 11 定义。定理 7 表明，文献[2]定义的软集并运算与本文的实参软集并运算定义一致。然而，其交运算与本文的定义不一致，下述例子说明这一点。

例 5　设 $U_2=\{x_1,x_2,x_3\}$ 且 $A=B=\{0.1,0.5\}$，$R_1(0.1)=\{x_1\}$，$R_1(0.5)=\{x_3\}$ 与 $R_2(0.1)=\{x_1,x_2\}$，$R_2(0.5)=\{x_1,x_3\}$，显然 (R_1,A) 与 (R_2,B) 是 2 个软集。由注 1 可知 (R_1,A) 与 (R_2,B) 看作 2 个实参软集 R_1^A 与 R_2^B：

$$R_1^A(\lambda)=\begin{cases}\{x_1\}, & \lambda=0.1,\\ \{x_3\}, & \lambda=0.5,\\ \varnothing, & \text{其他。}\end{cases}\quad R_2^B(\lambda)=\begin{cases}\{x_1,x_2\}, & \lambda=0.1,\\ \{x_1,x_3\}, & \lambda=0.5,\\ \varnothing, & \text{其他。}\end{cases}$$

根据定义 5 计算，得

$$(R_1,A)\tilde{\cap}(R_2,B)=(H,A\cap B),$$

其中，$H(0.1)=H(0.5)=\varnothing$。当把 (R_1,A) 与 (R_2,B) 看作实参软集 R_1^A 与 R_2^B 时，根据定义 10，得 $(R_1^A\cap R_2^B)(0.1)=R_1^A(0.1)\cap R_2^B(0.1)=\{x_1\}$。因此 $(R_1^A\cap R_2^B)(0.1)\neq H(0.1)$。由此可见，本文建立的交运算与文献[2]的定义不同。值得注意的是，文献[2]中的交、并运算（定义 4、5）不满足分配律，说明文献[2]定义存在局限性。反观本文提出的运算，则能满足分配律。

3　实参软集与其它广义模糊集之间的联系

3.1　实参软集与模糊集之间的关联

本节主要探讨实参软集与模糊集之间的内在联系。

设 A 是 U 上的一个模糊集，对任意 $\lambda\in[0,1]$，定义 $A^{-1}(\lambda)$ 为

$$A^{-1}(\lambda)=\{x\in U \mid A(x)=\lambda\}。\tag{4}$$

显然 A^{-1} 是 U 上的一个实参软集。

若由一个实参软集能导出一个模糊集，则设 F 为 U 上的实参软集，对任意 $x\in U$，$F^{\sim 1}(x)$ 定义为

$$F^{\sim 1}(x)=\{\lambda\in[0,1] \mid x\in F(\lambda)\}。\tag{5}$$

此处并未选用符号 F^{-1}，因为由式（5）定义的 $F^{\sim 1}$ 不是 F 的逆映射。

例 6　设 $U_2=\{x_1,x_2,x_3\}$ 且 F 是 U_2 上的一个实参软集，其中

$$F(\lambda)=\begin{cases}\{x_1,x_2\}, & \lambda=0.1,\\ \{x_1\}, & \lambda=0.5,\\ \varnothing, & \text{其他。}\end{cases}$$

根据式（5）计算得 $F^{\sim 1}(x_1)=\{0.1,0.5\}$，$F^{\sim 1}(x_2)=\{0.1\}$ 且 $F^{\sim 1}(x_3)=\varnothing$。一般情况下，$F^{\sim 1}$ 并不是 U_2 上的模糊集，但是，当 F 是一个划分软集时，$F^{\sim 1}$ 可以被看作是 U_2 上的一个模糊集。

性质 4　设 F 为 U 上的一个划分软集，那么对任意 $x\in U$，$|F^{\sim 1}(x)|=1$。

证明　由性质 3 可知，对 $\forall x\in U$ 存在唯一的 $\lambda\in[0,1]$ 使得 $x\in F(\lambda)$，根据式（6）得

$$F^{\sim 1}(x)=\{\lambda\}。$$

即证 $|F^{\sim 1}(x)|=1$。

注 5　若 $F^{\sim 1}(x)=\{\lambda\}$，从模糊集理论角度，可把这个唯一的 λ 解读为隶属度，因此直接记 $F^{\sim 1}(x)=\lambda$。

定理 8 若 A 为 U 上的一个模糊集,则 A^{-1} 是 U 上的一个划分软集。

证明 对 $\forall x\in U$,记 $\lambda=A(x)$,显然 $\lambda\in[0,1]$ 且据式(4),$x\in A^{-1}(\lambda)$,因此 $U\subseteq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}A^{-1}(\lambda)$。可推得 $U=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}A^{-1}(\lambda)$,即证 A^{-1} 满足定义 9 的第一个条件。此外,对 $\forall\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$ 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$。假设 $A^{-1}(\lambda_1)\cap A^{-1}(\lambda_2)\neq\varnothing$,那么 $\exists x_0\in A^{-1}(\lambda_1)\cap A^{-1}(\lambda_2)$,即 $x_0\in A^{-1}(\lambda_1)$ 且 $x_0\in A^{-1}(\lambda_2)$。由公式(4)可得 $\lambda_1=A(x_0)=\lambda_2$。这与我们所选的 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾,故 $A^{-1}(\lambda_1)\cap A^{-1}(\lambda_2)=\varnothing$。综上,据定义 9 可知 A^{-1} 是 U 上的一个划分软集。

定理 9 若 F 为 U 上的划分软集,则 $F^{\sim 1}$ 为 U 的一个模糊集。

证明 由性质 4 和注 5,$F^{\sim 1}$ 是 U 到$[0,1]$的一个映射,因此 $F^{\sim 1}$ 为 U 的一个模糊集。

由定理 8 可知,每个模糊集都对应一个划分软集。定理 9 则表明,每个划分软集也对应一个模糊集。由此可见,模糊集仅对应于实参软集中的一个特殊类型,即划分软集,说明实参软集可被视为模糊集的一种推广形式。

定理 10 若 A 为 U 上的一个模糊集,则$(A^{-1})^{\sim 1}=A$。

证明 对 $\forall x\in U$,由式(4)、(5)可得

$$\begin{aligned}(A^{-1})^{\sim 1}(x)&=\{\lambda\in[0,1]\mid x\in A^{-1}(\lambda)\}\\&=\{\lambda\in[0,1]\mid A(x)=\lambda\}\\&=\{A(x)\},\end{aligned}$$

根据注 5 可得$(A^{-1})^{\sim 1}(x)=A(x)$。结论得证。

定理 11 若 F 为 U 上的一个划分软集,则$(F^{\sim 1})^{-1}=F$。

证明 因为 F 为 U 上的一个划分软集,所以由定理 9 可得 $F^{\sim 1}$ 为 U 的一个模糊集。对 $\forall\lambda\in[0,1]$,由式(4)、(5)可得

$$(F^{\sim 1})^{-1}(\lambda)=\{x\in U\mid F^{\sim 1}(x)=\lambda\}=\{x\in U\mid x\in F(\lambda)\}=F(\lambda),$$

因此$(F^{\sim 1})^{-1}=F$。

定理 10、11 说明,划分软集与模糊集形成一一对应关系。

下面探讨实参软集的运算与模糊集的交并等运算性质。

性质 5 若 A,B 为 U 上的模糊集,下列结论成立:

(1) 若 $A\subseteq B$,则 $A^{-1}\subseteq_R B^{-1}$。

(2) $A^{-1}\cap B^{-1}\subseteq_R(A\cap B)^{-1}$。

(3) $(A\cup B)^{-1}\subseteq_R A^{-1}\cup B^{-1}$。

(4) $(A\cap B)^{-1}\cup(A\cup B)^{-1}=A^{-1}\cup B^{-1}$。

证明 (1) 根据定理 1,只须证明 $\forall\lambda\in[0,1]$, $A^{-1}(\lambda)\subseteq B^{-1}([\lambda,1])$。对 $\forall x\in A^{-1}(\lambda)$,由式(4)可得 $A(x)=\lambda$。因为 $A\subseteq B$,所以 $A(x)\leqslant B(x)$。记 $B(x)=\lambda'$,那么 $\lambda'\in[\lambda,1]$。据式(4)可得 $x\in B^{-1}(\lambda')$。再由式(2)和 $\lambda'\in[\lambda,1]$,可知 $B^{-1}(\lambda')\subseteq B^{-1}([\lambda,1])$,即证 $x\in B^{-1}([\lambda,1])$。因此 $A^{-1}(\lambda)\subseteq B^{-1}([\lambda,1])$,性质 5(1)得证。

(2) 根据定理 1,只须证明 $\forall\lambda\in[0,1]$, $(A^{-1}\cap B^{-1})(\lambda)\subseteq(A\cap B)^{-1}([\lambda,1])$。对 $\forall x\in(A^{-1}\cap B^{-1})(\lambda)=A^{-1}(\lambda)\cap B^{-1}(\lambda)$,得 $x\in A^{-1}(\lambda)$ 且 $x\in B^{-1}(\lambda)$。由式(4)得 $A(x)=\lambda$ 且 $B(x)=\lambda$,因此 $(A\cap B)(x)=\lambda$。再由式(4)推得 $x\in(A\cap B)^{-1}(\lambda)$。此外,由式(2)知$(A\cap B)^{-1}(\lambda)\subseteq(A\cap B)^{-1}([\lambda,1])$,即证 $x\in(A\cap B)^{-1}([\lambda,1])$,因此

$$(A^{-1}\cap B^{-1})(\lambda)\subseteq(A\cap B)^{-1}([\lambda,1])。$$

综上,性质(2)得证。

性质 5(3)、(2)的证明方法类似。

(4) 只须证明 $\forall\lambda\in[0,1]$, $[(A\cap B)^{-1}\cup(A\cup B)^{-1}](\lambda)=(A^{-1}\cup B^{-1})(\lambda)$,对 $\forall x\in[(A\cap B)^{-1}\cup(A\cup B)^{-1}](\lambda)$,等价于 $x\in(A\cap B)^{-1}(\lambda)\cup(A\cup B)^{-1}(\lambda)$,即

$$x\in(A\cap B)^{-1}(\lambda)\text{或}x\in(A\cup B)^{-1}(\lambda)。$$

根据式(4)得$(A\cap B)(x)=\lambda$或$(A\cup B)(x)=\lambda$。下面分 2 种情况讨论:若$(A\cap B)(x)=\lambda$,那么$A(x)=\lambda$或$B(x)=\lambda$。假设$A(x)=\lambda$,由式(2)知$x\in A^{-1}(\lambda)$,由此可得$x\in A^{-1}(\lambda)\cup B^{-1}(\lambda)=(A^{-1}\cup B^{-1})(\lambda)$,即$x\in(A^{-1}\cup B^{-1})(\lambda)$;若$(A\cup B)(x)=\lambda$,类似于前面的证明,得$x\in(A^{-1}\cup B^{-1})(\lambda)$。即证$[(A\cap B)^{-1}\cup(A\cup B)^{-1}](\lambda)\subseteq(A^{-1}\cup B^{-1})(\lambda)$。另外,对$\forall x\in(A^{-1}\cup B^{-1})(\lambda)$,也就是$x\in A^{-1}(\lambda)\cup B^{-1}(\lambda)$,即$x\in A^{-1}(\lambda)$或$x\in B^{-1}(\lambda)$。根据式(4)可得$A(x)=\lambda$或$B(x)=\lambda$。假设$A(x)=\lambda$,若$B(x)\geqslant\lambda$,则$(A\cap B)(x)=\lambda$,由式(4)知,$x\in(A\cap B)^{-1}(\lambda)$;若$B(x)<\lambda$,则$(A\cup B)(x)=\lambda$。由式(4)知,$x\in(A\cup B)^{-1}(\lambda)$。总之,必有$x\in(A\cap B)^{-1}(\lambda)\cup(A\cup B)^{-1}(\lambda)$,即证$(A^{-1}\cup B^{-1})(\lambda)\subseteq[(A\cap B)^{-1}\cup(A\cup B)^{-1}](\lambda)$。综上所述,得$(A^{-1}\cup B^{-1})(\lambda)=[(A\cap B)^{-1}\cup(A\cup B)^{-1}](\lambda)$,因此$(A\cap B)^{-1}\cup(A\cup B)^{-1}=A^{-1}\cup B^{-1}$。

性质 5 的(1)说明模糊集的包含关系与实参软集的包含关系是相容的。性质 5 中的(2)与(3)揭示了模糊集的交并运算与实参软集交并运算之间的联系。

性质 5 中的(2)、(3)的反包含不一定成立的。下面举例说明这一点。

例 7　设$U_2=\{x_1,x_2,x_3\}$且A_1、B_1是U_2上的模糊集,其中

$$A_1=\frac{0.1}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.1}{x_3}\text{ 与 }B_1=\frac{0.1}{x_1}+\frac{0.1}{x_2}+\frac{0.8}{x_3}。$$

由式(4)得

$$A_1^{-1}(\lambda)=\begin{cases}\{x_1,x_3\}, & \lambda=0.1,\\ \{x_2\}, & \lambda=0.5,\\ \varnothing, & \text{其他},\end{cases}\quad B_1^{-1}(\lambda)=\begin{cases}\{x_1,x_2\}, & \lambda=0.1,\\ \{x_3\}, & \lambda=0.8,\\ \varnothing, & \text{其他},\end{cases}$$

因此A_1^{-1}、B_1^{-1}是U_2上的 2 个实参软集。根据定义 10 得

$$(A_1^{-1}\cap B_1^{-1})(\lambda)=\begin{cases}\{x_1\}, & \lambda=0.1,\\ \varnothing, & \text{其他},\end{cases}\quad (A_1^{-1}\cup B_1^{-1})(\lambda)=\begin{cases}\{x_1,x_2,x_3\}, & \lambda=0.1,\\ \{x_2\}, & \lambda=0.5,\\ \{x_3\}, & \lambda=0.8,\\ \varnothing, & \text{其他}。\end{cases}$$

根据模糊集的交并运算,得

$$A_1\cap B_1=\frac{0.1}{x_1}+\frac{0.1}{x_2}+\frac{0.1}{x_3},\quad A_1\cup B_1=\frac{0.1}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.8}{x_3}。$$

根据式(4),得

$$(A_1\cap B_1)^{-1}(\lambda)=\begin{cases}\{x_1,x_2,x_3\}, & \lambda=0.1,\\ \varnothing, & \text{其他},\end{cases}\quad (A_1\cup B_1)^{-1}(\lambda)=\begin{cases}\{x_1\}, & \lambda=0.1,\\ \{x_2\}, & \lambda=0.5,\\ \{x_3\}, & \lambda=0.8,\\ \varnothing, & \text{其他},\end{cases}$$

可得$(A_1\cap B_1)^{-1}(0.1)\nsubseteq(A_1^{-1}\cap B_1^{-1})(0.1)$,因此$(A_1\cap B_1)^{-1}\nsubseteq A_1^{-1}\cap B_1^{-1}$,由性质 1 推得$(A_1\cap B_1)^{-1}\nsubseteq_R A_1^{-1}\cap B_1^{-1}$,同样,由前面的计算可知$(A_1^{-1}\cup B_1^{-1})(0.1)\nsubseteq(A_1\cup B_1)^{-1}(0.1)$,因此$A_1^{-1}\cup B_1^{-1}\nsubseteq(A_1\cup B_1)^{-1}$。综上,例 7 说明性质 5(2)、(3)是不能取等的。

3.2　实参软集与犹豫模糊集之间的联系

犹豫模糊集是模糊集的重要扩展,它拓展了模糊集理论适用范围。本节将深入探究实参软集与犹豫模糊集之间的内在关联。

定义 13[2]　设U是非空集合,设$H:U\to P([0,1])$是一个映射,则称H为U上的一个犹豫模糊集。

下列结论揭示实参软集与犹豫模糊集之间的联系。

定理 12　若F为U上的一个实参软集,则$F^{\sim1}$为U上的一个犹豫模糊集。

证明　由式(5)与定义 13,定理 12 得证。

反之,设H为U上的一个犹豫模糊集,对任意$\lambda\in[0,1]$,定义$H^{\sim1}(\lambda)$为

$$H^{\sim1}(\lambda)=\{x\in U\mid\lambda\in H(x)\}。\tag{6}$$

定理 13　若H为U上的一个犹豫模糊集,则$H^{\sim1}$为U上一个实参软集。

证明 由式(6)与定义 7,定理 13 成立。

由定理 13 知 $H^{\sim 1}$是 U 上一个实参软集,根据式(5)求$(H^{\sim 1})^{\sim 1}$,下面结论揭示 $H^{\sim 1}$与 H 的关系。

定理 14 若 H 为 U 上的一个犹豫模糊集,那么$(H^{\sim 1})^{\sim 1}=H$。

证明 只须证明$\forall x\in U$, $(H^{\sim 1})^{\sim 1}(x)=H(x)$。对$\forall \lambda\in(H^{\sim 1})^{\sim 1}(x)$,由式(5)可得 $x\in H^{\sim 1}(\lambda)$。再由式(6)得 $\lambda\in H(x)$,即证$(H^{\sim 1})^{\sim 1}(x)\subseteq H(x)$。相似地,也可证明$(H^{\sim 1})^{\sim 1}(x)\supseteq H(x)$成立。综上,定理 14 得证。

定理 15 若 F 为 U 上的一个实参软集,那么$(F^{\sim 1})^{\sim 1}=F$。

证明 类似于定理 14 的证明,可得定理 15 成立。

由定理 12—15,可得下列结论。

定理 16 F 为 U 上的实参软集当且仅当 $F^{\sim 1}$为 U 上的一个犹豫模糊集。

定理 16 的另一个叙述方式即为下面推论的形式。

推论 2 H 为 U 上的犹豫模糊集当且仅当 $H^{\sim 1}$为 U 上一个实参软集。

定理 16 表明,实参软集与犹豫模糊集之间存在一一对应关系,犹豫模糊集的相关研究成果应用于实参软集的理论探讨中具有重要意义。

此外,软集理论应用于群决策[16-17]与多准则决策[18]中,为此,将实参软集理论应用于决策方法,特别是群决策模型的构建,是今后研究的延伸与发展方向。

4 结语

本文提出实参软集的概念,引入无效参数,解决因参数集不一致而导致的软集表示混乱问题,并建立相应的实参软集运算系统。此外,研究实参软集与模糊集之间的对应关系,证明实参软集运算与模糊集运算具有相容性,为软集理论进一步应用于群决策问题研究提供基础。

参考文献:

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3):338-353.

[2] TORRA V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25:529-539.

[3] LU Shizhan, XU Zeshui, FU Zhu, et al. Foundational theories of hesitant fuzzy sets and hesitant fuzzy information systems and their applications for multi-strength intelligent classifiers[J]. Information Sciences, 2025, 714:122212.

[4] MOLODTSOV D. Soft set theory first results[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1999, 37:19-31.

[5] ROY A R, MAJI P K. A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 203:412-418.

[6] SANL1BABA I. Full-fuzzy soft sets and application of absolute aggregation amount[J]. Information Sciences, 2026, 730:122885.

[7] ELAMIR E E, SAYED M E, EGAMI R H, et al. Max-min fuzzy and soft sets approach in constructing fuzzy soft matrix for medical decision-making during epidemics [J]. Alexandria Engineering Journal, 2024, 99:319-325.

[8] ZULQARNAIN R M, XIN X L, GARG H, et al. Aggregation operators of Pythagorean fuzzy soft sets with their application for green supplier chain management[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2021, 40(30):5545-5563.

[9] SAHOO D, PARIDA P K, BARAL S P, et al. An innovative aggregation operator for enhanced decision-making: a study on interval-valued Pythagorean fuzzy soft sets in material selection[J]. Applied Soft Computing, 2025, 172:112888.

[10] 雷理香,曾水玲,吴家欣. 直觉模糊软集的三 I 方法[J]. 模糊系统与数学,2024,38(3):79-88.
LEI Lixiang, ZENG Shuiling, WU Jiaxin. Triple I method for intuitionistic fuzzy soft set[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2024, 38(3):79-88.

[11] JAN N, GWAK J, PAMUCAR D, et al. An integrated complex T-spherical fuzzy set and soft set model for quantum computing and energy resource planning[J]. Information Sciences, 2024, 661:120101.

[12] LIU X Y, FENG F, JUN Y B. A note on generalized soft equal relations[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2012, 64:572-578.

(下转第 138 页)

VI, 2011:164-181.
[29] KWAN K C, SINN L T, HAN C, et al. Pyramid of arclength descriptor for generating collage of shapes[J]. ACM Transactions on Graphics, 2016, 35(6):229-241.
[30] SAPUTRA R A, KAPLAN C S, ASENTE P, et al. RepulsionPak: deformation-driven element packing with repulsion forces [C]//Proceedings of the 44th Graphics Interface conference. Toronto: ACM, 2018:10-17.
[31] SAPUTRA R A, KAPLAN C S, ASENTE P. Improved deformation-driven element packing with repulsion Pak[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2019, 27(4):2396-2408.
[32] REINERT B, RITSCHEL T, SEIDEL H P. Interactive by-example design of artistic packing layouts[J]. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(6):1-7.
[33] HSU Chenyuan, LI Yiwei, YOU Lihua, et al. Brushing element fields[C]//Proceedings of the SIGGRAPH Asia Technical Briefs. Tokyo: ACM, 2018:1-4.
[34] HSU Chenyuan, LI Yiwei, YOU Lihua, et al. Autocomplete element fields[C]//Proceedings of the CHI Conference on Human Factors in Computing Systems. Hawaii: ACM, 2020:1-13.
[35] SAPUTRA R A, KAPLAN C S, ASENTE P, et al. FlowPak: flow-based ornamental element packing[C]//Proceedings of the 43th Graphics Interface Conference. Waterloo: ACM, 2017:8-15.
[36] HÄDRICH T, BANUTI D T, PAŁUBICKI W, et al. Fire in paradise: mesoscale simulation of wildfires[J]. ACM Transactions on Graphics, 2021, 40(4):1-15.
[37] BARAFF D, WITKIN A, KASS M. Untangling cloth[J]. ACM Transactions on Graphics, 2003, 22(3):862-870.
[38] LIU T T, BARGTEIL A W, O'BRIEN J F, et al. Fast simulation of mass-spring systems[J]. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(6):1-7.
[39] MIRTICH B, CANNY J. Impulse-based simulation of rigid bodies[C]//Proceedings of the 1995 Symposium on Interactive 3D Graphics. Monterey: ACM, 1995:181-188.
[40] JAN B, MÜLLER M, MACKLIN M. A survey on position based dynamics[C]//Proceedings of the European Association for Computer Graphics. Lyon: Wiley, 2017:1-31.
[41] MACKLIN M, MÜLLER M, CHENTANEZ N. XPBD: position-based simulation of compliant constrained dynamics[C]// Proceedings of the 9th International Conference on Motion in Games. California: ACM, 2016:49-54.

(编辑:陈丽萍)

(上接第122页)

[13] FENG F, LI C X, DAVVAZ B, et al. Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach[J]. Soft Computing, 2010, 14:899-911.
[14] JUN Y B, YANG X B. A note on the paper-combination of interval-valued fuzzy set and soft set [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 61:1468-1470.
[15] MAJI P K, BISWAS R, ROY A R. Soft set theory[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2003, 45:555-562.
[16] 关欣,刘赢. 毕达哥拉斯犹豫模糊集多属性决策研究[J]. 系统工程与电子技术,2024,46(3):982-991.
GUAN Xin, LIU Ying. Research on multi-attribute decision-making for Pythagorean hesitation fuzzy sets[J]. Systems Engineering and Electronics, 2024, 46(3):982-991.
[17] ATAGÜN A O. Novel characterizations of rough soft sets: equivalent soft sets in Pawlak approximation space with applications[J]. Expert Systems With Applications, 2025, 292:128462.
[18] BUI Q T, NGUYEN T N, NGUYEN H S, et al. A novel framework for handling uncertainty: intuitionistic fuzzy rough soft set[J]. Information Sciences, 2026, 722:122592.

(编辑:陈丽萍)