

旋转粒支持向量机分类器算法

邓波军¹, 吴南海², 陈玉明¹, 吴克寿^{1,3*}, 赖荣¹

(1. 厦门理工学院计算机与信息工程学院, 福建 厦门 361024; 2. 博大视野(厦门)科技有限公司, 福建 厦门 361000; 3. 福建技术师范学院, 福建 福州 350300)

摘要:针对传统支持向量机在低维度非线性可分和大规模数据集上的计算复杂性问题, 本文提出旋转粒支持向量机算法。该算法基于粒计算理论, 通过旋转特征点构建旋转粒子, 在多平面坐标系粒化构建旋转粒向量, 并定义粒的大小、度量和运算规则。实验结果表明旋转粒支持向量机能够在较低的计算资源需求下应对分布复杂的数据, 本文提出的旋转粒支持向量机算法效率高且分类效果好。

关键词:支持向量机; 粒计算; 粒支持向量机; 模糊集; 损失函数

中图分类号:TP181 **文献标志码:**A

引用格式:邓波军, 吴南海, 陈玉明, 等. 旋转粒支持向量机分类器算法[J]. 山东大学学报(理学版), 2026, 61(5): 102-113.

Rotated granular support vector machine classifier algorithm

DENG Bojun¹, WU Nanhai², CHEN Yuming¹, WU Keshou^{1,3*}, LAI Rong¹

(1. College of Computer and Information Engineering, Xiamen University of Technology, Xiamen 361024, Fujian, China; 2. Broad Vision (Xiamen) Technology Co., Ltd., Xiamen 361000, Fujian, China; 3. Fujian Polytechnic Normal University, Fuzhou 350300, Fujian, China)

Abstract: To address the computational complexity challenges of traditional support vector machine on low-dimensional nonlinearly separable and large-scale datasets, a rotated granular support vector machine algorithm is proposed. Based on granular computing theory, rotated granular particles by rotating feature points and forms rotated granular vectors in a multi-plane coordinate system is constructed. Additionally, the size, measurement, and operational rules of the granules are defined. It is demonstrated that the rotated granular support vector machine can effectively handle complexly distributed data with lower computational resource requirements, is efficient and achieves good classification performance.

Key words: support vector machine; granular computing; granular support vector machine; fuzzy sets; loss function

0 引言

粒计算理论^[1]用于处理模糊性和不确定性较强的信息, 该理论提出了一种多层次、多粒度的知识表达方式, 其思想可以追溯到 Zadeh^[2]的模糊集理论。模糊集理论是通过隶属度函数描述元素与集合之间的关系, 而粒计算强调依照不同的粒度处理信息, 对理解和分层表达复杂数据尤其适用。多种粒分类^[3]和粒聚类^[4]的相关研究推动了粒计算方法体系的发展。

知识发现和数据挖掘有不少以粒计算为基础的研究成果^[5-6]。Gao^[7]等引入信息熵量化数据的不确定性, Qian^[8]等提出融合多粒度信息的学习方法。文献[9-12]从集合论以及向量空间的角度出发, 提出新的模糊粒定义和关于粒的不确定性度量与距离计算的概念, 并广泛运用于机器学习任务当中。

支持向量机(support vector machine, SVM)算法作为一种典型的监督学习算法在分类以及回归等诸多任务中得到了广泛应用。它通过在高维特征空间中构造最优超平面的方式对样本进行有效区分。SVM算

收稿日期: 2025-05-15; 网络出版时间: 2025-12-25

基金项目: 厦门市自然科学基金资助项目(3502Z202473069); 福建省自然科学基金资助项目(2024J011192)

第一作者: 邓波军(2001—), 男, 硕士研究生, 研究方向为机器学习、粒计算等。E-mail: d2080203283@163.com

* 通信作者: 吴克寿(1975—), 男, 教授, 博士, 研究方向为软件体系结构、机器学习等。E-mail: Grcdeep@163.com

法的基本思想是最大化类别之间的边界,提升算法的泛化能力。这种方法在处理高维、小样本数据时能够达到较好的效果,使得 SVM 算法在文本处理^[13-14]、图像识别^[15]、生物信息学^[16]和金融分析^[17]等领域有着广泛的运用。

但是 SVM 算法在面对数据分布复杂或呈现非线性关系时,无法有效捕捉这种复杂性,分类性能较差。引入核函数^[18]可以提升算法的表达能力,但对于大规模数据的计算开销较大,训练时间延长且内存消耗也明显增加,而通过引入粒计算可以建立样本特征之间的潜在联系,使 SVM 算法分类过程更加结构化和层次化,在较低的资源消耗下保证分类的准确性。

本文借助粒计算处理模糊和不确定性数据的优势,提出旋转粒支持向量机(rotated granular support vector machine, RGSVM)算法。该算法基于粒计算理论,建立特征点平面坐标系,将特征点进行多角度旋转粒化处理并生成旋转粒子。特征点在多个平面坐标系上进行粒化,构建旋转粒向量。进一步定义了粒的运算规则,推导出粒之间的求导结果。最后,提出了 RGSVM 算法损失函数。结合 SVM 算法和粒计算理论的优势,在 UCI(University of California Irvine)数据集与数据分析的竞赛平台 Kaggle 数据集上的实验结果表明,在较低的资源需求下,RGSVM 算法分类性能优于 SVM 算法,为分类算法的发展提供了一条新的路径。

1 相关工作

SVM 算法作为一种经典的机器学习算法在诸多研究及应用领域不断发展,表现出较强的适应性和实用价值。为了提升 SVM 算法性能,研究者持续对算法结构进行优化。肖开研^[19]等提出了一种融合多种词向量的多核学习 SVM 算法框架,试图更全面地表征文本中的语义特征,进而弥补传统单一词向量表示方式的不足。句子分类任务中的测试表明该框架在语义识别要求较高的文本场景下表现出良好的分类准确率。

曹国刚等^[20]围绕原发性肝癌的早期筛查问题对 SVM 算法进行了改进,使得算法在诊断准确性方面有了一定程度的提升,为疾病的早期发现提供了支持。李苍柏等^[21]将 SVM 算法应用到地球化学异常信息提取方面,将 SVM 算法与随机森林、人工神经网络等算法对比研究,实验结果验证了 SVM 算法在地球化学勘查中的有效性,为 SVM 算法应用在地球科学领域提供了重要的实践依据。

粒计算作为一种多层次信息处理方法,近些年来在理论与实践层面都取得了不小的进展。Cheng^[22]等提出粒球均值漂移异常检测(granular-ball mean-shift outlier detector, GBMOD)算法,将粒球计算引入均值漂移离群点检测,利用粒球中心减弱噪声干扰并提升效率,实现了更高效、鲁棒的离群点检测。Xie^[23]等提出改进的粒球生成(Fast and stable granular ball generation, GBG++)算法。GBG++算法引入注意力机制和异常值检测策略,提升粒球生成的效率、鲁棒性与稳定性。

肖振国等^[24]从粒计算的角度将代数结构引入聚类方法中,为处理复杂数据提供了相应的理论依据。此外,徐伟华等^[25]梳理了粒计算在多源信息融合研究的发展脉络以及技术路线,为相关研究人员提供了较为完整的参考视角。

从这些研究中可以看出,粒计算正在逐步和其他技术深度融合,拓宽在实际问题中的应用范围。未来相关研究可能更加聚焦于基础理论体系的构建与完善,发展具有通用性的数学模型,探寻更具效率的粒化处理办法。

2 粒的表示与旋转粒化

传统的 SVM 算法以样本为输入对象,而粒 SVM 算法则以粒向量为输入数据。将样本粒化为粒向量是构建粒 SVM 算法的关键,目前广泛使用的粒化方法包括领域粒化^[26-27]和基于单原子特征的模糊粒化^[28-29]。此外也出现了基于邻域粒的模糊构建^[30]以及粒概念网络^[31]等新的粒化方法。旋转粒化在某个特征点平面坐标系上将 1 个样本构造为 1 个粒子,在多个特征点平面坐标系上构造为粒向量。

设信息系统 $U=(X, C, \{d\})$, $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为样本集合, $C=\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ 为特征集合, $d \in \{-1, +1\}$ 为样本的类别标签。给定 1 个样本 $x_i \in X$, 对于特征 $c \in C$, $v_c(x_i) \in [-1, 1]$ 表示样本 x_i 的特征 c 的归一化值。

定义 1 任意选择 2 个特征 $c_a \in C$ 、 $c_b \in C$ 组合,构成特征点平面坐标系 $\langle c_a, c_b \rangle$ 或 $\langle c_b, c_a \rangle$, 本文仅考虑 $\langle c_a, c_b \rangle$ 情况,其中 c_a 为横坐标, c_b 为纵坐标。样本 x_i 在特征点平面坐标系 $\langle c_a, c_b \rangle$ 中的值为 $(v_a(x_i), v_b(x_i))$, 简写为 $(v_a, v_b)^T$ 。在 m 维特征集合中,所有特征两两组合形成特征点平面坐标系集合,共有 $\frac{m(m-1)}{2}$ 个特征点平面坐标系。样本 x_i 所有特征值两两组合生成 $\frac{m(m-1)}{2}$ 个平面特征点值。

定义 2 $v = (v_a, v_b)^T$ 按逆时针旋转 θ 得到新的特征点 $v' = R_\theta v$, 其中 $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ 。

定义 3 v 平移变换可得到新的特征点 $v'' = v + \delta$, 其中 $\delta = (\delta_1, \delta_2)^T$ 为平移系数, $\delta \in \mathbf{R}^2$ 且 $\|\delta\|$ 较小。

定义 4 在 $\langle c_a, c_b \rangle$ 上对 x_i 进行旋转粒化,形成的旋转粒子为

$$g_{\langle c_a, c_b \rangle}(x_i) = \{g_{\langle c_a, c_b \rangle}(x_i)_{j\theta} \}_{j=1}^k = \{r_j\}_{j=1}^k = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}, \quad (1)$$

式中: k 表示旋转的次数且 $k \in \mathbf{N}$, $r_j = R_{j\theta} v + \delta$ 。 $g_{\langle c_a, c_b \rangle}(x_i)$ 是 1 个集合, r_j 是集合中的 1 个元素,表示 v 在特征点平面坐标系 $\langle c_a, c_b \rangle$ 上旋转 $j\theta$ 角度并平移 δ 后的新特征点。粒子是有序的集合,粒子元素是在特征点平面坐标系的点,因此粒子也是点的有序集合。

定义 5 设 $\frac{m(m-1)}{2}$ 个特征点平面坐标系构成集合 $\{s_1, s_2, \dots, s_M\}$, 其中 $M = \frac{m(m-1)}{2}$, 则 x_i 在所有特征点平面坐标系上构成的旋转粒向量为

$$G(x_i) = ((g_1(x_i), g_2(x_i), \dots, g_M(x_i))^T, \quad (2)$$

式中 $g_i(x_i)$ 是样本 x_i 在平面坐标系 s_i 上的旋转粒子。

传统向量的元素是实数,而粒向量 $G(x_i)$ 由粒子构成,粒子是 1 个有序的集合。

例 1 设 $U_1 = (X_1, C_1, \{d_1\})$, 其中 $X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $C_1 = \{c_1, c_2, c_3\}$, $d_1 \in \{-1, +1\}$, 如表 1 所示。

对于 $C_1 = \{c_1, c_2, c_3\}$, 可构成 3 个平面坐标系 $s_1 = \langle c_1, c_2 \rangle$ 、 $s_2 = \langle c_1, c_3 \rangle$ 、 $s_3 = \langle c_2, c_3 \rangle$ 。 $x_1 \in X_1$ 在特征点平面坐标系 $\langle c_1, c_2 \rangle$ 上的值为 $(v_1(x_1), v_2(x_1))$, 简写为 $(v_1, v_2)^T$ 。样本特征点集合如表 2 所示。

表 1 信息系统 U_1

Table 1 Information system U_1

U_1	c_1	c_2	c_3	d_1
x_1	0.5	0.4	0.2	-1
x_2	0.9	0.4	0.3	1
x_3	0.9	0.7	0.6	1
x_4	0.1	0.8	0.2	-1

表 2 样本特征点集合

Table 2 Set of sample feature points

U_1	$(v_1, v_2)^T$	$(v_1, v_3)^T$	$(v_2, v_3)^T$
x_1	$(0.5, 0.4)^T$	$(0.5, 0.2)^T$	$(0.4, 0.2)^T$
x_2	$(0.9, 0.4)^T$	$(0.9, 0.3)^T$	$(0.4, 0.3)^T$
x_3	$(0.9, 0.7)^T$	$(0.9, 0.6)^T$	$(0.7, 0.6)^T$
x_4	$(0.1, 0.8)^T$	$(0.1, 0.2)^T$	$(0.8, 0.2)^T$

设旋转角度 $\theta_1 = 30^\circ$, 旋转次数为 3 次, 平移系数 $\delta_1 = (0.01, 0.01)^T$ 。样本 x_1, x_2, x_3, x_4 在平面坐标系 s_1 中形成的旋转粒子分别为

$$\begin{aligned} g_1(x_1) &= \{g_1(x_1)_{j\frac{\pi}{6}}\}_{j=1}^3 = \{R_{j\frac{\pi}{6}} v + \delta\}_{j=1}^3 = \{(0.243, 0.606), (-0.086, 0.643), (-0.390, 0.510)\}, \\ g_1(x_2) &= \{(0.589, 0.806), (0.113, 0.989), (-0.390, 0.910)\}, \\ g_1(x_3) &= \{(0.439, 1.066), (-0.146, 1.139), (-0.690, 0.910)\}, \\ g_1(x_4) &= \{(-0.303, 0.752), (-0.632, 0.496), (-0.790, 0.110)\}. \end{aligned}$$

样本 x_1, x_2, x_3, x_4 的旋转粒向量分别为

$$\begin{aligned} G_{s_1, s_2, s_3}(x_1) &= (g_1(x_1), g_2(x_1), g_3(x_1))^T, \\ G_{s_1, s_2, s_3}(x_2) &= (g_1(x_2), g_2(x_2), g_3(x_2))^T, \\ G_{s_1, s_2, s_3}(x_3) &= (g_1(x_3), g_2(x_3), g_3(x_3))^T, \\ G_{s_1, s_2, s_3}(x_4) &= (g_1(x_4), g_2(x_4), g_3(x_4))^T. \end{aligned}$$

3 粒的运算与度量

粒的运算包括粒子与粒子、粒向量与粒向量的加减乘除运算,以及粒子与粒子、粒向量与粒向量的求导

结果。

3.1 粒子的运算与度量

定义 6 设旋转粒子 $g_1(x_i) = \{r_j\}_{j=1}^k$ 、 $g_2(x_i) = \{t_j\}_{j=1}^k$, 则 2 个粒子的加、减、乘、除运算分别为

$$g_1(x_i) + g_2(x_i) = \{r_j + t_j\}_{j=1}^k, \tag{3}$$

$$g_1(x_i) - g_2(x_i) = \{r_j - t_j\}_{j=1}^k, \tag{4}$$

$$g_1(x_i) g_2(x_i) = \{r_j t_j\}_{j=1}^k, \tag{5}$$

$$\frac{g_1(x_i)}{g_2(x_i)} = \left\{ \frac{r_j}{t_j} \right\}_{j=1}^k. \tag{6}$$

定理 1 设 $g(\hat{x}_i) = g_1(x_i) g_2(x_i) = \{z_j\}_{j=1}^k$, 则 $\frac{\partial g(\hat{x}_i)}{\partial g_1(x_i)} = g_2(x_i)$, $\frac{\partial g(\hat{x}_i)}{\partial g_2(x_i)} = g_1(x_i)$ 。

证明根据定义 6 可得 $g(\hat{x}_i) = g_1(x_i) g_2(x_i) = \{r_j t_j\}_{j=1}^k$, 则

$$\frac{\partial g(\hat{x}_i)}{\partial g_1(x_i)} = \left\{ \frac{\partial z_1}{\partial r_1}, \frac{\partial z_2}{\partial r_2}, \dots, \frac{\partial z_k}{\partial r_k} \right\} = \left\{ \frac{\partial(r_1 t_1)}{\partial r_1}, \frac{\partial(r_2 t_2)}{\partial r_2}, \dots, \frac{\partial(r_k t_k)}{\partial r_k} \right\} = \{t_1, t_2, \dots, t_k\} = g_2(x_i), \tag{7}$$

定理 1 成立。同理可以证 $\frac{\partial g(\hat{x}_i)}{\partial g_2(x_i)} = g_1(x_i)$ 。

定义 7 旋转粒子 $g_1(x_i)$ 的大小为

$$q(g_1(x_i)) = \sum_{j=1}^k r_j. \tag{8}$$

当 $q(g_1(x_i)) > 0$ 时粒子的大小为正, $q(g_1(x_i)) \leq 0$ 时粒子的大小为负。

3.2 粒向量的运算与度量

定义 8 设粒向量 $\mathbf{G}(x_i) = ((g_1(x_i), g_2(x_i), \dots, g_M(x_i)))^T$, $\mathbf{G}(x_j) = ((g_1(x_j), g_2(x_j), \dots, g_M(x_j)))^T$, 则 2 个粒向量的加、减、乘、除运算分别为

$$\mathbf{G}(x_i) + \mathbf{G}(x_j) = (g_1(x_i) + g_1(x_j), g_2(x_i) + g_2(x_j), \dots, g_M(x_i) + g_M(x_j))^T, \tag{9}$$

$$\mathbf{G}(x_i) - \mathbf{G}(x_j) = (g_1(x_i) - g_1(x_j), g_2(x_i) - g_2(x_j), \dots, g_M(x_i) - g_M(x_j))^T, \tag{10}$$

$$\mathbf{G}(x_i) \mathbf{G}(x_j) = (g_1(x_i) g_1(x_j), g_2(x_i) g_2(x_j), \dots, g_M(x_i) g_M(x_j))^T, \tag{11}$$

$$\frac{\mathbf{G}(x_i)}{\mathbf{G}(x_j)} = \left(\frac{g_1(x_i)}{g_1(x_j)}, \frac{g_2(x_i)}{g_2(x_j)}, \dots, \frac{g_M(x_i)}{g_M(x_j)} \right)^T. \tag{12}$$

定义 9 粒向量 $\mathbf{G}(x_i)$ 、 $\mathbf{G}(x_j)$ 的点积运算为

$$\mathbf{G}(x_i) \cdot \mathbf{G}(x_j) = g_1(x_i) g_1(x_j) + g_2(x_i) g_2(x_j) + \dots + g_M(x_i) g_M(x_j). \tag{13}$$

2 个粒向量点积运算结果为 1 个粒子。因此当 1 个粒向量是特征粒向量 $\mathbf{G}(x_i)$, 另 1 个粒向量是权值粒向量 $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_M)^T$ 时, 二者点积运算得出 1 个新的粒子。

定理 2 设粒子 $g(\hat{y}) = \mathbf{G}(x_i) \cdot \mathbf{G}(x_j)$, 则 $\frac{\partial g(\hat{y})}{\partial \mathbf{G}(x_i)} = \mathbf{G}(x_j)$ 。

证明 由于粒子对粒向量的求导就是粒子对粒向量中的每个元素分别求导, 最后把求导的结果排列在一起用粒向量表示。因此将粒子对粒向量的每个粒子元素求导, 寻找规律得到最终结果。对于 $\frac{\partial g(\hat{y})}{\partial \mathbf{G}(x_i)}$, 先

对 $\mathbf{G}(x_i)$ 的第 p 个元素 $g_p(x_i)$ 进行求导, 其中 $p \in \{1, \dots, M\}$, 则

$$\frac{\partial g(\hat{y})}{\partial g_p(x_i)} = \frac{\partial \sum_{q=1}^M g_q(x_i) g_q(x_j)}{\partial g_p(x_i)} = \frac{\partial (g_p(x_i) g_p(x_j))}{\partial g_p(x_i)}. \tag{14}$$

由定理 1 可知 $g(\hat{y})$ 对 $g_p(x_i)$ 的求导结果等于 $\mathbf{G}(x_j)$ 的第 p 个元素 $g_p(x_j)$, 因此 $g(\hat{y})$ 对 $\mathbf{G}(x_i)$ 中的每个粒子元素求导后组成粒向量 $\mathbf{G}(x_j)$ 。定理 2 成立。

4 RGSVM 算法

在训练过程中, RGSVM 算法通过优化算法确定权值粒向量和偏置粒子的值。预测样本类别时, 利用训

练好的 RGSVM 算法对样本分类。首先对输入样本旋转粒化处理并通过 RGSVM 算法得到输出粒子,然后通过判断输出粒子的大小确定样本的类别。如果粒子大小为正,则样本为正类;如果粒子大小为负,则样本为负类,RGSVM 算法如图 1 所示。图 1 中 \mathbf{W} 为权值粒向量, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \dots, b_M)^T$ 为偏置粒子。为了优化 RGSVM 算法的参数,需要定义损失函数,求解损失函数的导数,得到 RGSVM 算法的梯度下降学习算法。

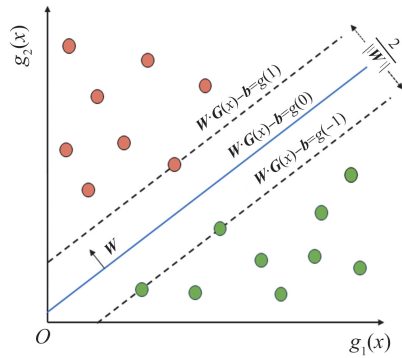


图 1 RGSVM 算法图

Fig.1 RGSVM algorithm diagram

4.1 RGSVM 算法损失函数

软边界 SVM 算法原始优化问题为

$$\sum_i^n [1 - y_i (w \cdot x_i + \beta)]_+ + \lambda \|\mathbf{w}\|^2, \quad (15)$$

式中: w 为权重, β 为偏置项, $\lambda > 0$ 为平衡系数。在 RGSVM 算法中,样本粒化为旋转粒子,因此 RGSVM 算法采用以粒子形式表示的铰链损失函数。

定义 10 设 $T = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ 为训练集,其中, $x_i \in X \subseteq \mathbf{R}^m$, $y_i \in \{-1, +1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。 $GT = \{(G(x_1), g(y_1)), (G(x_2), g(y_2)), \dots, (G(x_n), g(y_n))\}$ 为粒化后的训练集,RGSVM 算法的损失函数为

$$L(\mathbf{W}, \mathbf{b}) = \sum_i^n [1 - g(y_i) (\mathbf{W} \cdot \mathbf{G}(x_i) + \mathbf{b})]_+ + \lambda \|\mathbf{W}\|^2. \quad (16)$$

4.2 RGSVM 学习算法

向量 \mathbf{W} 、 \mathbf{b} 的值即为以下损失函数极小化问题的解,即

$$\min_{\mathbf{W}, \mathbf{b}} L(\mathbf{W}, \mathbf{b}) = \arg \min_{\mathbf{W}, \mathbf{b}} \sum_i^n [g(1) - g(y_i) (\mathbf{W} \cdot \mathbf{G}(x_i) + \mathbf{b})]_+ + \lambda \|\mathbf{W}\|^2, \quad (17)$$

式中: $\mathbf{W} \cdot \mathbf{G}(x_i)$ 结果为 1 个粒子, $\mathbf{W} \cdot \mathbf{G}(x_i) + \mathbf{b}$ 的结果也为 1 个粒子。 $g(y_i) (\mathbf{W} \cdot \mathbf{G}(x_i) + \mathbf{b})$ 为 2 个粒子相乘,结果也为粒子。

RGSVM 算法使用随机梯度下降法求解权值参数,使损失函数最小。随机初始化参数 \mathbf{W} 和 \mathbf{b} ,使用随机梯度下降法不断地最小化目标函数。在迭代过程中随机选择 1 个误分类粒向量,使 \mathbf{W} 和 \mathbf{b} 梯度下降。RGSVM 的学习与预测算法分别描述如下。

算法 1 RGSVM 学习算法。

输入 训练集 T 、学习率 $\eta (0 < \eta \leq 1)$;

输出 权值粒向量 \mathbf{W} 、偏置粒子 \mathbf{b} 。

- (1) 训练集 T 旋转粒化为 GT ;
- (2) 随机初始化 \mathbf{W} 和 \mathbf{b} ;
- (3) 选取 $x_i \in T$,利用 RGSVM 算法计算 $\mathbf{G}(x_i)$,输出 $f(x_i) = \text{sign}(\mathbf{W} \cdot \mathbf{G}(x_i) + \mathbf{b})$;
- (4) 如果 $f(x_i) \neq g(y_i)$,则 $\mathbf{W} = \mathbf{W} - 2\lambda \mathbf{W} + \eta \max\{\mathbf{G}(x_i) g(y_i), 0\}$, $\mathbf{b} = \mathbf{b} + \eta \max\{g(y_i), 0\}$;
- (5) 步骤(3)—(4)循环多次,直至损失函数收敛或者达到最大迭代次数;
- (6) 输出 \mathbf{W} 、 \mathbf{b} 。

算法 2 RGSVM 预测算法。

输入 W, b 和测试样本 x_{test} ;

输出 x_{test} 的标签。

- (1) x_{test} 旋转粒化为粒向量 $G(x_{test})$;
- (2) 利用 RGSVM 算法计算 $G(x_{test})$, 输出 $f(x_{test}) = \text{sign}(W \cdot G(x_{test}) + b)$;
- (3) 计算 $q(f(x_{test}))$, 若为正则判定 x_{test} 为正类, 为负则判定 x_{test} 为负类。

5 实验分析

实验数据集来源于 UCI、Kaggle 数据集, 共选择 HCC Survival (hepatocellular carcinoma survival)、ISTANBUL STOCK (istanbul stock exchange)、NPHA (national poll on healthy aging)、SPECT Heart (single proton emission computed tomography heart) 等 20 个数据集, 如表 3 所示。由于不同数据集在特征取值范围上存在差异, 为避免因尺度不一致影响算法训练效果, 实验在预处理阶段对数据进行归一化处理, 每个特征值在 $[-1, 1]$ 。

表 3 数据集信息
Table 3 Informations of datasets

数据集	样本数	特征数	类别数	数据集	样本数	特征数	类别数
Abalone	4 177	8	28	Heart Failure	299	12	2
Bone marrow	187	36	2	ISTANBUL STOCK	536	8	2
Breast (Diagnostic)	569	31	2	Leaf	340	15	2
Climate Model	520	20	2	NPHA	714	15	2
Ecoli	336	8	8	Seeds	210	7	3
Energy Efficiency	768	9	2	Smoke Detection	62 630	14	2
Glass Identification	214	9	6	Soybean (Large)	307	35	3
Global football results	320 248	8	4	SPECT Heart	267	22	2
HCC Survival	165	49	2	Student Performance	666	11	9
Heart Disease	303	13	2	Teaching Assistant	151	5	3

为综合评估在不同数据集上算法的稳定性和泛化能力, 实验采用 10 次交叉验证方法将数据集随机分为 10 等份, 每次迭代时, 选择 9 份作为训练集, 剩余的 1 份作为测试集, 一共进行 10 次迭代, 取均值作为最终结果。对 RGSVM 算法的收敛性分析, 研究了不同旋转次数对 RGSVM 算法的影响。之后将 RGSVM 算法和其他粒度分类算法对比, 证明 RGSVM 算法在低维非线性数据上的优势。最后对比 RGSVM 算法和核函数 SVM 算法的分类性能以及在 Abalone 与 Smoke Detection 数据集上的时间、内存消耗差异。

5.1 RGSVM 算法收敛性分析

本次实验选取 Glass Identification、Soybean (Large)、Teaching Assistant 数据集对 RGSVM 算法和传统 SVM 算法的收敛性对比分析。RGSVM 算法旋转次数为 11, 最大迭代次数为 80。结果如图 2—4 所示。

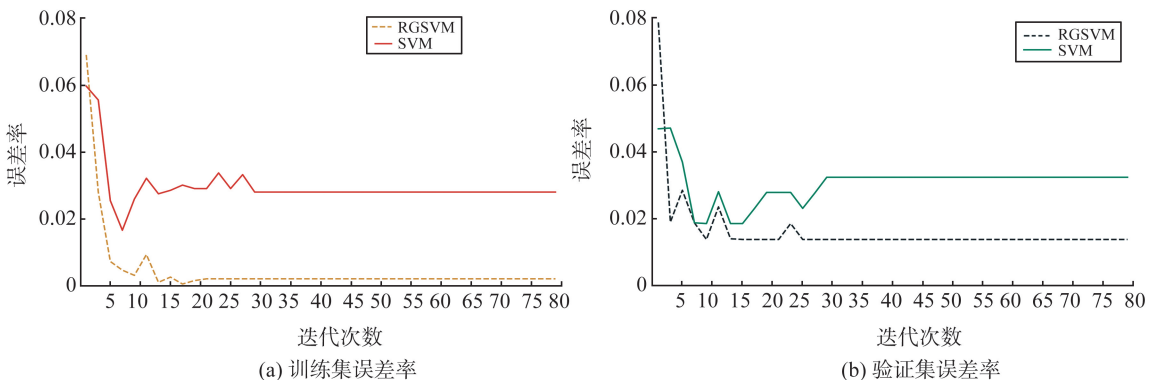


图 2 RGSVM 算法与 SVM 算法在 Glass Identification 数据集的收敛效果
Fig.2 Convergence of RGSVM algorithm and SVM algorithm on Glass Identification dataset

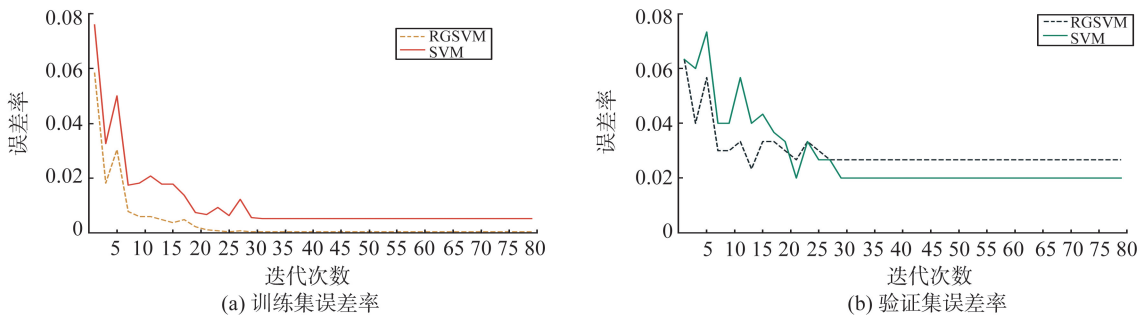


图 3 RGSVM 算法与 SVM 算法在 Soybean (Large) 数据集的收敛效果
Fig.3 Convergence of RGSVM algorithm and SVM algorithm on Soybean (Large) dataset

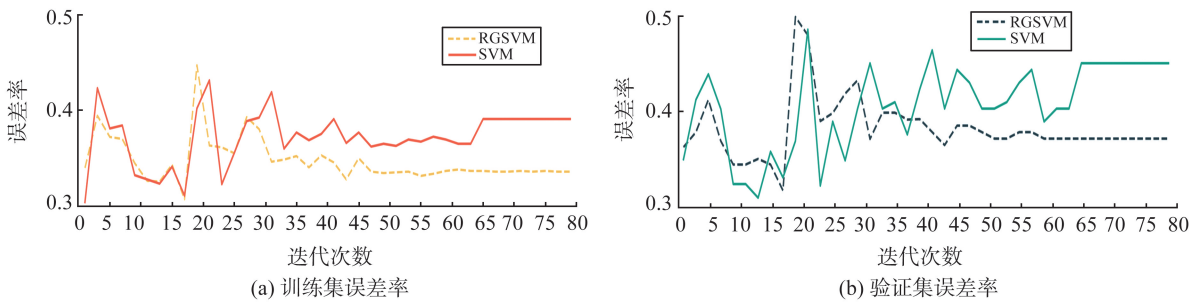


图 4 RGSVM 算法与 SVM 算法在 Teaching Assistant 数据集的收敛效果
Fig.4 Convergence of RGSVM algorithm and SVM algorithm on Teaching Assistant dataset

从图 2—4 可知,在 Glass Identification 数据集上 RGSVM 算法迭代 20 次后训练集误差率趋于稳定,验证集误差率约 0.014。而 SVM 算法迭代 30 次后训练集误差率趋于稳定,验证集误差率约 0.032。在 Soybean (Large) 数据集上,RGSVM 算法迭代 25 次后训练集误差率趋于稳定,SVM 算法迭代 30 次后训练集误差率趋于稳定,但 SVM 算法的验证集误差率更低。在 Teaching Assistant Evaluation 数据集上,RGSVM 算法迭代 50 次后训练集误差率趋于稳定,SVM 算法迭代 65 次后训练集误差率趋于稳定,RGSVM 算法的验证集误差率也低于 SVM 算法的验证集误差率。整体而言,RGSVM 算法的收敛速度与误差率均优于 SVM 算法。

5.2 旋转次数的影响

旋转次数是 RGSVM 算法重要超参数,不同的旋转次数构造不同的粒向量,不同的旋转角度影响样本特征之间的联系。本实验 RGSVM 算法旋转角度为 30° ,平移系数为 $(0.01, 0.01)^T$,旋转次数由 1 增至 11,选取 Heart Disease、Heart Failure、ISTANBUL STOCK、Leaf、NPHA、Soybean (Large) 数据集分析旋转次数对 RGSVM 算法的影响。实验结果如图 5 所示。

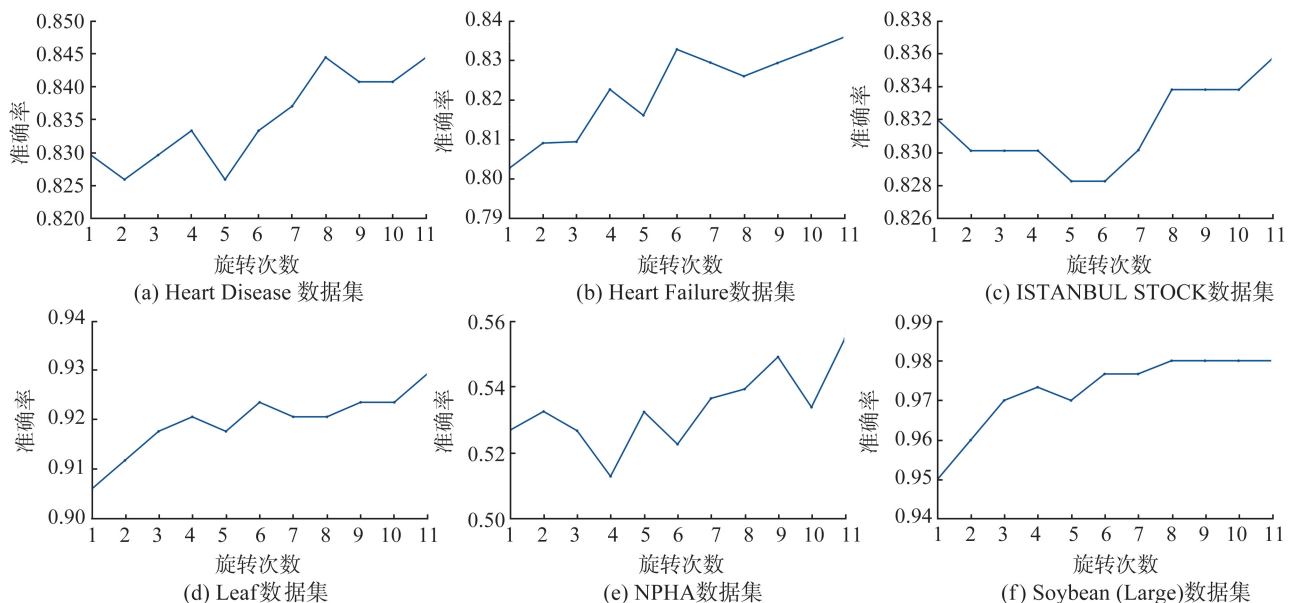


图 5 旋转次数对准确率的影响

Fig.5 Effect of rotation number on accuracy

由图 5 可知,在 Heart Disease 和 ISTANBUL STOCK 数据集上 RGSVM 算法旋转大于 5 次后准确率逐渐提高。在 Heart Failure、Leaf 和 Soybean (Large) 数据集上随着 RGSVM 算法旋转次数增大,准确率稳定上升。NPHA 数据集在 RGSVM 算法旋转次数增大时准确率波动较大,无明显规律。总体而言,多数数据集在 RGSVM 算法旋转 11 次时准确率最大,但不存在统一的最优旋转次数。

5.3 算法比较

实验选取 15 个公开数据集,将 RGSVM 算法与当前多种基于粒计算的算法比较,包括基于粒弹性网络^[32]的 GEN_SVM(SVM based on granular elastic network, GEN_SVM)、基于粒弹性网络的逻辑回归(logistic regression based on granular elastic network, GEN_LR)算法、模糊粒化卷积算法(fuzzy granular convolution method, FGCM)^[28]的第一(FGCM-1)和第二(FGCM-2)版本、以及粒 sigmoid 极限学习机算法(granular sigmoid extreme learning machine algorithm, GSELM)^[33]。

为确保公平性,各算法参数均设置为原论文的推荐值。具体来说,GEN_SVM 算法和 GEN_LR 算法的学习率为 0.005,稀疏约束为 0.5。FGCM-1 算法和 FGCM-2 算法的学习率为 0.01,最近邻居数为 5。GSELM 算法的随机参数为 5 组,隐藏层神经元数量为 50。RGSVM 算法旋转次数设为 11,旋转角度为 30°,平移系数设为(0.01,0.01)^T。各分类算法的准确率如表 4 所示,结果保留四位有效数字。

表 4 不同数据集各分类算法准确率
Table 4 Accuracy of classification algorithms on different datasets

数据集	RGSVM	GEN_SVM	GEN_LR	FGCM-1	FGCM-2	GSELM
Abalone	0.772 3±0.022 4	0.764 0±0.029 1	0.760 1±0.028 3	0.718 0±0.018 7	0.738 8±0.020 7	0.793 9±0.016 3
Bone marrow	0.925 7±0.041 8	0.872 2±0.110 8	0.872 5±0.081 6	0.882 7±0.087 8	0.502 9±0.096 0	0.904 1±0.045 5
Breast(Diagnostic)	0.898 1±0.020 5	0.878 7±0.043 4	0.852 3±0.046 7	0.799 7±0.047 6	0.866 3±0.051 4	0.873 4±0.035 9
Climate Model	0.953 7±0.051 9	0.938 9±0.052 4	0.940 7±0.050 2	0.914 8±0.040 7	0.914 8±0.040 7	0.931 5±0.044 6
Ecoli	0.881 3±0.047 6	0.863 1±0.040 4	0.875 0±0.055 1	0.848 8±0.060 9	0.815 4±0.055 9	0.878 2±0.042 6
Glass Identification	0.990 7±0.018 6	0.981 6±0.030 4	0.967 3±0.042 7	0.911 5±0.038 1	0.967 7±0.035 7	0.981 4±0.022 8
HCC Survival	0.708 1±0.075 7	0.690 4±0.145 8	0.684 2±0.114 7	0.696 7±0.102 0	0.473 5±0.139 7	0.695 2±0.106 7
Heart Disease	0.844 4±0.071 8	0.837 0±0.083 1	0.796 3±0.079 9	0.825 9±0.066 4	0.837 0±0.070 7	0.781 5±0.038 7
Heart Failure	0.835 9±0.085 6	0.756 2±0.079 7	0.782 8±0.051 7	0.756 0±0.087 9	0.739 1±0.075 8	0.786 0±0.071 7
ISTANBUL STOCK	0.835 7±0.028 1	0.819 1±0.047 1	0.820 9±0.042 6	0.798 1±0.054 2	0.807 7±0.037 8	0.811 7±0.032 1
Leaf	0.929 4±0.037 7	0.935 3±0.031 7	0.920 6±0.029 6	0.900 0±0.060 6	0.914 7±0.033 4	0.929 4±0.032 8
NPHA	0.554 8±0.053 7	0.521 1±0.065 5	0.518 4±0.075 0	0.534 9±0.055 5	0.514 3±0.074 6	0.563 0±0.053 9
Soybean (Large)	0.980 0±0.034 0	0.966 7±0.025 8	0.960 0±0.032 7	0.976 7±0.021 3	0.866 7±0.061 5	0.973 3±0.024 9
SPECT Heart	0.730 2±0.074 1	0.677 8±0.076 6	0.688 6±0.089 7	0.722 6±0.071 3	0.573 1±0.115 8	0.681 2±0.067 2
Student Performance	0.729 8±0.073 4	0.629 0±0.082 0	0.633 5±0.073 3	0.690 7±0.038 3	0.657 7±0.064 3	0.714 8±0.073 2

由表 4 可知,RGSVM 算法在 12 个数据集上准确率最大。在 Glass Identification 数据集上准确率为 0.990 7±0.018 6。GSELM 算法在 NPHA 数据集上准确率最大,GEN_SVM 算法在 Leaf 数据集上准确率最大。FGCM-2 算法在大部分数据集上准确率较小。总体而言,在大部分数据集上 RGSVM 算法表现突出、优势明显。

5.4 各类 SVM 算法比较

线性 SVM 算法无法拟合复杂的非线性数据集,分类效果较差。核函数 SVM 算法通过核函数将原始特征空间映射到高维空间解决非线性问题。但随着数据集样本数增加,核函数 SVM 算法训练时间和计算资源负担较重。RGSVM 算法采用随机梯度下降最小化损失函数,计算开销小于核函数 SVM 算法,且分类效果好于线性 SVM 算法。

本次实验选取 2 个大规模数据集 Global football results、Smoke Detection,1 个较大规模数据集 Abalone 和 5 个常规数据集,RGSVM 算法与线性 SVM(Linear_SVM)算法、RBF 核函数 SVM(RBF_SVM)算法、二次多项式核函数 SVM(Poly2_SVM)算法和三次多项式核函数 SVM(Poly3_SVM)算法的准确率、F1 分数进行对比。其中 RGSVM 算法和 Linear_SVM 算法正则化项为 0.005,其他超参数采用 scikit-learn 库默认值。各类 SVM 算法的指标如表 5—6 所示,结果保留四位有效数字。

表5 各类SVM算法准确率
Table 5 Accuracy of various SVM algorithm

数据集	RGSVM	Linear_SVM	RBF_SVM	Poly2_SVM	Poly3_SVM
Abalone	0.772 3±0.022 4	0.749 1±0.022 4	0.773 5±0.017 6	0.781 7±0.021 4	0.783 6±0.015 1
Breast(Diagnostic)	0.898 1±0.020 5	0.868 2±0.040 9	0.848 9±0.043 1	0.866 4±0.030 5	0.903 3±0.028 6
Energy Efficiency	0.985 7±0.009 1	0.984 4±0.012 8	0.984 4±0.012 8	0.984 4±0.012 8	0.985 7±0.010 8
Glass Identification	0.990 7±0.018 6	0.968 0±0.045 8	0.953 7±0.035 2	0.972 3±0.030 4	0.972 3±0.030 4
Global football results	1.000 0±0.000 0	0.893 9±0.001 9	1.000 0±0.000 0	0.999 8±0.000 1	0.985 7±0.013 1
Leaf	0.929 4±0.037 7	0.902 9±0.047 5	0.902 9±0.043 7	0.905 9±0.034 3	0.914 7±0.030 7
Seeds	0.961 9±0.051 3	0.947 6±0.058 1	0.952 4±0.067 3	0.923 8±0.043 6	0.947 6±0.058 1
Smoke Detection	0.963 1±0.003 2	0.955 4±0.002 7	0.999 7±0.000 2	0.999 4±0.000 3	0.999 7±0.000 3
Average	0.937 6±0.070 0	0.908 7±0.071 0	0.926 9±0.075 4	0.929 2±0.071 7	0.936 6±0.066 3

表6 各类SVM算法F1分数
Table 6 F1 scores for various SVM algorithm

数据集	RGSVM	Linear_SVM	RBF_SVM	Poly2_SVM	Poly3_SVM
Abalone	0.781 3±0.018 6	0.750 7±0.020 9	0.760 9±0.016 4	0.778 3±0.020 6	0.776 0±0.0135
Breast(Diagnostic)	0.893 4±0.026 7	0.865 3±0.049 5	0.846 5±0.044 7	0.862 5±0.035 8	0.901 1±0.032 5
Energy Efficiency	0.985 2±0.010 2	0.983 1±0.014 2	0.983 1±0.014 2	0.983 1±0.014 2	0.984 8±0.011 6
Glass Identification	0.981 2±0.038 4	0.927 9±0.129 4	0.909 5±0.070 7	0.947 5±0.058 6	0.947 5±0.058 6
Global football results	1.000 0±0.000 0	0.866 5±0.002 7	1.000 0±0.000 0	0.999 7±0.000 1	0.984 5±0.014 1
Leaf	0.926 1±0.042 6	0.901 2±0.053 5	0.895 3±0.059 5	0.901 1±0.044 4	0.911 8±0.037 0
Seeds	0.914 0±0.120 6	0.901 0±0.120 1	0.901 8±0.144 2	0.863 8±0.096 2	0.877 2±0.162 2
Smoke Detection	0.973 8±0.002 2	0.955 4±0.002 7	0.999 7±0.000 2	0.999 6±0.000 2	0.999 7±0.000 3
Average	0.931 9±0.067 3	0.893 9±0.066 2	0.912 1±0.077 5	0.916 9±0.074 4	0.922 8±0.069 3

由表5—6可知,RGSVM算法在5个数据集上准确率最大,平均准确率为0.937 6±0.070 0,位居第一。在Global football results数据集上,RGSVM算法与RBF_SVM算法达到最大准确率1.000 0±0.000 0。RGSVM算法在6个数据集上F1分数最高,平均F1分数为0.931 9±0.067 3,高于Linear_SVM算法。总体而言,RGSVM算法在准确率和F1分数上均表现良好,兼具精度与稳定性。

为了更直观比较各类SVM算法的分类效果,图6为Seeds数据集的各算法决策边界图。从图6可以看出,RGSVM算法能够划分出更精确的决策边界。对于处于类别临界区的样本,RGSVM算法相比Linear_SVM算法能找到更合理的分割超平面,提升分类效果。

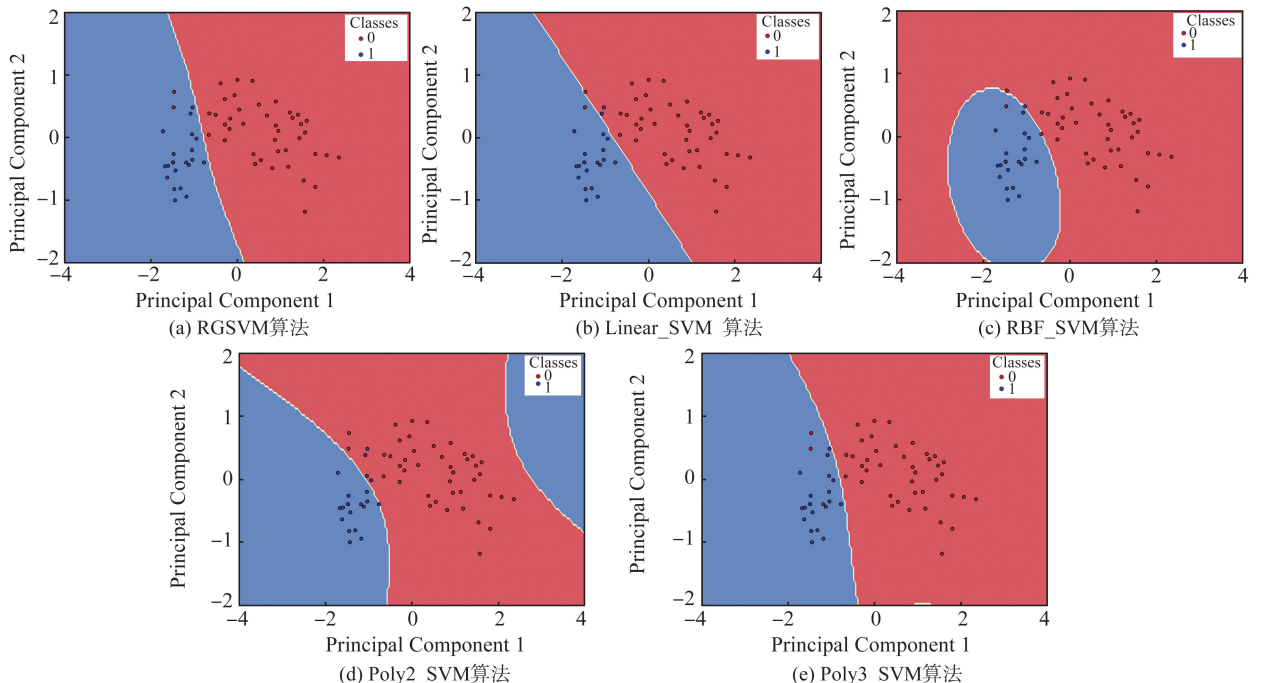


图6 各类SVM算法决策边界

Fig.6 Various SVM algorithm decision boundary

为了验证 RGSVM 算法的计算资源需求低于核函数 SVM 算法,实验对比在 Abalone 与 Smoke Detection 数据集上 RGSVM 算法与核函数 SVM 算法的训练用时及内存占用,实验结果如图 7—8 所示。从图 7—8 可知,随着数据集规模的增加,核函数 SVM 算法计算成本会迅速增加。在 Abalone 数据集上 RBF_SVM 算法的训练用时与内存消耗分别是 RGSVM 算法的 14 倍与 125 倍。在样本数量更多的 Smoke Detection 数据集上 RBF_SVM 算法的训练用时与内存消耗分别是 RGSVM 算法的 23 倍与 684 倍。

核函数 SVM 算法训练时要求解 1 个二次规划问题,在求解过程中要存储和处理 1 个 $n \times n$ 的核矩阵,其中 n 为样本数量,计算复杂度在 $O(n^2)$ 与 $O(n^3)$ 之间。随着 n 的增加,训练时间和内存资源需求呈多项式增长。而 RGSVM 算法使用随机梯度下降最小化损失函数,能够在较低的计算复杂度下更新参数。同时由于 RGSVM 算法只需存储粒向量和算法本身参数,内存需求相对较低。相比 Linear_SVM 算法,RGSVM 算法 Abalone 与 Smoke Detection 数据集的训练用时与内存消耗稍有增加,这是旋转粒化后数据维度提升的额外开销,但是仍在可接受范围之内。

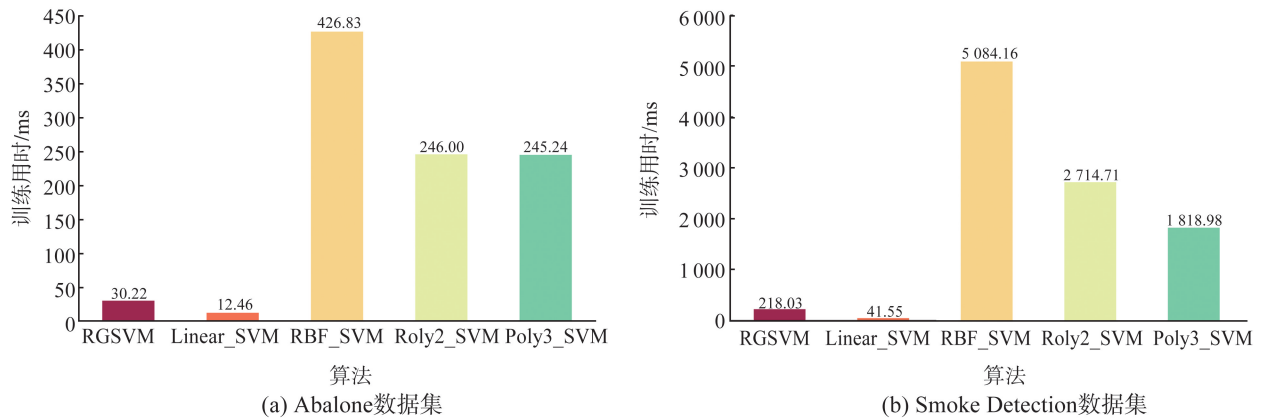


图 7 各类 SVM 算法训练时间
Fig.7 Various SVM algorithm training time

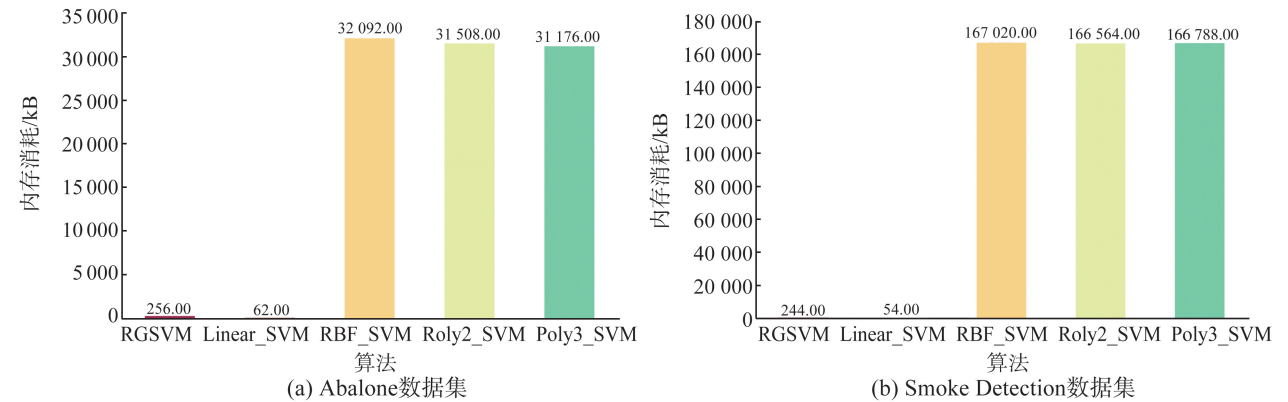


图 8 各类 SVM 算法内存消耗
Fig.8 Various SVM algorithm memory consumption

6 结论

本文提出 RGSVM 算法解决传统 SVM 算法在低维、非线性可分数据集上的局限性。旋转粒化能捕捉数据的内在结构,增强特征之间的交互,提高分类准确率。实验结果表明,在多个数据集上 RGSVM 算法的表现优于传统 SVM 算法及其他粒计算算法,分类效果较佳。然而,RGSVM 算法的效果仍受旋转次数等超参数的影响。未来可通过贝叶斯优化、遗传算法等超参数调优方法,自动选择最优旋转次数。此外,尽管在低维数据集上 RGSVM 算法表现良好,但扩展到高维数据集时须进一步探讨。研究基于旋转粒化的深度学习算法能进一步提升算法的表达能力,提升 RGSVM 算法的可解释性也是未来的重要研究方向。

参考文献:

- [1] LIN T Y. Granular computing on binary relations I: data mining and neighborhood systems[J]. *Rough Sets in Knowledge Discovery*, 1998, 1(1):107-121.
- [2] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. *Information and Control*, 1965, 8(3):338-353.
- [3] WANG Y, ISHIBUCHI H, PEDRYCZ W, et al. Convolutional fuzzy neural networks with random weights for image classification[J]. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*, 2024, 8(5):3279-3293.
- [4] HU Xingchen, QIN Jindong, SHEN Yinghua, et al. An efficient federated multiview fuzzy c-means clustering method[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2024, 32(4):1886-1899.
- [5] YAGCI M. Educational data mining: prediction of students' academic performance using machine learning algorithms[J]. *Smart Learning Environments*, 2022, 9(1):11.
- [6] LI X, ZHOU J, PEDRYCZ W. Linking granular computing, big data and decision making: a case study in urban path planning[J]. *Soft Computing*, 2020, 24(10):7435-7450.
- [7] GAO Can, ZHOU Jie, MIAO Duoqian, et al. Granular-conditional-entropy-based attribute reduction for partially labeled data with proxy labels[J]. *Information Sciences*, 2021, 580:111-128.
- [8] QIAN Jin, WANG Taotao, LU Yuehua, et al. A multi-granularity hesitant fuzzy linguistic decision making VIKOR method based on entropy weight and information transformation[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2024, 46(3):6505-6516.
- [9] FU Xingyu, CHEN Yingyue, YAN Jingru, et al. BGRF: a broad granular random forest algorithm[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2023, 44(5):8103-8117.
- [10] LI Wei, MA Xiaoyu, CHEN Yumin, et al. Random fuzzy granular decision tree[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, 2021(1):5578682.
- [11] HE Linjie, CHEN Yumin, WU Keshou. Fuzzy granular deep convolutional network with residual structures[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2022, 258:109941.
- [12] 陈玉明,郑光宇,焦娜. 基于粒神经网络的多标签学习[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2024, 59(5):1-11.
CHEN Yuming, ZHENG Guangyu, JIAO Na. Multi-label learning based on granular neural networks[J]. *Journal of Shandong University(Natural Science)*, 2024, 59(5):1-11.
- [13] SULEYMANOV U, KALEJAHİ B K, AMRAHOV E, et al. Text classification for Azerbaijani language using machine learning[J]. *Computer Systems Science & Engineering*, 2020, 35(6):467-475.
- [14] 张仰森,彭媛媛,段宇翔,等. 基于评论异常度的新浪微博谣言识别方法[J]. *自动化学报*, 2020, 46(8):1689-1702.
ZHANG Yangsen, PENG Yuanyuan, DUAN Yuxiang, et al. The method of Sina Weibo rumor detecting based on comment abnormality[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(8):1689-1702.
- [15] LI Yifan, LI Junbao, PAN Weifeng. Hyperspectral image recognition using SVM combined deep learning[J]. *Journal of Internet Technology*, 2019, 20(3):851-859.
- [16] RASHID M, RAMASAMY S, RAGHAVA G P S. A simple approach for predicting protein-protein interactions[J]. *Current Protein and Peptide Science*, 2010, 11(7):589-600.
- [17] ALI A, ABD RAZAK S, OTHMAN S H, et al. Financial fraud detection based on machine learning: a systematic literature review[J]. *Applied Sciences*, 2022, 12(19):9637.
- [18] HOFMANN T, SCHÖLKOPF B, SMOLA A J. Kernel methods in machine learning[J]. *The Annals of Statistics*, 2008, 36(3):1171-1220.
- [19] 肖开研,廉洁. 基于多核支持向量机的句子分类算法[J]. *华东师范大学学报(自然科学版)*, 2023(6):85-94.
XIAO Kaiyan, LIAN Jie. Sentence classification algorithm based on multi-kernel support vector machine[J]. *Journal of East China Normal University(Natural Science)*, 2023(6):85-94.
- [20] 曹国刚,李梦雪,陈颖,等. 改进支持向量机分类方法及其在原发性肝癌筛查中的应用[J]. *应用科学学报*, 2021, 39(3):481-494.
CAO Guogang, LI Mengxue, CHEN Ying, et al. Classification method of improved support vector machine and its application in early detection of primary liver cancer[J]. *Journal of Applied Sciences*, 2021, 39(3):481-494.
- [21] 李苍柏,肖克炎,李楠,等. 支持向量机,随机森林和人工神经网络机器学习算法在地球化学异常信息提取中的对比研究[J]. *地球学报*, 2020, 41(2):309-319.
LI Cangbai, XIAO Keyan, LI Nan, et al. A comparative study of support vector machine, random forest and artificial neural network machine learning algorithms in geochemical anomaly information extraction[J]. *Acta Geoscientica Sinica*, 2020, 41(2):309-319.
- [22] CHENG Shitong, SU Xinyu, CHEN Baiyang, et al. GBMOD: a granular-ball mean-shift outlier detector[J]. *Pattern*

- Recognition, 2025, 159:111115.
- [23] XIE Qin, ZHANG Qinghua, XIA Shuyin, et al. GBG++: a fast and stable granular ball generation method for classification [J]. IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence, 2024, 8(2):2022-2036.
- [24] 肖振国,陈林书,孙少杰,等. 基于代数粒的聚类方法[J]. 计算机工程与科学,2024,46(1):150-158.
XIAO Zhenguo, CHEN Linshu, SUN Shaojie, et al. A clustering method based on algebraic granularity [J]. Computer Engineering & Science, 2024, 46(1):150-158.
- [25] 徐伟华,黄旭东,蔡可. 基于粒计算的多源信息融合方法综述[J]. 数据采集与处理,2023,38(2):245-261.
XU Weihua, HUANG Xudong, CAI Ke. Review of multi-source information fusion methods based on granular computing [J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2023, 38(2):245-261.
- [26] CHEN Qiangqiang, HE Linjie, DIAO Yanan, et al. A novel neighborhood granular meanshift clustering algorithm [J]. Mathematics, 2023, 11(1):207.
- [27] JIANG Hailiang, CHEN Yumin, KONG Liru, et al. An LVQ clustering algorithm based on neighborhood granules [J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2022, 43(5):6109-6122.
- [28] CHEN Yumin, ZHU Shunzhi, LI Wei, et al. Fuzzy granular convolutional classifiers [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2022, 426:145-162.
- [29] LI Wei, WEI Zhongnan, CHEN Yumin, et al. Fuzzy granular hyperplane classifiers [J]. IEEE Access, 2020, 8:112066-112077.
- [30] 郑晨颖,陈颖悦,侯贤宇,等. 一种邻域粒的模糊 C 均值聚类算法[J]. 山东大学学报(理学版),2024,59(5):35-44.
ZHENG Chenying, CHEN Yingyue, HOU Xianyu, et al. A neighbourhood granular fuzzy C-means clustering algorithm [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2024, 59(5):35-44.
- [31] 吴海,牛娇娇,铁文彦,等. 基于粒概念网络的概念格构造方法[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(12):21-31.
WU Hai, NIU Jiaojiao, TIE Wenyuan, et al. Concept lattice construction method based on granular concept network [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2025, 60(12):21-31.
- [32] HE Linjie, CHEN Yumin, ZHONG Caiming, et al. Granular elastic network regression with stochastic gradient descent [J]. Mathematics, 2022, 10(15):2628.
- [33] JIANG Hailiang, CHEN Yumin, JIANG Hongbo, et al. A granular sigmoid extreme learning machine and its application in a weather forecast [J]. Applied Soft Computing, 2023, 147:110799.

(编辑:陈丽萍)

(上接第 101 页)

- [17] CINI N, AYDIN Z. A deep ensemble approach for long-term traffic flow prediction [J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2024, 49(9):12377-12392.
- [18] JI Jiahao, WANG Jingyuan, HUANG Chao, et al. Spatio-temporal self-supervised learning for traffic flow prediction [EB/OL]. (2024-03-6) [2025-05-01]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.04475>.
- [19] WANG Zhaohuan, XU Yi, HAN Liangzhe, et al. Multivariate long-term traffic forecasting with graph convolutional network and historical attention mechanism [C] // Knowledge Science, Engineering and Management Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer, 2023, 14120:112-123.
- [20] LI Zhonghang, XIA Long, SHI Lei, et al. OpenCity: open spatio-temporal foundation models for traffic prediction [EB/OL]. (2024-08-16) [2025-05-01]. <https://arxiv.org/abs/2408.10269>.
- [21] 孙大盟,欧阳安杰,何立明. 基于改进 STGCN 深度学习框架的交通速度预测 [J]. 计算机技术与发展,2024,34(11):133-139.
SUN Dameng, OUYANG Anjie, HE Liming. Traffic speed prediction based on improved STGCN deep learning framework [J]. Computer Technology and Development, 2024, 34(11):133-139.
- [22] ZHANG Dongping, LAN Hao, WANG Mingting, et al. Graph convolutional networks with multi-scale dynamics for traffic speed forecasting [J]. Applied Soft Computing, 2025:174.
- [23] CAI Jiongbiao, WANG H C, HU Kun. LCDFormer: long-term correlations dual-graph transformer for traffic forecasting [J]. Expert Systems With Applications, 2024, 249:123721.
- [24] TIAN Chenyu, CHAN Waikin. Spatial-temporal attention wavenet: a deep learning framework for traffic prediction considering spatial-temporal dependencies [J]. IET Intelligent Transport Systems, 2021, 15(4):549-561.

(编辑:唐秋)