

# 一类非对称非局部扩散系统双稳行波解的稳定性

李丝雨,杨赞瑞\*

(兰州交通大学数理学院,甘肃兰州730070)

**摘要:**考虑一类非对称非局部扩散系统的双稳行波解的稳定性。在双稳行波解存在的基础上,借助上下解方法结合单调半流的收敛性结果得到双稳行波解的全局稳定性,并通过分析技术建立双稳行波解的唯一性。

**关键词:**非对称非局部扩散;双稳行波解;稳定性

**中图分类号:**O175 **文献标志码:**A

**引用格式:**李丝雨,杨赞瑞.一类非对称非局部扩散系统双稳行波解的稳定性[J].山东大学学报(理学版),2025,60(4):40-49.

## Stability of bistable waves for a class of system with asymmetric and nonlocal dispersal

LI Siyu, YANG Yunrui\*

(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

**Abstract:** This paper considers the stability of bistable traveling wave solutions for a class of system with asymmetric and nonlocal dispersal. On the basis of the existence of bistable waves, the global stability of bistable waves is obtained with the help of the method of super-and sub-solutions combining with the convergence results of monotone semiflows. Then, the uniqueness of bistable waves is established by using the analysis techniques.

**Key words:** asymmetric and nonlocal dispersal; bistable traveling waves; stability

## 0 引言

反应扩散方程<sup>[1]</sup>常用来描述生物学和物理学等学科领域中发生的扩散和反应过程<sup>[2-4]</sup>。而行波解作为反应扩散方程的一类稳态解,具有空间平移不变性,可以模拟自然界的许多传播现象,例如疾病的传播、种群的增长等,因此,反应扩散方程的行波解研究引起了学者们的关注,并取得了一些有意义的研究成果<sup>[5-7]</sup>。例如,Hsu等<sup>[2]</sup>研究了Laplace扩散传染病系统

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = d_1 \Delta u_1(x,t) - a_{11} u_1(x,t) + h(u_2(x,t)), & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = d_2 \Delta u_2(x,t) - a_{22} u_2(x,t) + g(u_1(x,t)), & x \in \mathbf{R}, t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

单稳行波解的存在性、单调性、唯一性和渐近行为。此后,Yu等<sup>[5]</sup>将其研究成果推广到离散情形,Xu等<sup>[6]</sup>研究了传染病系统(1)中当 $d_2 = 0$ ,  $h(u_2) = a_{12} u_2$ 时,相应双稳行波解的存在性、唯一性和全局稳定性。但是,上述工作考虑的都是单调系统。2009年,吴事良<sup>[7]</sup>利用新的区间单调条件并借助上下解方法结合单调

收稿日期:2024-05-22;网络出版时间:2024-12-16 16:44:27

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12361038)

第一作者:李丝雨(1999—),女,硕士研究生,研究方向为反应扩散、方程微分方程与动力系统、非线性泛函分析。

E-mail:lsy04192022@163.com

\*通信作者:杨赞瑞(1979—),女,教授,博士,研究方向为反应扩散方程、泛函微分方程、微分方程与动力系统。E-mail:lily1979101@163.com

半流的收敛性结果建立了非单调系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = d_1 \Delta u_1(x,t) + h_1(u_1(x,t), u_2(x,t)), & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = d_2 \Delta u_2(x,t) + h_2(u_1(x,t), u_2(x,t)), & x \in \mathbf{R}, t > 0, \end{cases} \quad (2)$$

并研究双稳行波解的唯一性和全局渐近稳定性,并将此结果分别应用到传染病模型

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = d_1 \Delta u_1(x,t) - a_{11} u_1(x,t) + a_{12} u_2(x,t), & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = d_2 \Delta u_2(x,t) - a_{22} u_2(x,t) + g(u_1(x,t)), & x \in \mathbf{R}, t > 0, \end{cases} \quad (3)$$

和竞争模型

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = d_1 \Delta u_1(x,t) + u_1(x,t) M(u_1(x,t), u_2(x,t)), & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = d_2 \Delta u_2(x,t) + u_2(x,t) N(u_1(x,t), u_2(x,t)), & x \in \mathbf{R}, t > 0. \end{cases} \quad (4)$$

另外,与常用来刻画相对稠密条件下的 Laplace 扩散(局部扩散)相比,个体的扩散和运动还会受位置、周围地区乃至整个区域的影响,这就是非局部扩散,用积分项  $J * u - u = \int_{\mathbf{R}} J(x-y) u(y,t) dy - u(x,t)$  来表示,其中,  $J$  是关于空间的概率密度函数(核函数),  $J(x-y)$  表示个体从空间位置  $y$  点到  $x$  点的概率密度。当核函数  $J$  具有对称性( $J$  是偶函数:  $J(x) = J(-x)$ )时,非局部扩散是 Laplace 扩散的自然逼近。基于 Bates 等<sup>[4]</sup>和 Coville 等<sup>[8-9]</sup>对非局部扩散标量方程行波解的研究,越来越多学者对非局部扩散系统行波解进行研究<sup>[10-13]</sup>。李孝武等<sup>[10]</sup>借助加权能量法结合连续性方法考虑了对称非局部扩散的时滞 SVIR 模型单稳行波解的指数稳定性。Zhang 等<sup>[11]</sup>借助单调半流理论和动力系统方法建立了对称非局部扩散的两物种 L-V 强竞争系统双稳行波解的存在性和全局稳定性。2022 年,郝玉财<sup>[12]</sup>利用强比较原理结合挤压技术<sup>[13]</sup>得到了对称非局部扩散系统

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = J_1 * u_1(x,t) - u_1(x,t) - \mu_1 u_1(x,t) + h(u_2(x,t)), & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = J_2 * u_2(x,t) - u_2(x,t) - \mu_2 u_2(x,t) + g(u_1(x,t)), & x \in \mathbf{R}, t > 0 \end{cases} \quad (5)$$

双稳波前解的稳定性。此类工作还可参见文献[14-16]。

现实中,由于受到温度和食物等外部环境的影响,物种的扩散及运动具有方向的选择性,例如,捕食者会优先选择食饵密度高的方向移动,菠菜的生长依赖于光照的时间及强度等,即  $J(\cdot)$  可以非对称,也就是不必满足偶性。因此,利用非对称核函数刻画疾病的传播更符合客观实际<sup>[17-18]</sup>。2007 年, Coville<sup>[17]</sup>首次考察了非线性项分别为双稳型和点火型时的一类非对称非局部扩散标量方程行波解的存在性。此后, Coville 等<sup>[18]</sup>还建立了非线性项为单稳型时相应标量方程行波解的存在性和指数渐近行为。至此,基于 Coville 等<sup>[17-18]</sup>的工作,非对称非局部扩散方程行波解的研究逐步发展起来<sup>[19-21]</sup>。例如, Li 等<sup>[19]</sup>研究了系统(5)非对称情形下单稳行波解的(不)存在性、渐近行为和唯一性。2022 年, Hu 等<sup>[20]</sup>继续研究了系统(5)双稳行波解的存在性和渐近行为。同年,杨璐<sup>[21]</sup>还将 Li 等<sup>[19]</sup>的工作推广到时滞非对称非局部扩散传染病系统。而上述涉及的非对称非局部扩散方程的研究工作大多是对单稳行波解和对标量方程或无时滞系统双稳行波解存在性的研究,目前对非对称非局部扩散系统双稳行波解稳定性的研究结果还不多见。

基于此,本文借助上、下解方法,并结合单调半流收敛性结果研究相应于系统(2)的非局部扩散情形,即

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = d_1 [J_1 * u_1(x,t) - u_1(x,t)] + h_1(u_1(x,t), u_2(x,t)), & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = d_2 [J_2 * u_2(x,t) - u_2(x,t)] + h_2(u_1(x,t), u_2(x,t)), & x \in \mathbf{R}, t > 0 \end{cases} \quad (6)$$

当扩散项非对称时,系统(6)双稳行波解的全局稳定性和唯一性,其中,  $d_i > 0 (i=1,2)$  是扩散系数,  $h_1$  和  $h_2$  分别表示由感染者和细菌相互作用引起的细菌和感染者的净增长率。注意到非局部扩散项和更一般的非线性反应项的出现,使得验证系统(6)产生的解半流满足单调半流的收敛性结果变得相对复杂,需要更为细致的分析技术。特别地,当  $d_1 = d_2 = 1$ ,  $h_1(u_1, u_2) = -\mu_1 u_1 + h(u_2)$ ,  $h_2(u_1, u_2) = -\mu_2 u_2 + g(u_1)$  时,式(6)可退化为式(5)。因此,本文将模型(2)–(4)双稳行波解的研究结果推广到非局部扩散情形,并补充完善对非对称非局部扩散系统双稳行波解稳定性的研究。

## 1 预备知识

首先,给出本文的工作空间和所需的记号。

对任意的  $\mathbf{a} := (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$  和  $\mathbf{b} := (b_1, b_2) \in \mathbf{R}^2$ , 若  $a_i \leq b_i (i=1,2)$ , 则  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ ; 若  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$  但  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ , 则称  $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ ; 若  $a_i < b_i (i=1,2)$ , 则称  $\mathbf{a} \ll \mathbf{b}$ 。记  $\mathcal{A}_1 := \mathcal{M}$  和  $\mathcal{A}_2 := \mathcal{X}$ , 其中  $\mathcal{M}$  表示从  $\mathbf{R}$  到  $\mathbf{R}^2$  的所有单调非减函数组成的集合,  $\mathcal{X} = \text{BUC}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^2)$  是从  $\mathbf{R}$  到  $\mathbf{R}^2$  的有界且一致连续函数全体构成的 Banach 空间。文中用到的  $\|\cdot\|$  为  $\mathbf{R}^2$  中的欧几里得范数。

对任意的  $i=1,2$ , 记  $\mathcal{A}_i^+ = \{(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{A}_i : \phi_j(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}, j=1,2\}$ 。易知,  $\mathcal{A}_i^+$  是  $\mathcal{A}_i$  中的锥。对任意的  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathcal{A}_i$ , 若  $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \mathcal{A}_i^+$ , 则称  $\mathbf{u} \geq \mathbf{v}$ ; 若  $\mathbf{u} \geq \mathbf{v}$  但  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ , 则称  $\mathbf{u} > \mathbf{v}$ ; 若  $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \text{int}(\mathcal{A}_i^+)$ , 则称  $\mathbf{u} \gg \mathbf{v}$ 。对任意的  $r_1, r_2 \in \mathcal{A}_i$  且  $r_1 < r_2$ , 定义  $\mathcal{A}_{i[r_1, r_2]} := \{\mathbf{u} \in \mathcal{A}_i : r_1 \leq \mathbf{u} \leq r_2\}$  并给  $\mathcal{A}_i$  赋以紧开拓扑。

其次,给出本文所需的假设条件:

(A<sub>1</sub>) 对任意的  $z \in \mathbf{R}$ ,  $J_i \in C^1(\mathbf{R})$  具有紧支集且  $J_i(z) > 0$ ,  $\int_{\mathbf{R}} J_i(z) dz = 1$ ; 并对任意的  $\mu \in \mathbf{R}$ , 有

$$\int_{\mathbf{R}} J_i(z) e^{-\mu z} dz \geq 1。$$

(A<sub>2</sub>) 对任意的  $(h_1, h_2) \in C^2(\mathbf{R}_+^2, \mathbf{R}^2)$ , 存在  $\mathbf{K}_0 := (0, 0)$ ,  $\mathbf{K}_1 := (k_1, k_2)$  和  $\mathbf{K}_2 := (k_1^*, k_2^*)$  使得  $h_i(\mathbf{K}_0) = h_i(\mathbf{K}_1) = h_i(\mathbf{K}_2) = 0 (i=1,2)$ ; 此外,  $h_i (i=1,2)$  在  $\mathbf{K}_0$  和  $\mathbf{K}_2$  之间仅有一个平衡点, 而在  $\mathbf{K}_0$  和  $\mathbf{K}_2$  之外没有平衡点, 其中  $\mathbf{K}_1 \gg \mathbf{K}_0 := (0, 0)$  和  $\mathbf{K}_2 \gg \mathbf{K}_0 := (0, 0)$ 。

(A<sub>3</sub>) 对  $1 \leq i \neq j \leq 2$  和  $(u_1, u_2) \in [0, k_1^*] \times [0, k_2^*]$ , 有  $\partial_i h_i(0, 0) < 0$ ,  $\partial_i h_i(k_1, k_2) < 0$ ,  $\partial_i h_i(k_1^*, k_2^*) < 0$  和  $\partial_i h_j(u_1, u_2) \geq 0$ ; 此外,  $\partial_1 h_1(0, 0) \partial_2 h_2(0, 0) > \partial_2 h_1(0, 0) \partial_1 h_2(0, 0)$ ,  $\partial_1 h_1(k_1, k_2) \partial_2 h_2(k_1, k_2) < \partial_2 h_1(k_1, k_2) \partial_1 h_2(k_1, k_2)$ ,  $\partial_1 h_1(k_1^*, k_2^*) \partial_2 h_2(k_1^*, k_2^*) > \partial_2 h_1(k_1^*, k_2^*) \partial_1 h_2(k_1^*, k_2^*)$ 。

(A<sub>4</sub>) 当  $(u_1, u_2) \in [0, k_1] \times [0, k_2]$  时, 有  $h_1(u_1, u_2) \geq \partial_1 h_1(k_1, k_2)(u_1 - k_1) + \partial_2 h_1(k_1, k_2)(u_2 - k_2)$  和  $h_2(u_1, u_2) \geq \partial_1 h_2(k_1, k_2)(u_1 - k_1) + \partial_2 h_2(k_1, k_2)(u_2 - k_2)$ ;

当  $(u_1, u_2) \in [k_1, k_1^*] \times [k_2, k_2^*]$  时, 有  $h_1(u_1, u_2) \leq \partial_1 h_1(k_1, k_2)(u_1 - k_1) + \partial_2 h_1(k_1, k_2)(u_2 - k_2)$  和  $h_2(u_1, u_2) \leq \partial_1 h_2(k_1, k_2)(u_1 - k_1) + \partial_2 h_2(k_1, k_2)(u_2 - k_2)$ 。

(A<sub>5</sub>) 对  $i=1,2$ , 有  $d_i > 2\tilde{N}$ , 其中

$$\tilde{N} = \max_{(u_1, u_2) \in [0, k_1^*] \times [0, k_2^*]} \{|\partial_1 h_1(u_1, u_2)|, |\partial_2 h_1(u_1, u_2)|, |\partial_1 h_2(u_1, u_2)|, |(\partial_2 h_2(u_1, u_2))|\}。$$

条件(A<sub>1</sub>)表明  $J_i (i=1,2)$  可以非对称, 也就是不必满足偶性; (A<sub>2</sub>) 和 (A<sub>3</sub>) 说明系统(6)是单调的双稳系统, 其中  $\mathbf{K}_0$  和  $\mathbf{K}_2$  是系统(6)的稳定平衡点,  $\mathbf{K}_1$  是系统(6)的不稳定平衡点; (A<sub>2</sub>)–(A<sub>4</sub>) 保证了当系统(6)分别限制在区间  $[\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1]$  和  $[\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2]$  上时式(6)可以看作两个单稳子系统, 且这两个单稳子系统存在行波解; (A<sub>5</sub>) 是证明式(6)双稳行波解的稳定性时所需的技术性条件。

## 2 双稳行波解

### 2.1 解的适定性

首先, 研究初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = d_1(J_1 * u_1(x,t) - u_1(x,t)) + h_1(u_1(x,t), u_2(x,t)), \\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = d_2(J_2 * u_2(x,t) - u_2(x,t)) + h_2(u_1(x,t), u_2(x,t)), \\ (u_1(x,0), u_2(x,0)) = (\phi_1(x), \phi_2(x)) \end{cases} \quad (7)$$

解的存在唯一性,其中  $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0, +\infty)$ 。

记  $(P_1(t), P_2(t))$  为非局部扩散系统

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = J_1 * u_1(x,t) - u_1(x,t), & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = J_2 * u_2(x,t) - u_2(x,t), & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ (u_1(x,0), u_2(x,0)) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)), & x \in \mathbf{R}, t = 0 \end{cases} \quad (8)$$

的解半群。由文献[22]可知,对任意的  $m \geq 1$  和  $i = 1, 2, P_i(t)$  可以写为

$$P_i(t)[\varphi_i](x) = e^{-t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} a_m(\varphi_i)(x), \quad (9)$$

其中,  $a_0(\varphi_i) = \varphi_i, a_m(\varphi_i) = J_i * a_{m-1}(\varphi_i)$ 。

令  $\mathbf{w} = (u_1, u_2)^T, \mathbf{H}(\mathbf{w}) = (h_1(u_1, u_2), h_2(u_1, u_2))^T$  和  $\mathbf{P}(t) = \text{diag}(P_1(d_1 t), P_2(d_2 t))$ , 利用常数变易法<sup>[23]</sup>可知,系统(7)等价于

$$\mathbf{w}(x,t) = \mathbf{P}(t)[\mathbf{w}(\cdot, 0)](x) + \int_0^t \mathbf{P}(t-s)\mathbf{H}(\mathbf{w}(\cdot, s))(x) ds, \quad \forall x \in \mathbf{R}, t \geq 0. \quad (10)$$

若  $\mathbf{w}(x, t)$  满足(10), 则称  $\mathbf{w}(x,t)$  是系统(6)的一个适度解。由文献[22-23]易证:

$$\frac{\partial [P_i(d_i t) \mathbf{w}_{i0}](x)}{\partial t} = -d_i [P_i(d_i t) \mathbf{w}_{i0}](x) + d_i \int_{\mathbf{R}} J_i(y) [P_i(d_i t) \mathbf{w}_{i0}](x-y) dy,$$

其中  $\mathbf{w}(\cdot, 0) = (w_{10}, w_{20}) = (\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{A}_i (i=1, 2)$ , 从而式(10)的右边关于  $t$  可微, 所以适度解  $\mathbf{w}(x,t)$  也是系统(7)的古典解。

下面给出系统(10)上、下解的定义。

**定义 1** 函数  $\mathbf{w} \in C([0, T], \mathcal{A}_i) (i=1, 2), 0 < T \leq +\infty$ , 若对任意的  $x \in \mathbf{R}, t \in [0, T], \mathbf{w}$  满足

$$\mathbf{w}(x,t) \geq (\leq) \mathbf{P}(t)[\mathbf{w}(\cdot, 0)](x) + \int_0^t \mathbf{P}(t-s)\mathbf{H}(\mathbf{w}(\cdot, s))(x) ds, \quad (11)$$

则称  $\mathbf{w}(x,t)$  为系统(10)的上解(下解)。

**定义 2** 若对任意的  $t \in (0, T)$ , 光滑函数  $(u_1, u_2) \in C([0, T], \mathcal{A}_i) (i=1, 2)$ , 且对任意的  $x \in \mathbf{R}$  和  $t \in [0, T)$ , 有

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} \geq (\leq) d_1(J_1 * u_1(x,t) - u_1(x,t)) + h_1(u_1(x,t), u_2(x,t)), \\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} \geq (\leq) d_2(J_2 * u_2(x,t) - u_2(x,t)) + h_2(u_1(x,t), u_2(x,t)), \\ (u_1(x,0), u_2(x,0)) \geq (\leq) (\phi_1(x), \phi_2(x)), \end{cases} \quad (12)$$

则称  $(u_1(x,t), u_2(x,t))$  为系统(7)的上解(下解)并满足系统(11), 其中  $T > 0$ 。

**引理 1** (初值问题解的存在唯一性) 若  $(A_1) - (A_3)$  成立, 则对任意的  $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{A}_i (i=1, 2)$ , 系统(7)有唯一的适度解  $(u_1, u_2) \in C(\mathbf{R}_+, \mathcal{A}_i) (i=1, 2)$ 。

**证明** 证明过程类似文献[11], 故此省略。

### 2.2 双稳行波解的稳定性

本节主要研究系统(6)非减双稳行波解的稳定性。

系统(6)连接  $\mathbf{K}_0$  和  $\mathbf{K}_2$  的行波解是指形如  $\Phi(x-ct) = (U_1(x-ct), U_2(x-ct))$ , 且满足

$$\begin{cases} -cU_1'(\xi) = d_1(J_1 * U_1(\xi) - U_1(\xi)) + h_1(U_1(\xi), U_2(\xi)), \\ -cU_2'(\xi) = d_2(J_2 * U_2(\xi) - U_2(\xi)) + h_2(U_1(\xi), U_2(\xi)) \end{cases} \quad (13)$$

及渐近边界条件

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (U_1(\xi), U_2(\xi)) = \mathbf{K}_0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (U_1(\xi), U_2(\xi)) = \mathbf{K}_2$$

的解,其中  $\xi = x - ct$ ,  $c \in \mathbf{R}$  为波速。

令集合  $K := \{\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2\}$ ,  $\Gamma_t$  是式(6)关于时间  $t$  的映射,即  $\Gamma_t = (\Gamma_t^{(1)}, \Gamma_t^{(2)}) : \mathcal{M}_{[\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_2]} \rightarrow \mathcal{M}_{[\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_2]}$ , 其中

$$(\Gamma_t^{(1)}, \Gamma_t^{(2)})[\boldsymbol{\phi}](x) = (u_1(x, t; \boldsymbol{\phi}), u_2(x, t; \boldsymbol{\phi})), \quad x \in \mathbf{R}, t \geq 0. \quad (14)$$

显然,  $\{\Gamma_t\}_{t \geq 0}$  是  $\mathcal{M}_{[\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_2]}$  上的一个半流。

研究系统(6)双稳行波解的稳定性时,先要建立系统(6)双稳行波解(非减波和非增波)的存在性。由于利用弱紧单调半流理论建立系统(6)非减波的存在性是平凡的,故此仅给出双稳波的存在性结论,省略其证明过程。

**定理 1** (非减波的存在性) 若  $(A_1) - (A_4)$  成立,则存在  $c \in \mathbf{R}$ ,使得系统(6)存在一个连接  $\mathbf{K}_0$  和  $\mathbf{K}_2$  的非减行波解  $\boldsymbol{\Phi}(x - ct) := (U_1(x - ct), U_2(x - ct))$ 。进一步,得到的双稳行波解  $\boldsymbol{\Phi}(x - ct)$  也是系统(7)的古典解并且是严格增的。

同理,还可以建立系统(6)非增波的存在性。

系统(6)连接  $\mathbf{K}_2$  和  $\mathbf{K}_0$  的行波解是指形如  $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x - \tilde{c}t) = (\tilde{U}_1(x - \tilde{c}t), \tilde{U}_2(x - \tilde{c}t))$ ,且满足

$$\begin{cases} -\tilde{c}\tilde{U}_1'(\xi) = d_1(J_1 * \tilde{U}_1(\xi) - \tilde{U}_1(\xi)) + h_1(\tilde{U}_1(\xi), \tilde{U}_2(\xi)), \\ -\tilde{c}\tilde{U}_2'(\xi) = d_2(J_2 * \tilde{U}_2(\xi) - \tilde{U}_2(\xi)) + h_2(\tilde{U}_1(\xi), \tilde{U}_2(\xi)) \end{cases} \quad (15)$$

及渐近边界条件

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (\tilde{U}_1(\xi), \tilde{U}_2(\xi)) = \mathbf{K}_2, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (\tilde{U}_1(\xi), \tilde{U}_2(\xi)) = \mathbf{K}_0$$

的解,其中  $\xi = x - \tilde{c}t$ ,  $\tilde{c} \in \mathbf{R}$  为波速。

**定理 2** (非增波的存在性) 若  $(A_1) - (A_4)$  成立,则存在  $\tilde{c} \in \mathbf{R}$ ,使得系统(6)存在一个连接  $\mathbf{K}_2$  和  $\mathbf{K}_0$  的非增行波解  $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x - \tilde{c}t) := (\tilde{U}_1(x - \tilde{c}t), \tilde{U}_2(x - \tilde{c}t))$ 。进一步,双稳行波解  $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x - \tilde{c}t)$  也是式(7)的古典解并且是严格减的。

接下来,借助上下解方法结合单调半流的收敛性结果(命题 1)建立系统(6)非减双稳行波解的全局稳定性。

对  $\forall y \in \mathbf{R}$ ,  $x \in \mathbf{R}$  和  $\varphi \in \mathcal{B}$ , 令  $T_y : T_y(\varphi)(x) = \varphi(x - y)$  是定义在  $\mathcal{B}$  上的平移算子,易知  $\hat{P}(t) = T_{-ct} \circ P(t)$  是  $\mathcal{B}$  上的一个半群。令  $\Gamma_t$  是系统(6)在  $\mathcal{B}$  上的单调解半流,对任意的  $t \geq 0$ ,定义  $\hat{\Gamma}_t = T_{-ct} \circ \Gamma_t$ ,则  $\hat{\Gamma}_t$  也是  $\mathcal{B}$  上的单调半流,且对任意的  $\varphi \in \mathcal{B}$ ,  $\hat{w}(x, t) := \hat{\Gamma}_t(\varphi)(z)$ , 满足

$$\hat{w}(\cdot, t) = \hat{P}(t)[\hat{w}(\cdot, 0)] + \int_0^t \hat{P}(t-s) \mathbf{H}(\hat{w}(\cdot, s)) ds, \quad \forall t \geq 0. \quad (16)$$

显然,  $\boldsymbol{\Phi}(z)$  是半流  $\hat{\Gamma}_t$  的平衡点。记式(16)的以  $\hat{w}(\cdot, 0; \boldsymbol{\phi}) := \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{B}_{[\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_2]}$  为初值的解为  $\hat{w}(z, t; \boldsymbol{\phi}) = (u_1(z, t), u_2(z, t))$ , 从而以  $\boldsymbol{\phi}$  为初值的系统(10)的解  $w(x, t; \boldsymbol{\phi}) = \hat{w}(x - ct, t; \boldsymbol{\phi})$ 。

由于系统(16)是单调的,故不难建立下面的比较原理。

**引理 2** (比较原理) 假设  $(A_1) - (A_4)$  成立。令  $(u_1^+(z, t), u_2^+(z, t))$  和  $(u_1^-(z, t), u_2^-(z, t))$  为系统(16)在  $\mathbf{R} \times [0, +\infty)$  上的一对解和上解。若对任意的  $z \in \mathbf{R}$ , 有  $(u_1^-(z, 0), u_2^-(z, 0)) \leq (u_1^+(z, 0), u_2^+(z, 0))$ , 则对任意的  $z \in \mathbf{R}$  和  $t \geq 0$ , 有  $(u_1^-(z, t), u_2^-(z, t)) \leq (u_1^+(z, t), u_2^+(z, t))$ 。

类似于定义 1,下面给出系统(16)上、下解的定义。

**定义 3** 若对任意的  $z \in \mathbf{R}$  和  $t \in (0, T)$ , 光滑函数  $(u_1, u_2) \in C([0, T], \mathcal{B})$  且对任意  $z \in \mathbf{R}$  和  $t \in [0, T)$ , 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(z,t)}{\partial t} \geq (\leq) d_1(J_1 * u_1(z,t) - u_1(z,t)) + cu_{1z}(z,t) + h_1(u_1(z,t), u_2(z,t)), \\ \frac{\partial u_2(z,t)}{\partial t} \geq (\leq) d_2(J_2 * u_2(z,t) - u_2(z,t)) + cu_{2z}(z,t) + h_2(u_1(z,t), u_2(z,t)), \\ (u_1(z,0), u_2(z,0)) \geq (\leq) (\phi_1(z), \phi_2(z)), \end{cases} \quad (17)$$

则称  $(u_1(z,t), u_2(z,t))$  是系统 (16) 的上解 (下解), 其中  $T > 0$ 。

为了方便, 定义算子  $\mathcal{N}_i: C([0, T], \mathcal{X}) \rightarrow C([0, T], \mathcal{X})$  ( $i=1, 2$ ) 分别为:

$$\mathcal{N}_1[u_1, u_2](z, t) = \frac{\partial u_1(z, t)}{\partial t} - d_1(J_1 * u_1(z, t) - u_1(z, t)) - cu_{1z}(z, t) - h_1(u_1(z, t), u_2(z, t)),$$

$$\mathcal{N}_2[u_1, u_2](z, t) = \frac{\partial u_2(z, t)}{\partial t} - d_2(J_2 * u_2(z, t) - u_2(z, t)) - cu_{2z}(z, t) - h_2(u_1(z, t), u_2(z, t)),$$

其中  $T > 0$ 。

为了利用上下解方法结合单调半流的收敛性结果建立系统 (6) 双稳行波解的稳定性, 需要建立系统 (16) 解的有界性估计 (引理 3) 以及借助行波解和辅助函数构造初值问题 (7) 的一对上、下解 (引理 4)。引理 3 和引理 4 的证明是平凡的, 可分别参见文献 [11] 的引理 3.4 和文献 [7] 的引理 5.1.3, 故此省略。

**引理 3** 假设  $(A_1) - (A_4)$  成立, 且  $\phi \in \mathcal{X}_{[K_0, K_2]}$  满足

$$\limsup_{z \rightarrow -\infty} \phi(z) \ll K_1 \ll \liminf_{z \rightarrow +\infty} \phi(z), \quad (18)$$

则对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\hat{z} = \hat{z}(\varepsilon, \phi) > 0$  和充分大的  $\hat{t} = \hat{t}(\varepsilon, \phi)$  使得对任意的  $z \in \mathbf{R}$ , 有

$$\Phi(z - \hat{z}) - \varepsilon \leq \hat{w}(z, \hat{t}; \phi) \leq \Phi(z + \hat{z}) + \varepsilon.$$

由  $(A_3)$  易证, 矩阵  $\partial_j h_i(K_0)$  和  $\partial_j h_i(K_2)$  ( $1 \leq i, j \leq 2$ ) 的特征值都是负的, 记  $v^\pm = (v_1^\pm, v_2^\pm)$  为矩阵  $(\lambda_{ij}^\pm)$  相应于主特征值的正特征向量, 其中  $\lambda_{ij}^\pm$  为常数且满足  $\partial_j h_i(K_0) < \lambda_{ij}^\pm$ ,  $\partial_j h_i(K_2) < \lambda_{ij}^\pm$  ( $1 \leq i, j \leq 2$ ) 和  $K_0$  为线性系统

$$\begin{cases} \frac{dr_1^\pm(t)}{dt} = \lambda_{11}^\pm r_1^\pm + \lambda_{12}^\pm r_2^\pm, & t > 0, \\ \frac{dr_2^\pm(t)}{dt} = \lambda_{21}^\pm r_1^\pm + \lambda_{22}^\pm r_2^\pm, & t > 0 \end{cases}$$

的渐近稳定平衡点。

令  $v_1(\xi), v_2(\xi) \in \mathbf{C}^2$  为正光滑函数且满足: 在  $\mathbf{C}^2$ -拓扑下, 当  $\xi \rightarrow \pm\infty$  时,  $v(\xi) := (v_1(\xi), v_2(\xi)) \rightarrow v^\pm$ 。

**引理 4** 假设  $(A_1) - (A_4)$  成立, 则存在正常数  $\sigma > 0$ ,  $\zeta > 0$  和  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得对任意的  $\xi_0 \in \mathbf{R}$  和  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , 函数

$$w^\pm(z, t) = \Phi(z \pm \xi_0 \pm \zeta \varepsilon (1 - e^{-\sigma t})) \pm \varepsilon v(z \pm \xi_0) e^{-\sigma t}, \quad z \in \mathbf{R}, t > 0$$

分别为系统 (16) 的上解和下解。

另外, 为了利用单调半流的收敛性结果 (命题 1) 还需建立系统 (6) 行波解的 Lyapunov 稳定性。

**命题 1** [24] (单调半流的收敛性结果) 令  $E$  是具有非空正锥的有序 Banach 空间,  $B$  是  $E$  中的闭凸锥且  $R_t: B \rightarrow B$  是连续单调半流。若存在从  $[0, 1]$  到  $B$  的一个子集的单调同胚  $\vartheta$ , 使得以下 3 个条件成立:

- (i) 对任意的  $s \in [0, 1]$ ,  $\vartheta(s)$  是  $R_t: B \rightarrow B$  的稳定平衡点;
- (ii)  $E_{[\vartheta(0), \vartheta(1)]}$  的每个向前轨道  $R_t$  都是预紧的;
- (iii) 对某个  $s_0 \in [0, 1)$  和任意的  $\psi \in E_{[\vartheta(0), \vartheta(1)]}$ , 若  $\omega(\psi) > \vartheta(s_0)$ , 则存在  $s_1 \in (s_0, 1)$ , 使得  $\omega(\psi) \geq \vartheta(s_1)$ 。

则在  $B$  中对满足  $\omega(\phi_0) \cap E_{[\vartheta(0), \vartheta(1)]} \neq \emptyset$  的  $R_t$  的预紧轨道  $\gamma^+(\phi_0)$ , 存在  $s_* \in [0, 1]$  使得  $\omega(\phi_0) = \vartheta(s_*)$ , 其中  $E_{[\vartheta(0), \vartheta(1)]} = \{\psi \in E: \vartheta(0) \leq \psi \leq \vartheta(1)\}$ ,  $\omega(\phi_0)$  为  $\phi_0$  的  $\omega$  极限集。

**引理 5** (行波解的 Lyapunov 稳定性) 假设  $(A_1) - (A_4)$  成立, 则双稳行波解  $\Phi(z) = (U_1(z), U_2(z))$  是系统 (14) 解半流  $\hat{F}_t$  的 Lyapunov 稳定平衡点, 即对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\hat{\delta} > 0$ , 使得  $\|\phi(\cdot) - \Phi(\cdot)\| < \hat{\delta}$  对任意

的  $t \geq 0$  都成立, 则

$$\|\hat{w}(\cdot, t; \phi) - \Phi(\cdot)\| < \varepsilon.$$

**证明** 证明思路类似文献[11]引理 3.6, 故此省略。

下面给出系统(6)双稳行波解的稳定性结论及其证明。

**定理 3** (双稳行波解的稳定性) 假设(A<sub>1</sub>)—(A<sub>5</sub>)成立, 令  $\Phi(x-ct) = (U_1(x-ct), U_2(x-ct))$  是系统(6)连接  $K_0$  和  $K_2$  的双稳行波解, 且  $w(x, t; \phi) = (u_1(x, t; \phi), u_2(x, t; \phi))$  是系统(6)满足初始数据  $\phi \in \mathcal{B}_{[K_0, K_2]}^*$  的解, 则对满足(18)的  $\phi$ , 存在  $s_\phi \in \mathbf{R}$ , 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|w(\cdot, t; \phi) - \Phi(\cdot - ct + s_\phi)\| = 0.$$

**证明** 注意到, 对任意的  $\phi \in \mathcal{B}_{[K_0, K_2]}^*$ ,  $\hat{\Gamma}_t(\phi) := \hat{w}(\cdot, t; \phi)$  是满足初始数据  $\phi$  的系统(16)的唯一解。另外, 半流  $\hat{\Gamma}_t: \mathcal{B}_{[K_0, K_2]}^* \rightarrow \mathcal{B}_{[K_0, K_2]}^*$  的单调性显然。令  $\varepsilon_0 = \min_{z \in \mathbf{R}} \min\{v_1(z), v_2(z)\}$  并假定  $\phi(z)$  满足式(18)。由引理 3 可知, 存在  $\hat{z}$  和  $\hat{t}$ , 使得对任意  $\delta \in (0, \delta_0)$ , 有  $\Phi(z - \hat{z}) - \delta\varepsilon_0 \leq \hat{w}(\cdot, \hat{t}; \phi) \leq \Phi(z + \hat{z}) + \delta\varepsilon_0$ 。

记  $\hat{\phi}(z) = \hat{w}(z, \hat{t}; \phi)$ , 根据引理 4 中  $w^+(z, t)$  的构造, 可得

$$w^-(z, 0) \leq \hat{w}(z, 0; \hat{\phi}) \leq w^+(z, 0), \quad \forall z \in \mathbf{R}.$$

由比较原理(引理 2)可知, 对任意的  $z \in \mathbf{R}$  和  $t \geq 0$ , 有  $w^-(z, t) \leq \hat{w}(z, t; \hat{\phi}) \leq w^+(z, t)$ , 即

$$\Phi(z - \hat{z} - \zeta\varepsilon(1 - e^{-\sigma t})) - \varepsilon v(z - \hat{z})e^{-\sigma t} \leq \hat{w}(z, t; \hat{\phi}) \leq \Phi(z + \hat{z} + \zeta\varepsilon(1 - e^{-\sigma t})) + \varepsilon v(z + \hat{z})e^{-\sigma t}. \quad (19)$$

故由式(19)可知, 向前正轨道  $\gamma^+(\phi) := \{\hat{\Gamma}_t(\phi) : t \geq 0\}$  在  $\mathcal{B}$  上有界。

为了利用命题 1, 下面先证明  $\gamma^+(\phi)$  是预紧集, 即命题 1 的条件(ii)。由式(19)和 Arzla-Ascoli 定理可知, 只需证对任意的  $n \geq 1$ ,  $\{\hat{w}(z, t_n; \phi)\}_{n \geq 1}$  在  $z \in \mathbf{R}$  中等度连续。因为  $\hat{w}(z, t_n; \phi) = w(z + ct_n, t_n; \phi)$ , 所以对任意的  $n \geq 1$ ,  $\{\hat{w}(z, t_n; \phi)\}_{n \geq 1}$  在  $z \in \mathbf{R}$  中的等度连续性与  $\{w(x, t_n; \phi)\}_{n \geq 1}$  在  $x \in \mathbf{R}$  中的等度连续性等价。

为了方便, 令  $u_{1n}(x, t_n) = u_1(x, t_n; \phi)$  和  $u_{2n}(x, t_n) = u_2(x, t_n; \phi)$ 。对任意的  $t \geq -t_n$  和  $x \in \mathbf{R}$ , 定义

$$\bar{u}_{1n}(x, t_n) = u_{1n}(x, t + t_n), \quad \bar{u}_{2n}(x, t_n) = u_{2n}(x, t + t_n).$$

显然,  $\bar{u}_{1n}(x, t_n)$  和  $\bar{u}_{2n}(x, t_n)$  满足系统(7)。对任意的  $\eta \in \mathbf{R}$ , 定义

$$U_{n,\eta}(x, t) := \bar{u}_{1n}(x + \eta, t) - \bar{u}_{1n}(x, t), \quad V_{n,\eta}(x, t) := \bar{u}_{2n}(x + \eta, t) - \bar{u}_{2n}(x, t), \\ \hat{J}_i(x) := J_i(x + \eta) - J_i(x) \quad (i = 1, 2).$$

考虑如下初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U_{n,\eta}(x, t) = d_1 \int_{\mathbf{R}} \hat{J}_1(x-y) \bar{u}_{1n}(y, t) dy - d_1 U_{n,\eta}(x, t) + h_1(U_{n,\eta}(x, t), V_{n,\eta}(x, t)), & (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+, \\ \frac{\partial}{\partial t} V_{n,\eta}(x, t) = d_1 \int_{\mathbf{R}} \hat{J}_2(x-y) \bar{u}_{2n}(y, t) dy - d_2 V_{n,\eta}(x, t) + h_2(U_{n,\eta}(x, t), V_{n,\eta}(x, t)), & (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+, \\ (U_{n,\eta}(x, s), V_{n,\eta}(x, s)) = (u_1(x + \eta, s + t_n; \phi) - u_1(x, s + t_n; \phi), u_2(x + \eta, s + t_n; \phi) - u_2(x, s + t_n; \phi)), & x \in \mathbf{R}, s \in [-t_n, 0]. \end{cases} \quad (20)$$

由条件(A<sub>1</sub>)可知  $J'_i \in L^1$ , 故存在  $L_i > 0$ , 使得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |\hat{J}_i(x-y)| dy &= \int_{\mathbf{R}} |J_i(x + \eta - y) - J_i(x - y)| dy \\ &= |\eta| \int_{\mathbf{R}} \left| \int_0^1 J'_i(x - y + \theta\eta) d\theta \right| dy \\ &= |\eta| \int_0^1 \int_{\mathbf{R}} |J'_i(x - y + \theta\eta)| dy d\theta \leq L_i |\eta|, \end{aligned}$$

其中,  $\theta \in (0, 1)$ ,  $i = 1, 2$ 。所以, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta_i = \frac{\varepsilon}{L_i} > 0$ , 使得若对  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 有  $|\eta| \leq \delta_i$ , 则有  $\int_{\mathbf{R}} |\hat{J}_i(x-y)| dy \leq \varepsilon$ , 其中  $i = 1, 2$ 。

注意到  $\phi \in \mathcal{B}_{[K_0, K_2]}^*$ , 由比较原理(引理 2)可知, 对任意的  $x \in \mathbf{R}$  和  $t \geq 0$ , 有  $0 \leq u_1(x, t; \phi) \leq k_1^*$  和  $0 \leq u_2(x, t; \phi) \leq k_2^*$ 。因此, 对任意的  $x \in \mathbf{R}$  和  $t \geq 0$ , 有  $0 \leq \bar{u}_{1n}(x, t) \leq k_1^*$  和  $0 \leq \bar{u}_{2n}(x, t) \leq k_2^*$ , 易证

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} U_{n,\eta}^2(x,t) &= 2U_{n,\eta}(x,t) \frac{\partial}{\partial t} U_{n,\eta}(x,t) \\
 &= 2U_{n,\eta}(x,t) \left( d_1 \int_{\mathbf{R}} \hat{J}_1(x-y) \bar{u}_{1n}(y,t) dy - d_1 U_{n,\eta}(x,t) + h_1(U_{n,\eta}(x,t), V_{n,\eta}(x,t)) \right) \\
 &= 2U_{n,\eta}(x,t) \left( d_1 \int_{\mathbf{R}} \hat{J}_1(x-y) \bar{u}_{1n}(y,t) dy - d_1 U_{n,\eta}(x,t) + \partial_1 h_1(\hat{U}_{n,\eta}(x,t), \right. \\
 &\quad \left. \hat{V}_{n,\eta}(x,t)) U_{n,\eta}(x,t) + \partial_2 h_1(\hat{U}_{n,\eta}(x,t), \hat{V}_{n,\eta}(x,t)) V_{n,\eta}(x,t) \right) \\
 &\leq 4d_1 \varepsilon k_1^{*2} - 2(d_1 - \tilde{N}) U_{n,\eta}^2(x,t) + 2\tilde{N} U_{n,\eta}(x,t) V_{n,\eta}(x,t) \\
 &\leq 4d_1 \varepsilon k_1^{*2} - 2(d_1 - \tilde{N}) U_{n,\eta}^2(x,t) + \tilde{N} (U_{n,\eta}^2(x,t) + V_{n,\eta}^2(x,t)) \\
 &= 4d_1 \varepsilon k_1^{*2} - 2 \left( d_1 - \frac{3}{2} \tilde{N} \right) U_{n,\eta}^2(x,t) + \tilde{N} V_{n,\eta}^2(x,t), \tag{21}
 \end{aligned}$$

其中,  $\hat{U}_{n,\eta}(x,t) = \theta U_{n,\eta}(x,t)$ ,  $\hat{V}_{n,\eta}(x,t) = \theta V_{n,\eta}(x,t)$ ,  $\theta \in (0, 1)$ 。

同理可得

$$\frac{\partial}{\partial t} V_{n,\eta}^2(x,t) \leq 4d_2 \varepsilon k_2^{*2} - 2 \left( d_2 - \frac{3}{2} \tilde{N} \right) V_{n,\eta}^2(x,t) + \tilde{N} U_{n,\eta}^2(x,t). \tag{22}$$

将式(21)、(22)相加,可得

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{n,\eta}^2(x,t) + \frac{\partial}{\partial t} V_{n,\eta}^2(x,t) \leq 4(d_1 k_1^{*2} + d_2 k_2^{*2}) \varepsilon - \alpha_1 U_{n,\eta}^2(x,t) - \alpha_2 V_{n,\eta}^2(x,t), \tag{23}$$

其中  $\alpha_i := 2(d_i - 2\tilde{N}) > 0 (i=1, 2)$ 。

取  $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ , 由式(23)易得

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{n,\eta}^2(x,t) + \frac{\partial}{\partial t} V_{n,\eta}^2(x,t) \leq 4(d_1 k_1^{*2} + d_2 k_2^{*2}) \varepsilon - \alpha (U_{n,\eta}^2(x,t) + V_{n,\eta}^2(x,t)), \tag{24}$$

对式(24)利用常数变易法<sup>[23]</sup>并借助初值问题(20)的初值和比较原理,可知

$$U_{n,\eta}^2(x,t) + V_{n,\eta}^2(x,t) \leq e^{-\alpha(t-s)} (U_{n,\eta}^2(x,s) + V_{n,\eta}^2(x,s)) + 4(d_1 k_1^{*2} + d_2 k_2^{*2}) \varepsilon \int_s^t e^{-\alpha(t-\theta)} d\theta, \tag{25}$$

将  $t=0$  和  $s=-t_n$  代入式(25),可得

$$\begin{aligned}
 U_{n,\eta}^2(x,0) + V_{n,\eta}^2(x,0) &\leq e^{-\alpha t_n} (U_{n,\eta}^2(x,-t_n) + V_{n,\eta}^2(x,-t_n)) + 4(d_1 k_1^{*2} + d_2 k_2^{*2}) \varepsilon \int_{-t_n}^0 e^{\alpha\theta} d\theta \\
 &\leq e^{-\alpha t_n} \left( (U_{n,\eta}^2(x,-t_n) + V_{n,\eta}^2(x,-t_n)) + \frac{4(d_1 k_1^{*2} + d_2 k_2^{*2}) \varepsilon}{\alpha} \right),
 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
 &|u_1(x+\eta, t_n; \boldsymbol{\phi}) - u_1(x, t_n; \boldsymbol{\phi})|^2 + |u_2(x+\eta, t_n; \boldsymbol{\phi}) - u_2(x, t_n; \boldsymbol{\phi})|^2 \\
 &\leq |u_{1n}(x+\eta, 0) - u_{1n}(x, 0)|^2 + |u_{2n}(x+\eta, 0) - u_{2n}(x, 0)|^2 + \frac{4(d_1 k_1^{*2} + d_2 k_2^{*2}) \varepsilon}{\alpha}.
 \end{aligned}$$

又因为  $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{B}_{[K_0, K_2]}$ , 故对任意的  $x \in \mathbf{R}$ ,  $\phi_1(x, 0)$  和  $\phi_2(x, 0)$  是一致连续的, 即存在  $\delta_3 > 0$ , 使得当  $|\eta| < \delta_3$  时, 有  $|\phi_1(x+\eta, 0) - \phi_1(x, 0)| < \sqrt{\varepsilon}$  和  $|\phi_2(x+\eta, 0) - \phi_2(x, 0)| < \sqrt{\varepsilon}$ , 故存在  $\eta \in \mathbf{R}$  且满足  $|\eta| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ , 使得

$$\begin{cases} |u_1(x+\eta, t_n; \boldsymbol{\phi}) - u_1(x, t_n; \boldsymbol{\phi})| \leq (2+4\alpha^{-1}(d_1 k_1^{*2} + d_2 k_2^{*2})) \varepsilon, \\ |u_2(x+\eta, t_n; \boldsymbol{\phi}) - u_2(x, t_n; \boldsymbol{\phi})| \leq (2+4\alpha^{-1}(d_1 k_1^{*2} + d_2 k_2^{*2})) \varepsilon. \end{cases}$$

因此, 对任意的  $n \geq 1$ ,  $\{w(x, t_n; \boldsymbol{\phi})\}_{n \geq 1}$  在  $x \in \mathbf{R}$  中是等度连续的。这就证明了  $\gamma^+(\boldsymbol{\phi})$  是预紧集。

下面验证命题 1 中的条件(i)–(iii)成立。令式(19)中的  $z_0 = \hat{z} + \zeta \varepsilon$  和  $t \rightarrow +\infty$ , 则有  $\omega(\boldsymbol{\phi}) \subset \mathcal{B} := [\boldsymbol{\Phi}(\cdot - z_0), \boldsymbol{\Phi}(\cdot + z_0)]$ 。

显然,  $\mathcal{B}$  是  $\mathcal{B}$  的闭凸子集。对任意的  $s \in [-z_0, z_0]$ , 定义函数  $\vartheta(s) := \boldsymbol{\Phi}(\cdot + s)$ , 则  $\vartheta(s)$  是从集合  $[-z_0, z_0]$  到集合  $\hat{\mathcal{B}}$  的单调同胚, 其中  $\hat{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ 。由引理 5, 任意的  $\vartheta(s)$  都是  $\hat{\Gamma}_t$  的稳定平衡点。故命题 1 的条

件(i)成立。

任取  $\varphi \in \hat{\mathcal{B}}$  满足式(18)。因为  $\gamma^+(\varphi) := \{\hat{w}(\cdot, t; \varphi) : t \geq 0\}$  是预紧的, 所以  $\gamma^+(\varphi)$  的  $\omega$  极限集  $\omega(\varphi)$  是非空的不变紧集。最后, 类似文献[6]定理 3.1 的讨论可知, 若对某些  $s_0 \in [-z_0, z_0]$  和  $\varphi_0 \in \hat{\mathcal{B}}$ , 有  $\Phi(\cdot + s_0) < \omega(\varphi_0)$ , 则存在  $s_1 \in (s_0, z_0)$  使得  $\Phi(\cdot + s_1) < \omega(\varphi_0)$ , 从而命题 1 的条件(iii)成立。

至此, 命题 1 的条件(i)–(iii)都成立, 故由命题 1 可知, 存在使得  $\omega(\phi) = \vartheta(s_\phi) = \Phi(\cdot + s_\phi)$ , 因此  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{\Gamma}_t(\phi) = \Phi(\cdot + s_\phi)$ 。

又因为  $w(x, t; \phi) = \hat{w}(x-ct, t; \phi) = \hat{\Gamma}_t(\phi)(x-ct)$ , 所以  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|w(\cdot, t; \phi) - \Phi(\cdot - ct + s_\phi)\| = 0$ 。证毕。

最后, 利用系统(6)双稳行波解的稳定性, 还能建立系统(6)行波解的带平移的唯一性。

**定理 4** (行波解的唯一性) 假设  $(A_1)$ – $(A_5)$  成立, 令  $\hat{\Phi}(x - \hat{c}t) = (\hat{U}_1(x - \hat{c}t), \hat{U}_2(x - \hat{c}t))$  是满足  $\hat{\Phi}(-\infty) = K_0$  和  $\hat{\Phi}(+\infty) = K_2$  的系统(6)的双稳行波解, 且对  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 有  $0 \leq \hat{U}_1(x - \hat{c}t) \leq k_1^*$  和  $0 \leq \hat{U}_2(x - \hat{c}t) \leq k_2^*$ , 则存在  $\hat{s} \in \mathbf{R}$  使得  $\hat{\Phi}(\cdot) = \Phi(\cdot + \hat{s})$  和  $c = \hat{c}$ , 其中  $\Phi(x-ct) = (U_1(x-ct), U_2(x-ct))$ 。

**证明** 易知  $\hat{\Phi}$  满足式(18)。由定理 3 可知, 对任意的  $z \in \mathbf{R}$ , 存在  $\hat{s} \in \mathbf{R}$  使得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\hat{\Phi}(z - \hat{c}t) - \Phi(z - ct + \hat{s})\| = 0, \quad (27)$$

令  $\xi = z - ct$  代入式(27) 可得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\hat{\Phi}(\cdot + (c - \hat{c})t) - \Phi(\cdot + \hat{s})\| = 0$ 。

因为  $\hat{\Phi}$  在  $\mathbf{R}$  上是严格增的且  $\hat{\Phi}(-\infty) = K_0$ ,  $\hat{\Phi}(+\infty) = K_2$ , 故  $c = \hat{c}$  和  $(\cdot) = \Phi(\cdot + \hat{s})$ 。证毕。

接下来建立系统(6)非增双稳行波解的稳定性和平移唯一性。由于证明类似定理 3 和定理 4, 故此省略。

**定理 5** (双稳行波解的稳定性) 假设  $(A_1)$ – $(A_5)$  成立, 令  $\tilde{\Phi}(x - \tilde{c}t) = (\tilde{U}_1(x - \tilde{c}t), \tilde{U}_2(x - \tilde{c}t))$  是系统(6)连接  $K_2$  和  $K_0$  的双稳行波解且  $w(x, t; \phi) = (u_1(x, t; \phi), u_2(x, t; \phi))$  是系统(6)满足初始数据  $\phi \in \mathcal{X}_{[K_0, K_2]}$  的解, 则对满足式(18)的  $\phi$ , 存在  $s_\phi \in \mathbf{R}$  使得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|w(\cdot, t; \phi) - \tilde{\Phi}(\cdot - \tilde{c}t + s_\phi)\| = 0.$$

**定理 6** (行波解的唯一性) 假设  $(A_1)$ – $(A_5)$  成立, 令  $\hat{\Phi}(x - \hat{c}t) = (\hat{U}_1(x - \hat{c}t), \hat{U}_2(x - \hat{c}t))$  是满足  $\hat{\Phi}(-\infty) = K_2$  和  $\hat{\Phi}(+\infty) = K_0$  的系统(6)的双稳行波解, 且对  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 有  $0 \leq \hat{U}_1(x - \hat{c}t) \leq k_1^*$  和  $0 \leq \hat{U}_2(x - \hat{c}t) \leq k_2^*$ , 则存在  $\hat{s} \in \mathbf{R}$  使得  $\hat{\Phi}(\cdot) = \tilde{\Phi}(\cdot + \hat{s})$  和  $\tilde{c} = \hat{c}$ , 其中  $\tilde{\Phi}(x - \tilde{c}t) = (\tilde{U}_1(x - \tilde{c}t), \tilde{U}_2(x - \tilde{c}t))$ 。

参考文献:

- [1] 叶其孝, 李正元, 王明新, 等. 反应扩散方程引论[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2011.  
YE Qixiao, LI Zhengyuan, WANG Mingxin, et al. Introduction to reaction-diffusion equations [M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2011.
- [2] HSU C H, YANG T S. Existence, uniqueness, monotonicity and asymptotic behaviour of travelling waves for epidemic models [J]. Nonlinearity, 2013, 26:121-139.
- [3] ARONSON D G, WEINBERGER H F. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation [M]//Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 1975:5-49.
- [4] BATES P W, FIFE P C, REN Xiao feng, et al. Traveling waves in a convolution model for phase transitions[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1997, 138(2):105-136.
- [5] YU Zhixian, WAN Yuji, HSU Cheng-hsiung. Wave propagation and its stability for a class of discrete diffusion systems[J]. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Physik, 2020, 71(6):194.
- [6] XU Dashun, ZHAO Xiaoqiang. Bistable waves in an epidemic model[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2004, 16(3):679-707.
- [7] 吴事良. 非局部时滞反应扩散方程的行波解和渐近传播速度[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2009.  
WU Shiliang. Traveling wave solutions and asymptotic propagation velocity of nonlocal delay reaction-diffusion equations[D].

Xi'an: Xidian University, 2009

- [8] COVILLE Jérôme, DUPAIGNE Louis. Propagation speed of travelling fronts in non local reaction-diffusion equations[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2005, 60(5):797-819.
- [9] COVILLE Jérôme. On uniqueness and monotonicity of solutions of non-local reaction diffusion equation[J]. *Annali Di Matematica Pura Ed Applicata*, 2006, 185(3):461-485.
- [10] 李孝武,杨赞瑞,刘凯凯. 一类时滞非局部扩散 SVIR 模型单稳行波解的稳定性[J]. *浙江大学学报(理学版)*, 2023, 50(3):273-286.  
LI Xiaowu, YANG Yunrui, LIU Kaikai. Stability of monostable traveling waves for a class of SVIR models with nonlocal diffusion and delay[J]. *Journal of Zhejiang University (Science Edition)*, 2023, 50(3):273-286.
- [11] ZHANG Guobao, ZHAO Xiaoqiang. Propagation phenomena for a two-species Lotka-Volterra strong competition system with nonlocal dispersal[J]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2019, 59(1):10.
- [12] 郝玉财. 两类非局部扩散系统行波解的稳定性[D]. 兰州:西北师范大学,2022.  
HAO Yucui. Stability of traveling wave solutions for two kinds of nonlocal diffusion systems[D]. Lanzhou:Northwest Normal University, 2022.
- [13] CHEN Xinfu. Existence, uniqueness and asymptotic stability of traveling waves in nonlocal evolution equations[J]. *Advances in Differential Equations*, 1997, 2(1):125-160.
- [14] HAO Yucui, ZHANG Guobao. Global stability of bistable traveling wavefronts for a three-species Lotka-Volterra competition system with nonlocal dispersal[J]. *International Journal of Biomathematics*, 2023, 16(5):22250106.
- [15] LIU Kaikai, YANG Yunrui. Global stability of traveling waves for a SIR model with nonlocal dispersal and delay[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2022, 63(2):021504.
- [16] YANG Lu, YANG Yunrui, SONG Xue. Traveling waves in a SIRH model with spatio-temporal delay and nonlocal dispersal[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2022, 42(2):715-736.
- [17] COVILLE Jérôme. Travelling fronts in asymmetric nonlocal reaction diffusion equations; the bistable and ignition cases[J]. *Prépublication du CMM*, Hal-00696208.
- [18] COVILLE Jérôme, DÁVILA Juan, MARTÍNEZ Salomé. Nonlocal anisotropic dispersal with monostable nonlinearity[J]. *Journal of Differential Equations*, 2008, 244(12):3080-3118.
- [19] LI Wantong, XU Wenbing, ZHANG Liang. Traveling waves and entire solutions for an epidemic model with asymmetric dispersal[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2017, 37(5):2483-2512.
- [20] HU Ruyue, LI Wantong, XU Wenbing. Propagation phenomena for man-environment epidemic model with nonlocal dispersals[J]. *Journal of Nonlinear Science*, 2022, 32(5):67.
- [21] 杨璐. 两类时滞非局部扩散传染病系统的行波解研究[D]. 兰州:兰州交通大学,2022.  
YANG Lu. Study on traveling wave solutions of two kinds of non-local diffusion infectious disease systems with time delay[D]. Lanzhou: Lanzhou Jiatong University, 2022.
- [22] WENG Peixuan, ZHAO Xiaoqiang. Spreading speed and traveling waves for a multi-type SIS epidemic model[J]. *Journal of Differential Equations*, 2006, 229(1):270-296.
- [23] 王高雄. 常微分方程[M]. 3版. 北京:高等教育出版社,2006.  
Wang Gaoxiong. *Ordinary differential equation*[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2006.
- [24] ZHAO Xiaoqiang. *Dynamical systems in population biology*[M]. New York: Springer, 2003.

(编辑:胡春燕)