

复杂网络中带有自我防护意识的 SEIR 模型分析

秦佳欣,李淑萍*

(中北大学数学学院,山西太原 030051)

摘要:考虑媒体宣传和人与人之间的信息传播,在复杂网络上建立了具有2类易感仓室的易感者-暴露者-感染者-康复者(susceptible-exposed-infectious-removed, SEIR)模型,研究自我防护意识对于传染病传播的影响。得到了基本再生数 R_0 ,并且证明了当 $R_0>1$ 时,有唯一的地方病平衡点。根据Hurwitz判据和比较定理,分析了无病平衡点的稳定性,证明了当 $R_0>1$ 时,疾病是一致持续的。利用敏感性分析确定了参数对于 R_0 的重要性。数值模拟表明,提高自我防护意识可以有效降低被感染的概率。

关键词:自我防护意识;复杂网络;稳定性;一致持续;敏感性分析

中图分类号:O175 **文献标志码:**A

引用格式:秦佳欣,李淑萍.复杂网络中带有自我防护意识的SEIR模型分析[J].山东大学学报(理学版),2025,60(4):60-71,83.

Analysis of SEIR model with self-protection awareness in complex networks

QIN Jiaxin, LI Shuping*

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, Shanxi, China)

Abstract: By considering media publicity and information dissemination among people, we establish an SEIR (susceptible-exposed-infectious-removed,) model with two types of susceptible compartments on complex networks to study the impact of self-protection awareness on the spread of infectious diseases. The basic reproduction number R_0 is obtained by calculation, and it is proved that there is a unique endemic equilibrium point when $R_0>1$. According to Hurwitz criterion and comparison theorem, the stability of the disease-free equilibrium is analyzed. Then it is proved that the disease is uniformly persistent when $R_0>1$. Sensitivity analysis determines the importance of parameters for R_0 . Numerical simulation shows that improving self-protection awareness can effectively reduce the probability of being infected.

Key words: self-protection awareness; complex network; stability; uniform persistence; sensitivity analysis

0 引言

传染病会威胁人们的生命健康,所以预防和控制传染病传播是各个研究领域备受关注的问題^[1]。当传染病在一个地区传播时,疾病防控部门会采取适当的措施阻止疾病传播,比如利用媒体宣传疾病相关的知识^[2]。随着媒体传播面与受众覆盖率的不断扩大,人们能够获取到更多的信息,人们的意识也会发生变化,进而引起个体行为的转变^[3-6],如勤洗手、少出门、远离密集人群等,这些行为有助于降低个体被感染的概率,进而影响传染病的传播过程^[7]。因此,有必要研究带有自我防护意识的传染病传播模型的性态。

目前,学者们建立不同的模型研究媒体宣传、人与人之间的信息传播对传染病传播的影响。Shanta等^[8]考虑了媒体意识,使得一部分有意识易感人群加入了隔离仓室。研究结果表明,媒体宣传可以改变人们的行为,对预防和控制疾病的传播有效。Xie等^[9]研究了媒体报道介导的非线性感染率易感者-暴露者-感染者-康复者(susceptible-exposed-infectious-removed, SEIR)模型,研究结果表明适当的媒体报道提高公众对该

收稿日期:2024-03-01;网络出版时间:2024-12-10 14:22:02

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11701528,12101574,12001501);山西省自然科学基金资助项目(20210302124621,20210302123018)

第一作者:秦佳欣(1999—),女,硕士研究生,研究方向为生物数学复杂网络. E-mail:13007035925@163.com

*通信作者:李淑萍(1979—),女,副教授,硕士生导师,博士,研究方向为生物数学复杂网络. E-mail:lsnuc@126.com

病的认识,这将降低该病的流行程度。但是上述模型假设人口是均匀混合的,与事实并不相符,所以有的学者还考虑了人群的异质结构。Wang 等^[2]考虑了媒体宣传对于传染率降低的影响,提出了一个带有媒体意识函数的易感者-感染者-易感者(susceptible-infectious-susceptible, SIS)网络传染病模型。结果表明可以通过提高媒体和教育实施的效率,及时报道邻近地区以及本地区出现的新发传染病病例,使居民采取必要措施。然而,媒体宣传只能降低部分有意识的易感人群被感染的概率,所以 Liu 等^[10]将易感者按照是否有意识分为 2 部分,建立了复杂网络上的 SIS 模型,同时他们还研究了 2 种免疫策略,发现靶向免疫比比例免疫更能有效地控制疾病。

媒体宣传等因素提高了人们的自我防护意识,因此进一步研究自我防护意识对于传染病传播的影响具有一定的实际意义^[11]。

1 模型的建立

在复杂网络中,社会网络上的节点代表人,边表示人与人之间的接触。根据单位时间内接触次数 k 的不同,将总人口 N 分为 n 组,记为 N_k ,度分布 $p(k) = N_k/N$,平均度 $\langle k \rangle = \sum_{k=1}^n kp(k)$ 。按照节点的状态分类,有 $N_k = S_k^1 + S_k^2 + E_k + I_k + R_k$,其中 $S_k^1(t)$ 、 $S_k^2(t)$ 、 $E_k(t)$ 、 $I_k(t)$ 和 $R_k(t)$ 分别是 t 时刻接触次数为 k 的有自我防护意识的易感者、无自我防护意识的易感者、潜伏者、感染者和恢复者的数量。 Λ_k 是度为 k 的易感仓室中输入的人口; ε 是输入人口中无自我防护意识的易感者所占比例; β 是无自我防护意识的个体被感染的概率; $(1-\alpha_k)\beta$ 是度为 k 的带有自我防护意识的个体被感染的概率; ξ 是从无自我防护意识易感者变为有自我防护意识易感者的速率; η 是潜伏者类变为感染者类的速率; γ 是恢复率; μ 是自然死亡率。模型流程图如图 1 所示。

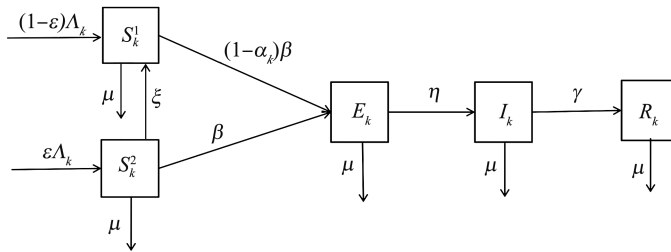


图 1 SEIR 流程图
Fig.1 Flow chart of SEIR transmission

在构建模型的过程中,提出了以下假设:

- (1) 因为研究自我防护意识对于疾病传播的影响,所以重点考虑未被感染者,即只考虑媒体宣传等因素对于易感者自我防护意识的影响,而忽略其对潜伏者、感染者的影响。
- (2) 无自我防护意识的易感者将以 ξ 的速率转化为有自我防护意识的易感者,不考虑个体自我防护意识减弱带来的影响。
- (3) 潜伏者不具有传染性。
- (4) 网络是静态的,即输入个体和自然死亡的个体不会对度分布产生影响。

建立模型:

$$\begin{cases} \frac{dS_k^1(t)}{dt} = (1-\varepsilon)\Lambda_k - (1-\alpha_k)\beta k S_k^1(t)\theta(t) - \mu S_k^1(t) + \xi S_k^2(t), \\ \frac{dS_k^2(t)}{dt} = \varepsilon\Lambda_k - \beta k S_k^2(t)\theta(t) - \mu S_k^2(t) - \xi S_k^2(t), \\ \frac{dE_k(t)}{dt} = (1-\alpha_k)\beta k S_k^1(t)\theta(t) + \beta k S_k^2(t)\theta(t) - \eta E_k(t) - \mu E_k(t), \\ \frac{dI_k(t)}{dt} = \eta E_k(t) - \gamma I_k(t) - \mu I_k(t), \\ \frac{dR_k(t)}{dt} = \gamma I_k(t) - \mu R_k(t). \end{cases} \quad (1)$$

在度不相关网络中, $\theta(t)$ 表示任意一边指向感染个体的概率, $\theta(t) = \sum_{k=1}^n kI_k(t) / \sum_{k=1}^n kN_k(t)$ 。令 $\frac{dN_k}{dt} =$

$$\frac{dS_k^1}{dt} + \frac{dS_k^2}{dt} + \frac{dE_k}{dt} + \frac{dI_k}{dt} + \frac{dR_k}{dt} = \Lambda_k - \mu N_k = 0, \text{ 那么 } N_k = \frac{\Lambda_k}{\mu} \text{ (常数)}, P(k) = \frac{N_k}{N} = \frac{\Lambda_k}{\sum_{k=1}^n \Lambda_k} \text{ (常数)}. t \text{ 时刻接触次数为 } k \text{ 的}$$

有自我防护意识的易感者、无自我防护意识的易感者、潜伏者、感染者、恢复者的密度分别为 $s_k^1(t) = \frac{S_k^1}{N_k}$ 、

$$s_k^2(t) = \frac{S_k^2}{N_k}, e_k(t) = \frac{E_k}{N_k}, i_k(t) = \frac{I_k}{N_k}, r_k(t) = \frac{R_k}{N_k}, \text{ 系统(1)改写为}$$

$$\begin{cases} \frac{ds_k^1(t)}{dt} = (1-\varepsilon)\mu - (1-\alpha_k)\beta ks_k^1(t)\theta(t) - \mu s_k^1(t) + \xi s_k^2(t), \\ \frac{ds_k^2(t)}{dt} = \varepsilon\mu - \beta ks_k^2(t)\theta(t) - \mu s_k^2(t) - \xi s_k^2(t), \\ \frac{de_k(t)}{dt} = (1-\alpha_k)\beta ks_k^1(t)\theta(t) + \beta ks_k^2(t)\theta(t) - \eta e_k(t) - \mu e_k(t), \\ \frac{di_k(t)}{dt} = \eta e_k(t) - \gamma i_k(t) - \mu i_k(t), \\ \frac{dr_k(t)}{dt} = \gamma i_k(t) - \mu r_k(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\theta(t) = \sum_{k=1}^n kp(k)i_k / \langle k \rangle$, $\alpha_k = k / (k+a)$, 半饱和常数 $a > 0$ 表示媒体宣传对接触传播的影响。

模型(2)的正向不变集为

$$\Omega = \{ (s_k^1, s_k^2, e_k, i_k, r_k) \in \mathfrak{R}_+^5 \mid s_k^1 + s_k^2 + e_k + i_k + r_k = 1, k = 1, 2, \dots, n \}.$$

2 动力学分析

2.1 平衡点和基本再生数

由计算可得模型(2)的无病平衡点为 $E_0 = \left(1 - \frac{\varepsilon\mu}{\mu+\xi}, \frac{\varepsilon\mu}{\mu+\xi}, 0, 0, 0 \right)$ 。为求解地方病平衡点, 考虑如下方程:

$$\begin{cases} (1-\varepsilon)\mu - (1-\alpha_k)\beta ks_k^{1*}(t)\theta^*(t) - \mu s_k^{1*}(t) + \xi s_k^{2*}(t) = 0, \\ \varepsilon\mu - \beta ks_k^{2*}(t)\theta^*(t) - \mu s_k^{2*}(t) - \xi s_k^{2*}(t) = 0, \\ (1-\alpha_k)\beta ks_k^{1*}(t)\theta^*(t) + \beta ks_k^{2*}(t)\theta^*(t) - \eta e_k^*(t) - \mu e_k^*(t) = 0, \\ \eta e_k^*(t) - \gamma i_k^*(t) - \mu i_k^*(t) = 0, \\ \gamma i_k^*(t) - \mu r_k^*(t) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

由方程(3)和等式 $s_k^{1*} + s_k^{2*} + e_k^* + i_k^* + r_k^* = 1$, 得

$$s_k^{1*}(t) = \frac{(1-\varepsilon)\mu\beta k\theta^* + \mu(\mu+\xi-\varepsilon\mu)}{(\beta k\theta^*(t) + \mu + \xi)[(1-\alpha_k)\beta k\theta^*(t) + \mu]}, \quad s_k^{2*}(t) = \frac{\varepsilon\mu}{\beta k\theta^*(t) + \mu + \xi}, \quad e_k^*(t) = \frac{\gamma + \mu}{\eta} i_k^*(t),$$

$$r_k^*(t) = \frac{\gamma}{\mu} i_k^*(t), \quad i_k^*(t) = \frac{a\theta^*(t)[b_k\theta^*(t) + c_k]}{d_k\theta^*(t)(b_k\theta^*(t) + f_k) + g},$$

其中

$$a = \mu\eta\beta k, \quad b_k = (1-\alpha_k)\beta k, \quad c_k = (1-\alpha_k)(\mu+\xi) + \alpha_k\varepsilon\mu, \quad d_k = (\mu+\eta)(\mu+\gamma)\beta k,$$

$$f_k = \xi(1-\alpha_k) + \mu(2-\alpha_k), \quad g = (\mu+\eta)(\mu+\gamma)(\mu^2 + \mu\xi).$$

将 $i_k^*(t)$ 代入 $\theta^*(t) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n kp(k)i_k^*(t)$ 中,得

$$\theta^*(t) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n kp(k) \frac{a\theta^*(t)[b_k\theta^*(t)+c_k]}{d_k\theta^*(t)(b_k\theta^*(t)+f_k)+g} \tag{4}$$

显然式(4)有一个零解 $\theta^* = 0$, 记

$$F(\theta^*) = \theta^*(t) - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n kp(k) \frac{a\theta^*(t)[b_k\theta^*(t)+c_k]}{d_k\theta^*(t)(b_k\theta^*(t)+f_k)+g},$$

经计算可得

$$\begin{aligned} \frac{dF(\theta^*)}{d\theta^*} &= 1 - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n kp(k) \frac{ab_k d_k f_k \theta^{*2}(t) - ac_k d_k b_k \theta^{*2}(t) + 2ab_k g \theta^*(t) + ac_k g}{[d_k \theta^*(t)(b_k \theta^*(t) + f_k) + g]^2}, \\ \frac{d^2 F(\theta^*)}{d\theta^{*2}} &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n kp(k) \frac{y_3 \theta^{*3}(t) + y_2 \theta^{*2}(t) + y_1 \theta^*(t) + y_0}{Z}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} Z &= [d_k \theta^*(t)(b_k \theta^*(t) + f_k) + g]^3 > 0, \\ y_0 &= 2ag[(\mu + \eta)(\mu + \gamma)\beta k((1 - \alpha_k)^2(\mu + \xi)^2 + \alpha_k \varepsilon \mu(\xi(1 - \alpha_k) + \mu(2 - \alpha_k)))] > 0, \\ y_1 &= 6ab_k c_k d_k g > 0, \\ y_2 &= 6ab_k^2 g d_k > 0, \\ y_3 &= 2ab_k^2 d_k^2 [\mu(1 - \alpha_k) + \alpha_k \mu(1 - \varepsilon)] > 0. \end{aligned}$$

可见, $\frac{d^2 F(\theta^*)}{d\theta^{*2}} > 0$, 故在 $0 \leq \theta^* < 1$ 上是凹函数。此外, $F(0) = 0$, 并且

$$F(1) = 1 - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n kp(k) \frac{U}{W} > 0,$$

其中

$$\begin{aligned} U &= \mu\eta\beta^2 k^2(1 - \alpha_k) + \mu\eta\beta k(1 - \alpha_k)(\mu + \xi) + \mu^2\eta\beta k\alpha_k \varepsilon, \\ W &= \mu\eta\beta^2 k^2(1 - \alpha_k) + \mu\eta\beta k(1 - \alpha_k)(\mu + \xi) + \mu^2\eta\beta k + \mu\beta^2 k^2(1 - \alpha_k)(\mu + \gamma) \\ &\quad + \eta\gamma\beta k(1 - \alpha_k)(\beta k + \xi) + \mu\beta k(2 - \alpha_k)(\mu^2 + \gamma\eta + \mu\gamma) + (\mu + \eta)(\mu + \gamma)(\mu^2 + \mu\xi). \end{aligned}$$

$F(\theta^*)$ 在 $0 \leq \theta^* < 1$ 上有唯一正解的充分必要条件为

$$\begin{aligned} \left. \frac{dF(\theta^*)}{d\theta^*} \right|_{\theta^*=0} &= 1 - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n kp(k) \frac{ac_k}{g} \\ &= 1 - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n kp(k) \frac{\beta\eta k[\mu(1 - \alpha_k + \alpha_k \varepsilon) + \xi(1 - \alpha_k)]}{(\mu + \eta)(\mu + \gamma)(\mu + \xi)} \\ &= 1 - \frac{\beta\eta}{(\mu + \eta)(\mu + \gamma)(\mu + \xi)} \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n k^2 p(k) [\mu(1 - \alpha_k + \alpha_k \varepsilon) + \xi(1 - \alpha_k)] \\ &= 1 - \frac{\beta\eta}{(\mu + \eta)(\mu + \gamma)(\mu + \xi)} \frac{\langle k^2 [\mu(1 - \alpha_k + \alpha_k \varepsilon) + \xi(1 - \alpha_k)] \rangle}{\langle k \rangle} < 0. \end{aligned}$$

同时,得到了基本再生数

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\beta\eta}{(\mu + \eta)(\mu + \gamma)(\mu + \xi)} \frac{\langle k^2 [\mu(1 - \alpha_k + \alpha_k \varepsilon) + \xi(1 - \alpha_k)] \rangle}{\langle k \rangle} \\ &= \frac{\beta\eta}{(\mu + \eta)(\mu + \gamma)} \frac{\left\langle k^2 \left[(1 - \alpha_k) \left(1 - \frac{\varepsilon\mu}{\mu + \xi} \right) + \frac{\varepsilon\mu}{\mu + \xi} \right] \right\rangle}{\langle k \rangle} \\ &= \frac{\beta\eta[\mu(1 - \varepsilon) + \xi]}{(\mu + \eta)(\mu + \gamma)(\mu + \xi)} \frac{\langle k^2(1 - \alpha_k) \rangle}{\langle k \rangle} + \frac{\beta\eta\varepsilon\mu}{(\mu + \eta)(\mu + \gamma)(\mu + \xi)} \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} \\ &\triangleq R_0^1 + R_0^2. \end{aligned}$$

即当 $R_0 > 1$ 时, 系统(2)有唯一的正平衡点 $E^* = (s_k^1, s_k^2, e_k^*, i_k^*, r_k^*)$. R_0^1 表示当初始感染者进入一个全部都是易感者的人群时, 在单位时间内感染的有意识易感者数量. R_0^2 表示当初始染病者进入一个全部都是易感者的人群时, 在单位时间内感染的无意识易感者数量.

2.2 无病平衡点的局部渐近稳定性

定理 1 当 $R_0 < 1$ 时, 系统(2)的无病平衡点 E_0 是局部渐近稳定的.

证明 模型(2)在无病平衡点处的 Jacobian 矩阵为

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} A & B & O & C & O \\ O & D & O & E & O \\ O & O & G & H & O \\ O & O & K & L & O \\ O & O & O & M & A \end{pmatrix}_{5n \times 5n},$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\mu \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{pmatrix} \xi & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \xi \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n},$$

$$D = \begin{pmatrix} -(\mu + \xi) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(\mu + \xi) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(\mu + \xi) \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad K = \begin{pmatrix} \eta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \eta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \eta \end{pmatrix}_{n \times n},$$

$$G = \begin{pmatrix} -(\mu + \eta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(\mu + \eta) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(\mu + \eta) \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad M = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma \end{pmatrix}_{n \times n},$$

$$L = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(\gamma + \mu) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(\gamma + \mu) \end{pmatrix}_{n \times n},$$

$$C = (C_{ij}), \quad C_{ij} = -i(1 - \alpha_i)\beta \left(1 - \frac{\varepsilon\mu}{\mu + \xi}\right) \frac{jP(j)}{\langle k \rangle}, \quad E = (E_{ij}), \quad E_{ij} = -i\beta \frac{\varepsilon\mu}{\mu + \xi} \frac{jP(j)}{\langle k \rangle},$$

$$H = (H_{ij}), \quad H_{ij} = i\beta \left(1 - \alpha_i + \frac{\alpha_i \varepsilon\mu}{\mu + \xi}\right) \frac{jP(j)}{\langle k \rangle}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

矩阵 $J(E_0)$ 有 $2n$ 个特征值为 $-\mu$, 有 n 个特征值为 $-(\mu + \xi)$, 其余 $2n$ 个特征值是矩阵 Q 的特征值,

$$Q = \begin{pmatrix} G & H \\ K & L \end{pmatrix}_{2n \times 2n}.$$

考虑

$$|\lambda I - Q| = \begin{vmatrix} G' & H' \\ K' & L' \end{vmatrix},$$

其中

$$G' = \begin{pmatrix} \lambda + \eta + \mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda + \eta + \mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda + \eta + \mu \end{pmatrix}, \quad K' = \begin{pmatrix} -\eta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\eta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\eta \end{pmatrix},$$

$$L' = \begin{pmatrix} \lambda + \gamma + \mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda + \gamma + \mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda + \gamma + \mu \end{pmatrix},$$

$$H' = -H。$$

由 $|\lambda I - Q| = |G'| |L' - K' G'^{-1} H'|$, 得

$$|\lambda I - Q| = (\lambda + \eta + \mu)^n \begin{vmatrix} \lambda + \gamma + \mu - q_{11} & -q_{12} & \cdots & -q_{1n} \\ -q_{21} & \lambda + \gamma + \mu - q_{22} & \cdots & -q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -q_{n1} & -q_{n2} & \cdots & \lambda + \gamma + \mu - q_{nn} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

其中

$$q_{ij} = \frac{i\beta\eta[\mu + \xi - \alpha_i(\mu + \xi - \varepsilon\mu)] j\rho(j)}{(\lambda + \eta + \mu)(\mu + \xi) \langle k \rangle}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n。$$

将行列式(5)的第 1 行乘以 $-\frac{i[\mu + \xi - \alpha_i(\mu + \xi - \varepsilon\mu)]}{[\mu + \xi - \alpha_1(\mu + \xi - \varepsilon\mu)]}$ 再分别加到第 i 行 ($i = 1, 2, \dots, n$), 然后再将行列式的

第 j 列乘以 $\frac{j[\mu + \xi - \alpha_j(\mu + \xi - \varepsilon\mu)]}{[\mu + \xi - \alpha_1(\mu + \xi - \varepsilon\mu)]}$ 再分别加到行列式(5)第 1 列 ($j = 2, 3, \dots, n$), 可得

$$|\lambda I - Q| = (\lambda + \eta + \mu)^n \begin{vmatrix} \lambda + \gamma + \mu - \frac{\beta\eta \langle k^2 [\mu + \xi - \alpha_k(\mu + \xi - \varepsilon\mu)] \rangle}{(\lambda + \eta + \mu)(\mu + \xi) \langle k \rangle} & -q_{12} & \cdots & -q_{1n} \\ 0 & \lambda + \gamma + \mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda + \gamma + \mu \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + \eta + \mu)^n (\lambda + \gamma + \mu)^{n-1} \left[\lambda + \gamma + \mu - \frac{\beta\eta \langle k^2 [\mu + \xi - \alpha_k(\mu + \xi - \varepsilon\mu)] \rangle}{(\lambda + \eta + \mu)(\mu + \xi) \langle k \rangle} \right]。$$

令 $|\lambda I - Q| = 0$, 显然行列式有 n 个特征值为 $-\eta - \mu$, 有 $n - 1$ 个特征值为 $-\gamma - \mu$, 所以考虑

$$\lambda + \gamma + \mu - \frac{\beta\eta \langle k^2 [\mu + \xi - \alpha_k(\mu + \xi - \varepsilon\mu)] \rangle}{(\lambda + \eta + \mu)(\mu + \xi) \langle k \rangle} = 0,$$

化简得

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \tag{6}$$

其中 $a_1 = \eta + \gamma + 2\mu$, $a_2 = (\eta + \mu)(\mu + \gamma) - \beta\eta \frac{\langle k^2 [\mu + \xi - \alpha_k(\mu + \xi - \varepsilon\mu)] \rangle}{(\mu + \xi) \langle k \rangle}$ 。

$$H_1 = \eta + \gamma + 2\mu > 0,$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} \eta + \gamma + 2\mu & 0 \\ 1 & (\eta + \mu)(\mu + \gamma) - \beta\eta \frac{\langle k^2 [\mu + \xi - \alpha_k(\mu + \xi - \varepsilon\mu)] \rangle}{(\mu + \xi) \langle k \rangle} \end{vmatrix}$$

$$= (\eta + \gamma + 2\mu) \left[(\eta + \mu)(\mu + \gamma) - \frac{\beta\eta \langle k^2 [\mu + \xi - \alpha_k(\mu + \xi - \varepsilon\mu)] \rangle}{(\mu + \xi) \langle k \rangle} \right]$$

$$= (\eta + \gamma + 2\mu) \left[(\eta + \mu)(\mu + \gamma) - \frac{\beta\eta \langle k^2 [\mu(1 - \alpha_k + \alpha_k \varepsilon) + \xi(1 - \alpha_k)] \rangle}{(\mu + \xi) \langle k \rangle} \right]$$

$$= (\eta + \gamma + 2\mu)(\eta + \mu)(\mu + \gamma)(1 - R_0)。$$

显然, 当 $R_0 < 1$ 时, $H_2 > 0$, 由 Hurwitz 判据^[12]可得, 方程的所有根均具有负实部, 故矩阵 $J(E_0)$ 的特征值都具有负实部, 从而证明了无病平衡点的局部渐近稳定性。

2.3 无病平衡点的全局渐近稳定性

定理 2 若 $R_0 < 1$, 则系统(2)的无病平衡点 E_0 在 Ω 内是全局渐近稳定的。

证明 对于系统(2), 有

$$\begin{cases} \frac{ds_k^1(t)}{dt} \leq (1-\varepsilon)\mu - \mu s_k^1(t) + \xi s_k^2(t), \\ \frac{ds_k^2(t)}{dt} \leq \varepsilon\mu - \mu s_k^2(t) - \xi s_k^2(t). \end{cases} \quad (7)$$

考虑如下辅助系统

$$\begin{cases} \frac{ds_k^1(t)}{dt} = (1-\varepsilon)\mu - \mu s_k^1(t) + \xi s_k^2(t), \\ \frac{ds_k^2(t)}{dt} = \varepsilon\mu - \mu s_k^2(t) - \xi s_k^2(t), \end{cases} \quad (8)$$

系统(8)唯一的内在平衡点 (s_k^{10}, s_k^{20}) 是全局渐近稳定的, 所以对于任意的 $\varphi > 0$, 当 t 充分大时, 有 $s_k^1(t) < s_k^{10} + \varphi$, $s_k^2(t) < s_k^{20} + \varphi$, 则有

$$\begin{cases} \frac{de_k(t)}{dt} \leq (1-\alpha_k)\beta k(s_k^{10} + \varphi)\theta(t) + \beta k(s_k^{20} + \varphi)\theta(t) - (\eta + \mu)e_k(t), \\ \frac{di_k(t)}{dt} = \eta e_k(t) - (\gamma + \mu)i_k(t), \\ \frac{dr_k(t)}{dt} = \gamma i_k(t) - \mu r_k(t). \end{cases} \quad (9)$$

考虑如下辅助系统:

$$\begin{cases} \frac{de_k(t)}{dt} = (1-\alpha_k)\beta k(s_k^{10} + \varphi)\theta(t) + \beta k(s_k^{20} + \varphi)\theta(t) - (\eta + \mu)e_k(t), \\ \frac{di_k(t)}{dt} = \eta e_k(t) - (\gamma + \mu)i_k(t), \\ \frac{dr_k(t)}{dt} = \gamma i_k(t) - \mu r_k(t), \end{cases} \quad (10)$$

下面只要证明当 $t \rightarrow \infty$ 时, 系统(10)的解趋于 0 即可。

构造 Lyapunov 函数

$$L(t) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n kp(k) \left[e_k(t) + \frac{\eta + \mu}{\eta} i_k(t) \right].$$

对 $L(t)$ 沿系统(10)求导, 得

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n kp(k) \left(e_k'(t) + \frac{\mu + \eta}{\eta} i_k'(t) \right) \\ &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n kp(k) \left\{ \left[(1-\alpha_k)\beta k(s_k^{10} + \varphi)\theta(t) + \beta k(s_k^{20} + \varphi)\theta(t) - (\eta + \mu)e_k(t) \right] + \frac{\mu + \eta}{\eta} \left[\eta e_k(t) - (\gamma + \mu)i_k(t) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n kp(k) \left[(1-\alpha_k)\beta k \left(1 - \frac{\varepsilon\mu}{\mu + \xi} + \varphi \right) \theta(t) + \beta k \left(\frac{\varepsilon\mu}{\mu + \xi} + \varphi \right) \theta(t) - \frac{(\mu + \eta)(\gamma + \mu)}{\eta} i_k(t) \right] \\ &= \frac{\beta \left\langle k^2 \left[(1-\alpha_k) \left(1 - \frac{\varepsilon\mu}{\mu + \xi} \right) + \frac{\varepsilon\mu}{\mu + \xi} \right] \right\rangle}{\langle k \rangle} \theta(t) + \frac{\beta\varphi \langle k^2(2-\alpha_k) \rangle}{\langle k \rangle} \theta(t) - \frac{(\mu + \eta)(\gamma + \mu)}{\eta} \theta(t) \\ &= \frac{(\mu + \eta)(\gamma + \mu)}{\eta} \left\{ \frac{\beta\eta \left\langle k^2 \left[(1-\alpha_k) \left(1 - \frac{\varepsilon\mu}{\mu + \xi} \right) + \frac{\varepsilon\mu}{\mu + \xi} \right] \right\rangle}{\langle k \rangle (\mu + \eta)(\gamma + \mu)} + \frac{\beta\eta\varphi \langle k^2(2-\alpha_k) \rangle}{\langle k \rangle (\mu + \eta)(\gamma + \mu)} - 1 \right\} \theta(t) \end{aligned}$$

$$= \frac{(\mu+\eta)(\gamma+\mu)}{\eta} \left(R_0 + \frac{\beta\eta\varphi\langle k^2(2-\alpha_k)\rangle}{\langle k\rangle(\mu+\eta)(\gamma+\mu)} - 1 \right) \theta(t)。$$

因为 $R_0 < 1$ 时,选取充分小的 $\varphi > 0$,使得 $R_0 + \frac{\beta\eta\varphi\langle k^2(2-\alpha_k)\rangle}{\langle k\rangle(\mu+\eta)(\gamma+\mu)} \leq 1$,所以对于 $i_k \geq 0$,有 $\frac{dL}{dt} \leq 0$,并且当且仅当 $i_k = 0$ 有 $\frac{dL}{dt} = 0$ 成立。因此,系统(10)满足 $t \rightarrow \infty$ 时, e_k, i_k, r_k 都趋于 0。利用比较定理得,当 $t \rightarrow \infty$ 时,系统

(2) 满足 e_k, i_k, r_k 都趋于 0,那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} s_k^1(t) = 1 - \frac{\varepsilon\mu}{\mu+\xi}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} s_k^2(t) = \frac{\varepsilon\mu}{\mu+\xi}$,故系统(2)的无病平衡点 E_0 是全局吸引的。结合定理 1 可得,当 $R_0 < 1$ 时,系统(2)的无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的。

2.4 地方病平衡点的一致持续性

定理 3 假定 $R_0 > 1$,系统(2)中的疾病是持续存在的,即存在 $\varepsilon > 0$,使得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} i_k(t) \geq \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n。$$

证明 根据文献[13]中的定理 4.6,定义 $x = (s_1^1, s_1^2, i_1, e_1, r_1, \dots, s_k^1, s_k^2, i_k, e_k, r_k)$ 为系统(2)的状态变量。定义集合

$$X := \{x \in \mathbf{R}_+^{5k} : s_k^1 + s_k^2 + i_k + e_k + r_k = 1, k = 1, 2, \dots, n\},$$

$$X_0 := \left\{x \in X : \sum_{k=1}^n kp(k) i_k > 0\right\}, \quad \partial X_0 = X \setminus X_0。$$

下面证明系统(2)在 $(X_0, \partial X_0)$ 上是一致持续的。容易证明, X 是吸引在(2)的正不变的, X_0 在系统(2)上也是正不变的,因为

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n kp(k) i_k \right) \geq -(\gamma+\mu) \sum_{k=1}^n kp(k) i_k。$$

所以存在一个紧集 B ,使得系统(2)的所有初始化的解 X 属于 B 。

定义

$$M_0 = \{x_0 \in \partial X_0 : x(t) \in \partial X_0, t \geq 0\},$$

$$\Omega_1 = \cup \{\omega(x(t)) : x(0) \in \partial M_0\}。$$

在 $M_0 = \{x_0 \in \partial X_0 : x(t) \in \partial X_0, t \geq 0\}$ 条件下限制系统(2),有

$$\begin{cases} \frac{ds_k^1(t)}{dt} = (1-\varepsilon)\mu - \mu s_k^1(t) + \xi s_k^2(t), \\ \frac{ds_k^2(t)}{dt} = \varepsilon\mu - \mu s_k^2(t) - \xi s_k^2(t), \\ \frac{de_k(t)}{dt} = -\eta e_k(t) - \mu e_k(t), \\ \frac{di_k(t)}{dt} = \eta e_k(t) - \gamma i_k(t) - \mu i_k(t), \\ \frac{dr_k(t)}{dt} = \gamma i_k(t) - \mu r_k(t). \end{cases} \tag{11}$$

显然系统(11)有唯一的解 E_0 ,从系统(11)的式 3、4、5 得,当 $t \rightarrow \infty$ 时,所有的 e_k, i_k, r_k 都趋于 0,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $s_k^1(t) \rightarrow 1 - \frac{\varepsilon\mu}{\mu+\xi}$, $s_k^2(t) \rightarrow \frac{\varepsilon\mu}{\mu+\xi}$,有 $s_k^1(t) + s_k^2(t) + i_k(t) + e_k(t) + r_k(t) = 1$,因此 $\Omega_1 = E_0$ 。显然 E_0 是 Ω_1 的一个孤立的非循环覆盖。下面需要证明 E_0 是 X_0 的弱排斥,即需证明

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), E_0) > 0,$$

其中 $x(t)$ 是系统(2)的任意解且 $x(0) \in X_0$ 。根据文献[14]中的引理 3.5,证明 $W^s(E_0) \cap X_0 = \emptyset$, $W^s(E_0)$ 是

E_0 的一个稳定流行。若不然,则一定存在一个解 $x(t) \in X_0$, 使得 $t \rightarrow \infty$ 时, $s_k^1(t) \rightarrow 1 - \frac{\varepsilon\mu}{\mu+\xi}$, $s_k^2(t) \rightarrow \frac{\varepsilon\mu}{\mu+\xi}$, $e_k \rightarrow 0$, $i_k \rightarrow 0$, $r_k \rightarrow 0$ 。

因为 $R_0 = \frac{\beta\eta}{(\mu+\eta)(\mu+\gamma)(\mu+\xi)} \frac{\langle k^2[\mu(1-\alpha_k+\alpha_k\varepsilon)+\xi(1-\alpha_k)] \rangle}{\langle k \rangle} > 1$, 所以一定存在 $\sigma > 0$, 使得 $\frac{R_0}{1+\sigma} > 1$, 并且

存在 $v > 0$, 使得 $\frac{R_0}{1+\sigma} - \frac{\beta\eta\langle k^2(2-\alpha_k) \rangle}{\langle k \rangle(\eta+\mu)(\gamma+\mu)(1+\sigma)} v > 1$ 。对于 $v > 0$, 一定存在 $T > 0$, 当 $t > T$ 时, 有

$$1 - \frac{\varepsilon\mu}{\mu+\xi} - v < s_k^1(t) < 1 - \frac{\varepsilon\mu}{\mu+\xi} + v, \quad \frac{\varepsilon\mu}{\mu+\xi} - v < s_k^2(t) < \frac{\varepsilon\mu}{\mu+\xi} + v,$$

$$0 \leq e_k(t) < v, \quad 0 \leq i_k < v, \quad 0 \leq r_k < v, \quad t > T。$$

定义函数

$$V(t) = \sum_{k=1}^n kp(k) \left[e_k(t) + \frac{(\eta+\mu)(1+\sigma)}{\eta} i_k(t) \right]。$$

沿系统(2)对 $V(t)$ 求导得

$$\begin{aligned} V'(t) &= \sum_{k=1}^n kp(k) [(1-\alpha_k)\beta ks_k^1(t)\theta(t) + \beta ks_k^2(t)\theta(t) - (\eta+\mu)e_k(t)] \\ &\quad + \frac{(\eta+\mu)(1+\sigma)}{\eta} \sum_{k=1}^n kp(k) [\eta e_k(t) - (\gamma+\mu)i_k(t)] \\ &> \sum_{k=1}^n kp(k) \frac{\beta k}{\langle k \rangle} \left[(1-\alpha_k) \left(1 - \frac{\varepsilon\mu}{\mu+\xi} - v \right) + \frac{\varepsilon\mu}{\mu+\xi} - v \right] \sum_{k=1}^n kp(k) i_k(t) - (\eta+\mu) \sum_{k=1}^n kp(k) e_k(t) \\ &\quad + (\eta+\mu)(1+\sigma) \sum_{k=1}^n kp(k) e_k(t) - \frac{(\eta+\mu)(1+\sigma)(\gamma+\mu)}{\eta} \sum_{k=1}^n kp(k) i_k(t) \\ &= \frac{\beta \left\langle k^2 \left[(1-\alpha_k) \left(1 - \frac{\varepsilon\mu}{\mu+\xi} - v \right) + \frac{\varepsilon\mu}{\mu+\xi} - v \right] \right\rangle}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n kp(k) i_k(t) \\ &\quad - \frac{(\eta+\mu)(1+\sigma)(\gamma+\mu)}{\eta} \sum_{k=1}^n kp(k) i_k(t) + \sigma(\eta+\mu) \sum_{k=1}^n kp(k) e_k(t) \\ &= (\gamma+\mu) \left[\frac{R_0}{1+\sigma} - \frac{\beta\eta\langle k^2(2-\alpha_k) \rangle}{\langle k \rangle(\eta+\mu)(1+\sigma)(\gamma+\mu)} v - 1 \right] \frac{(\eta+\mu)(1+\sigma)}{\eta} \sum_{k=1}^n kp(k) i_k(t) \\ &\quad + \sigma(\eta+\mu) \sum_{k=1}^n kp(k) e_k(t) \\ &\geq \rho V(t), \end{aligned}$$

这里

$$\rho = \min \left\{ (\gamma+\mu) \left[\frac{R_0}{1+\sigma} - \frac{\beta\eta\langle k^2(2-\alpha_k) \rangle}{\langle k \rangle(\eta+\mu)(1+\sigma)(\gamma+\mu)} v - 1 \right], \sigma(\eta+\mu) \right\}。$$

因为 $\frac{R_0}{1+\sigma} - \frac{\beta\eta\langle k^2(2-\alpha_k) \rangle}{\langle k \rangle(\eta+\mu)(\gamma+\mu)(1+\sigma)} v > 1$, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \infty$, 与 $(s_k^1(t), s_k^2(t), i_k(t), e_k(t), r_k(t)) \in X_0$ 导致 $V(t)$ 有界矛盾, 得证。

3 数值模拟

3.1 平衡点的稳定性

选取参数 $\varepsilon = 0.3$, $\mu = 0.05$, $\beta = 0.085$, $\gamma = 0.3$, $\eta = 0.09$, $\xi = 0.15$, $a = 10$, 此时 $R_0 = 0.24 < 1$ 。从图2可以看出, 当 $R_0 < 1$ 时, 感染者密度和潜伏者密度最终都趋于0, 从而验证了无病平衡点是全局渐近稳定的。同样

地,选取参数 $\varepsilon=0.6, \mu=0.1, \beta=0.55, \gamma=0.5, \eta=0.7, \xi=0.2, a=10$, 计算得到 $R_0=2.9456>1$ 。从图 3 中可以看出当 $R_0>1$ 时,地方病平衡点最终会趋于稳定状态。

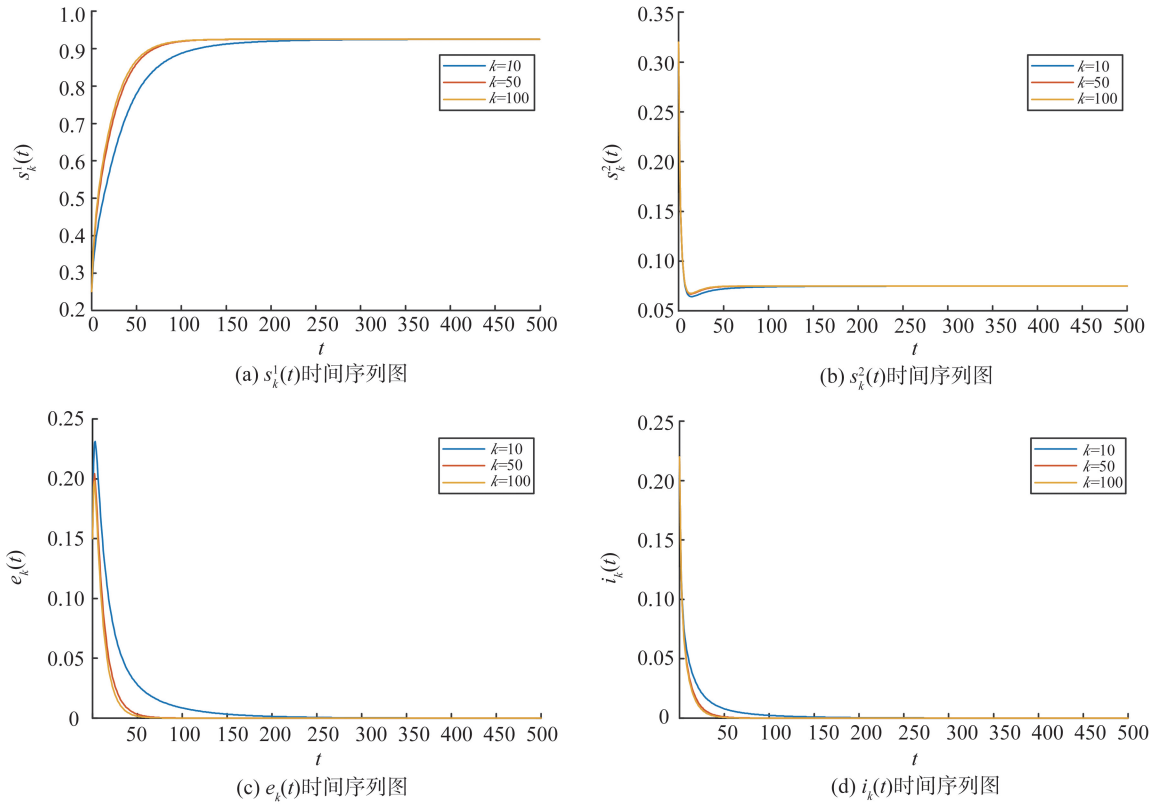


图 2 当 $R_0<1$ 时,不同 k 值下的个体密度时间序列图

Fig.2 The time series diagram of individual density for different k values when $R_0<1$

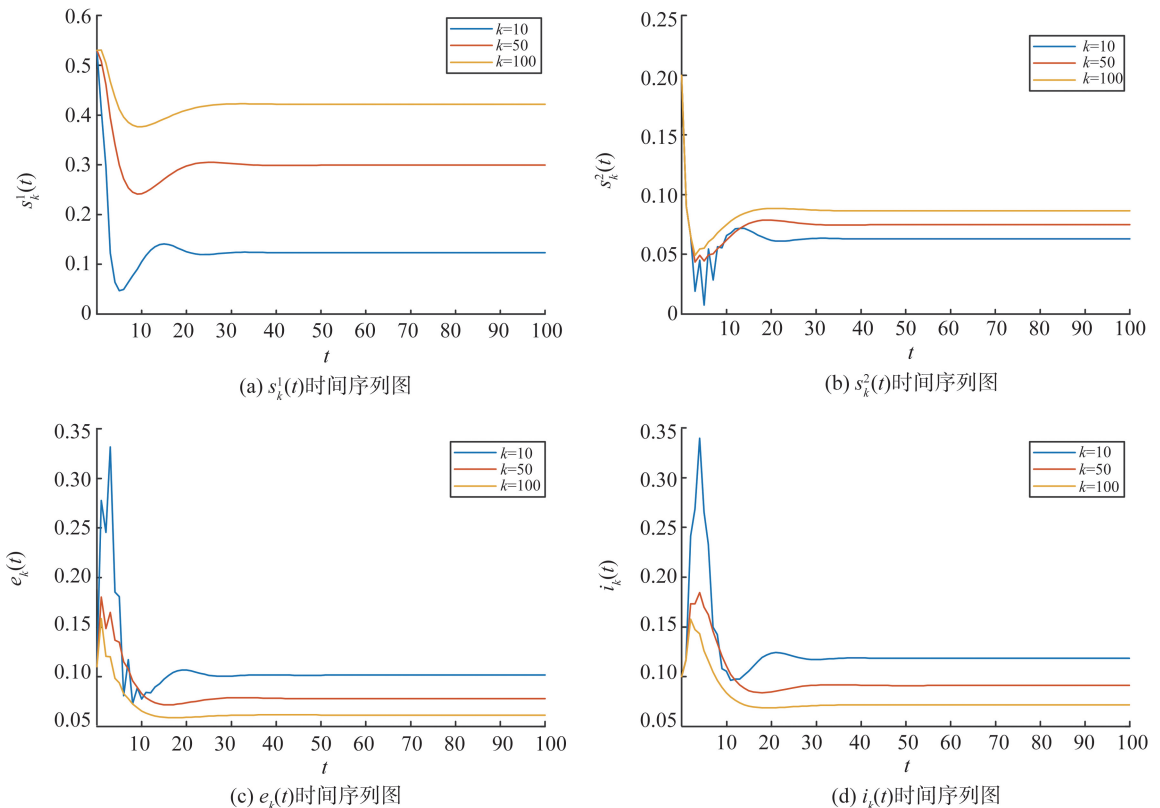


图 3 当 $R_0>1$ 时,不同 k 值下的个体密度时间序列图

Fig.3 The time series diagram of individual density for different k values when $R_0>1$

3.2 敏感性分析

首先,考虑参数对模型基本再生数的影响,利用偏秩相关系数进行敏感性分析。从图 4(a)中可以看出参数 β, ε, η 与 R_0 呈正相关, γ, μ, ξ 与 R_0 呈负相关,其中 β 与 R_0 呈显著正相关, γ 与 R_0 呈显著负相关,然后,令 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$ (α 是一个常数),分析各参数对 R_0 的影响。图 4(b)表明, α, ξ, γ 与 R_0 呈显著负相关,说明提高自我防护意识可以降低基本再生数。

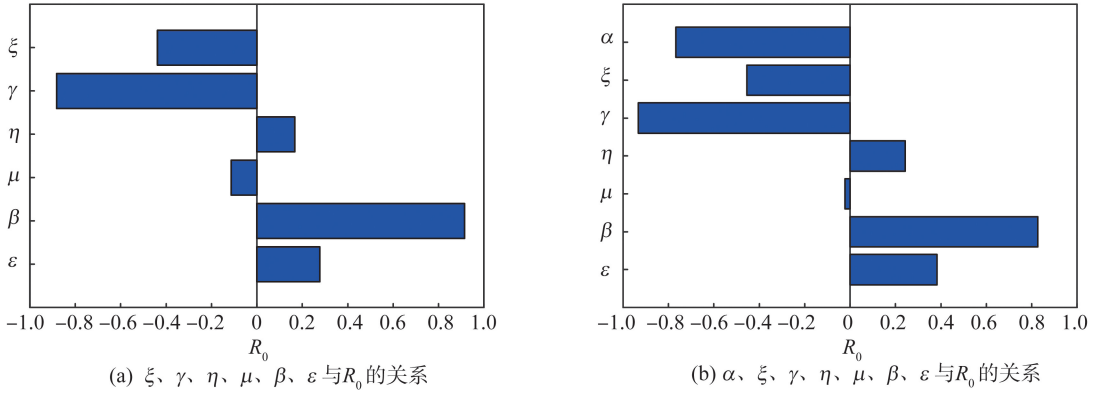


图 4 R_0 与参数的相关性
Fig.4 Sensitivity analysis of R_0

接下来研究当 $k=50$ 时, $\beta, \xi, \gamma, \alpha$ 对感染者密度 i_k 的影响。

- (1) $\beta=0.2, \beta=0.5, \beta=0.6$,由图 5(a)可知,感染率 β 越大,感染者密度越高。
- (2) $\xi=0.2, \xi=0.5, \xi=0.8$,由图 5(b)可知,无自我防护意识易感者转化为有自我防护意识易感者的比例 ξ 越大,感染者密度越低。
- (3) $\gamma=0.2, \gamma=0.5, \gamma=0.8$,由图 5(c)可知,恢复率 γ 越大,感染者密度越低。
- (4) $\alpha=0.2, \alpha=0.5, \alpha=0.8$,由图 5(d)可知,感染率降低比例 α 越大,感染者密度越低。

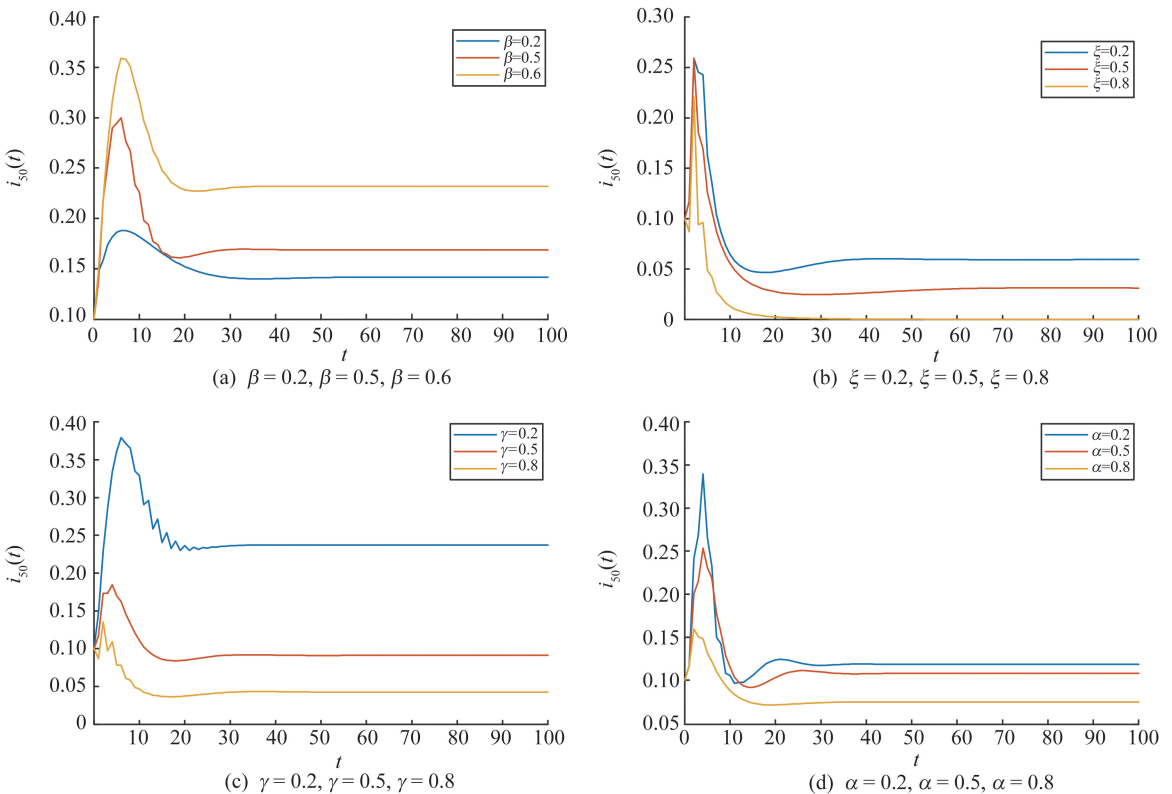


图 5 $R_0 > 1$ 时, $\beta, \xi, \gamma, \alpha$ 取不同值下感染者密度时间序列图
Fig.5 The time series diagram of infection density for different $\beta, \xi, \gamma, \alpha$ values when $R_0 > 1$

当 $\alpha_k = 1, \varepsilon = 1$,考虑和不考虑意识对感染者密度的影响,从图 6 可以看出,在整个时间段内,考虑意识

时的感染者密度均低于不考虑意识时的感染者密度。可见,提高意识可以降低感染者密度。

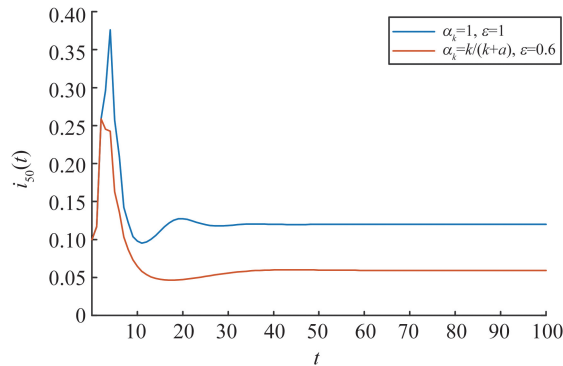


图6 不考虑意识和考虑意识的感染者密度时间序列图

Fig.6 The time series diagram of infection density without considering consciousness and considering consciousness

4 结论

本文将易感人群按照有无自我防护意识分为2部分建立SEIR模型,引入参数量化,研究了提高自我防护意识对降低感染率的影响。与已有模型不同的是,按是否有意识将输入人口分别加入到不同的易感仓室。计算得到了基本再生数 R_0 ,证明了无病平衡点的稳定性以及当 $R_0 > 1$ 时,疾病是一致持续的。比较考虑意识和不考虑意识2种情况,提高自我防护意识降低了感染者密度,有助于减少疾病的传播。敏感性分析和数值模拟进一步证实,提高个人自我防护意识可以有效降低被感染的概率。

参考文献:

- [1] YUAN Xinpeng, XUE Yakui, LIU Maoxing. Analysis of an epidemic model with awareness programs by media on complex networks[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2013, 48:1-11.
- [2] WANG Yi, CAO Jinde, JIN Zhen, et al. Impact of media coverage on epidemic spreading in complex networks[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2013, 392(23):5824-5835.
- [3] YAN Qinling, TANG Sanyi, GABRIELE S, et al. Media coverage and hospital notifications: correlation analysis and optimal media impact duration to manage a pandemic[J]. Journal of Theoretical Biology, 2016, 390:1-13.
- [4] MISRA A K, RAI R K, TAKEUCHI Y. Modeling the control of infectious diseases: effects of TV and social media advertisements[J]. Mathematical Biosciences Engineering, 2018, 15(6):1315-1343.
- [5] 贺树树,刘茂省.复杂网络中媒体报道对疾病传播的影响[J].数学的实践与认识,2020,50(21):65-73.
HE Shushu, LIU Maoxing. The impact of media coverage on disease transmission in complex networks[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2020, 50(21):65-73.
- [6] 刘志华,曹慧.具有媒体报道和时滞效应的SEIR模型动力学分析[J].陕西科技大学学报,2022,40(2):201-206.
LIU Zhihua, CAO Hui. Dynamics analysis of SEIR model with media coverage and time delay effect[J]. Journal of Shaanxi University of Science and Technology, 2022, 40(2):201-206.
- [7] 徐忠朴,李科赞.一类含个体意识的SIS网络传播模型的分析[J].桂林电子科技大学学报,2014,34(6):503-508.
XU Zhongpu, LI Kezan. Analysis of an SIS network propagation model with individual consciousness[J]. Journal of Guilin University of Electronic Science and Technology, 2014, 34(6):503-508.
- [8] SHANTA S S, BISWAS M H A. The impact of media awareness in controlling the spread of infectious diseases in terms of SIR model[J]. Mathematical Modelling of Engineering Problems, 2020, 7(3):368-376.
- [9] XIE Jingli, GUO Hongli, ZHANG Meiyang. Dynamics of an SEIR model with media coverage mediated nonlinear infectious force[J]. Mathematical Biosciences Engineering, 2023, 20(8):14616-14633.
- [10] LIU Maoxing, HE Shushu, SUN Yongzheng. The impact of media converge on complex networks on disease transmission [J]. Mathematical Biosciences Engineering, 2019, 16:6335-6349.
- [11] SAMANTA S, RANA S, SHARMA A, et al. Effect of awareness programs by media on the epidemic outbreaks: a mathematical model[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(12):6965-6977.