

区制转换与 Hawkes 跳扩散模型下的脆弱欧式期权定价

杜慧源,范小明*

(西南交通大学数学学院,四川 成都 611756)

摘要:研究随机波动率和随机利率模型下含交易对手违约风险的期权定价问题,该模型中波动率和利率过程的均值回复水平均由有限状态空间的连续马尔可夫过程控制,并假设标的资产价格过程和交易对手的资产价格过程均含有跳,且它们的跳均服从具有自刺激性的 Hawkes 过程,以及假设波动率过程中也含有跳。利用测度变换、求解贴现特征函数、多元傅里叶变换等方法,推导欧式脆弱期权的解析定价公式;然后利用快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)方法计算期权解析定价公式的有效逼近,并通过蒙特卡罗仿真检验逼近的准确性;最后,对所提模型中不同参数对脆弱看涨期权价格的敏感性进行分析,并通过数值实验对比所提出模型与不具有马尔可夫区制转换(Markov regime-switching, MRS)的随机利率模型的差异,说明在模型中引入区制转换对期权定价结果的影响。

关键词:脆弱欧式期权;跳跃聚集;区制转换;快速傅里叶变换

中图分类号: O211.6 **文献标志码:** A

引用格式:杜慧源,范小明. 区制转换与 Hawkes 跳扩散模型下的脆弱欧式期权定价[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(3):22-32.

Vulnerable European option pricing in a regime-switching and Hawkes jump diffusion model

DU Huiyuan, FAN Xiaoming*

(School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, Sichuan, China)

Abstract: Option pricing with counterparty default risk under stochastic volatility and stochastic interest rate models is studied. In this model, the mean reversion levels of volatility and interest rate process are controlled by a continuous Markov process in a finite state space, and it is assumed that both the underlying asset price process and the counterparty asset price process contain jumps, and their jumps obey the Hawkes process with self-stimulation, and it is assumed that the volatility process also contains jumps. The analytical pricing formula of European vulnerable option is derived by means of measure transform, solution of discount characteristic function and multivariate Fourier transform. Then the fast Fourier transform method is used to calculate the effective approximation of the option analytic pricing formula, and the accuracy of the approximation is verified by Monte Carlo simulation. Finally, the sensitivity of different parameters in the proposed model to the price of vulnerable call options is analyzed, and the difference between the proposed model and the stochastic interest rate model without Markov regime-switching(MRS) is compared by numerical experiments, and the impact of the introduction of regime-switching in the model on the option pricing results is illustrated.

Key words: vulnerable European option; jump clustering; regime-switching; fast Fourier transform

0 引言

1973年,Black-Scholes模型^[1]的提出对后续的期权定价理论研究产生了广泛而深远的影响。为了更好地描述波动率的微笑现象,学者们在Black-Scholes模型的基础上进行改进,通过将波动率视为随机变量以及在波动率过程中加入跳等方式,使其更适用于刻画金融市场特征^[2-3]。随着场外交易市场的发展,人们逐

收稿日期:2024-04-22;网络出版时间:2024-12-09 14:29:11

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12371178);西南交大创新项目(P113123G02004)

第一作者:杜慧源(2000—),女,硕士研究生,研究方向为金融统计。E-mail:duhuiyuan1127@163.com

*通信作者:范小明(1972—),男,教授,博士,研究方向为动力系统与随机微分方程、金融统计。E-mail:fanxm@swjtu.edu.cn

渐认识到信用风险对金融衍生品定价的影响,并尝试建立各种信用风险模型。1987年,Johnson等^[4]首次将信用风险纳入期权定价模型,并称之为易受交易对手违约影响的脆弱期权。相较于场内期权来说,由于脆弱期权总是在场外交易,交易双方随时可能违约,因此信用风险是场外交易的双方最为关注的。在此后的几十年里,国内外许多学者持续不断地对脆弱期权进行了研究,并取得了丰富的研究成果。2014年,Tian等^[5]提供了一个既面临违约风险又面临标的资产和交易对手资产罕见冲击的脆弱期权定价模型,假设除了模型中标的资产价格和对手交易资产价格含有的共同跳跃外,还存在受各种特定因素影响而发生的共同跳跃,为后来脆弱期权价格的研究指明了新的方向。近年来学者们普遍认为,极端和突然的价格运动(跳跃)倾向于在短时间内集中,从而产生跳跃的聚集,即一次跳跃的发生将增加未来发生跳跃的可能性,导致跳跃存在广泛的聚集现象。于是,一些学者开始使用能刻画跳跃聚集特征的点过程(如Hawkes过程)对资产价格跳跃进行建模,他们发现能刻画跳跃聚集的期权定价模型能显著改善定价结果的精度,并证明了模型的可行性^[6-8],因此,Hawkes跳扩散模型能很好地刻画资产价格中的跳跃聚集现象。

在实践中,由于金融资产和利率的波动性不仅会随着时间的推移而发生改变,还可能取决于经济状况的结构性变化。文献研究表明,马尔可夫区制转换(Markov regime-switching, MRS)模型可以用来描述经济条件变化对资产价格动态的影响。1989年,Hamilton^[9]提出了一种MRS模型,该模型允许波动率在不同经济状态之间切换,可以捕捉更复杂的资产动态。此后,在MRS模型基础上,许多学者们对脆弱期权的定价进行了一些研究。Xie等^[10]在研究脆弱期权定价时假设方差和利率过程的均值回复水平均由有限状态空间的连续马尔可夫过程控制,模型同时考虑了波动性风险、利率风险和区制转换风险的影响。一些学者在区制转换跳扩散模型下研究了欧式脆弱期权的估值问题,并通过快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)得到模型的特征函数的解析式,理论分析和数值算例的结果均说明了该方法的实用性^[11-12]。

在前人研究的基础上,本文提出了一种效果更好、考虑情况更为全面的脆弱期权定价模型。该模型同时考虑了波动性风险、利率风险、跳跃聚集和区制转换风险的影响,与现有的大多数关于脆弱期权定价的文献相比,该模型可以更好地描述市场特征。

1 模型介绍

本章引入带跳的Heston随机波动率模型,该模型中波动率的均值回归水平满足有限状态空间的连续时间马尔可夫过程,利率过程由随机波动率和非负常数的线性组合构成,并且将Hawkes跳过程与标的资产价格和交易对手资产价格动态模型结合起来,利用Feynman-Kac定理,推导出对数标的资产价格和对数交易对手资产价格的贴现联合特征函数。

考虑具有有限时间范围的连续时间区间 $\tau = [0, T]$, $T < \infty$ 。假设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{Q})$ 是完备的概率空间, \mathcal{Q} 为风险中性测度。根据文献[13],本文假设连续时间、有限状态、可观测马尔可夫链 $\{X_t\}_{t \in \tau}$ 的取值空间为 $\Pi = (e_1, e_2, \dots, e_N) \subset \mathbf{R}^N$,对任何 $1 \leq j \leq N$, e_j 是第 j 项为1、其余项为0的向量,则集合 Π 称为 $\{X_t\}$ 的规范状态空间。令 $Q = (q_{ij})_{i,j=1,2,\dots,N}$ 为 X_t 在测度 \mathcal{Q} 下的转移速率矩阵,其中对于 $i \neq j$, q_{ij} 为在时间间隔内从状态 e_i 到 e_j 的恒定转移速率,并且满足对于 $i \neq j$,有 $q_{ij} \geq 0$ 以及 $\sum_i q_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, N$ 。Elliott等^[13]研究表明, X_t 具有半鞅表示

$$X_t = X_0 + \int_0^t Q X_s ds + M_t。$$

其中 M_t 是一个鞅。

设 $W_t = (W_{1t}, W_{2t}, W_t^c)$ 是在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{Q})$ 上相互独立,且与 X_t 无关的三维布朗运动。假设在风险中性测度 \mathcal{Q} 下, S_t, V_t 分别表示标的资产和交易对手资产在 t 时刻的价格。令 $Y_{1t} = \ln(S_t)$, $Y_{2t} = \ln(V_t)$,则 Y_{1t} 和 Y_{2t} 满足下列微分方程:

$$\begin{aligned} dY_{1t} &= (r_t - \lambda_{1t} m_1 - \frac{1}{2} \sigma_s^2 z_t) dt + \sigma_s \sqrt{z_t} dW_{1t} + \xi_{1t} dN_{1t}, \\ dY_{2t} &= (r_t - \lambda_{2t} m_2 - \frac{1}{2} \sigma_v^2 z_t) dt + \sigma_v \sqrt{z_t} dW_{2t} + \xi_{2t} dN_{2t}, \end{aligned}$$

其中 σ_s, σ_v 均为常数。

波动率 z_t 满足如下随机微分方程:

$$dz_t = k_z(\theta_{X_t} - z_t) dt + \sigma_z \sqrt{z_t} dW_t^z + J(z) dN_t^z,$$

其中: r_t 为无风险利率, 满足 $r_t = r_0 + r_1 z_t$ (这里假设 r_t 为波动率 z_t 的函数); $r_0, r_1, \sigma_z, \sigma_s$ 均为常数; $J(z)$ 为波动率 z_t 的跳跃幅度, 且服从指数分布, 即 $J(z) \sim \exp(-\frac{1}{\xi})$; k_z 为波动率的均值回复速度; 均值回复水平 $\theta_{X_t} = \langle \theta, X_t \rangle$, 其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 2 个向量的内积, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) \in \mathbf{R}^N$, 表示波动率的均值回复水平的 N 个状态。

对每个 $j \in 1, 2$, 假设跳跃幅度 ξ_{jt} 是独立同分布的随机变量序列, $\xi_{jt} \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, 且 $m_j = E[e^{\xi_{jt}} - 1]$ 。 N_{jt} 是强度为 λ_{jt} 的 Hawkes 过程, 其中

$$d\lambda_{jt} = \eta_j(\lambda_j - \lambda_{jt}) dt + \gamma_{jj} dN_{jt}, \quad j = 1, 2.$$

W_{1t}, W_{2t}, W_t^z 均为测度 \mathcal{Q} 下的标准布朗运动, 且 $dW_{1t} dW_{2t} = \rho_1 dt$, $dW_{1t} dW_t^z = \rho_2 dt$, $dW_{2t} dW_t^z = \rho_3 dt$ 。最后假设 $\eta_1, \eta_2, \gamma_{11}, \gamma_{22}$ 均为常数。 $\mathcal{F}^{Y_1} = (\mathcal{F}_t^{Y_1})_{t \in \tau}$, $\mathcal{F}^{Y_2} = (\mathcal{F}_t^{Y_2})_{t \in \tau}$, $\mathcal{F}^z = (\mathcal{F}_t^z)_{t \in \tau}$ 表示 Y_{1t}, Y_{2t}, z_t 生成的域流, 并且 $\mathcal{F}_t = (\mathcal{F}_t^X) \wedge (\mathcal{F}_t^{Y_1}) \wedge (\mathcal{F}_t^{Y_2}) \wedge (\mathcal{F}_t^z)$, 其中“ \wedge ”表示最小的 σ -域。

注 1 如果所有状态的均值回复水平彼此相等或转移速率矩阵 $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, 则所提出的模型将退化为具有随机利率的 Heston 模型, 这意味着所有状态的均值回复水平等于状态 1 的当前水平, 并且该金融市场不存在实际的区制转换。

2 特征函数

根据文献[14], 本章将求得 Y_{1t}, Y_{2t} 在 \mathcal{Q} 下的联合条件特征函数, 令 $\mathbf{A}_T = (Y_{1T}, Y_{2T})^T$, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2)^T$, 则 \mathbf{A}_T 的条件特征函数为

$$\begin{aligned} f(\phi_1, \phi_2, t, T) &= E^{\mathcal{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds + i\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{A}_T} | Y_{1t} = y_1, Y_{2t} = y_2, z_t = z, X_t] \\ &= E^{\mathcal{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds + i\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{A}_T} | \mathcal{F}_t, X_t], \end{aligned}$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 。

令 $\mathbf{A}^J(t)$ 和 $\mathbf{A}^c(t)$ 满足随机微分方程

$$\begin{cases} d\mathbf{A}_t^J = (-\lambda_{1t} m_1 dt + dJ_{1t}, -\lambda_{2t} m_2 dt + dJ_{2t})^T, \\ d\mathbf{A}_t^c = (dY_{1t}^c, dY_{2t}^c)^T, \end{cases}$$

其中,

$$\begin{aligned} dJ_{it} &= \xi_{jt} dN_{it}, \quad i = 1, 2, \\ dY_{1t}^c &= (r_t - \frac{1}{2} z_t) dt + \sigma_s \sqrt{z_t} dW_{1t}^s, \\ dY_{2t}^c &= (r_t - \frac{1}{2} \sigma^2) dt + \sigma_v \sqrt{z_t} dW_{2t}^s, \end{aligned}$$

则显然有 $\mathbf{A}_t = \mathbf{A}_t^c + \mathbf{A}_t^J$ 。因为 J_{jt} , $j = 1, 2$ 与 $W_{1t}^s, W_{2t}^s, W_t^z$ 相互独立, 所以

$$f(\phi_1, \phi_2, t, T) = f_c(\phi_1, \phi_2, t, T) f_J(\phi_1, \phi_2, t, T),$$

其中, $f_c(\phi_1, \phi_2, t, T) = E^{\mathcal{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds + i\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{A}_T^c} | \mathcal{F}_t, X_t]$, $f_J(\phi_1, \phi_2, t, T) = E^{\mathcal{Q}}[e^{i\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{A}_T^J} | \mathcal{F}_t, X_t]$ 。

首先求 $f_J(\phi_1, \phi_2, t, T)$, 令

$$\hat{\mathbf{Y}}_t = (\lambda_{1t}, \lambda_{2t}, -m_1 \int_0^t \lambda_{1s} ds + J_{1t}, -m_2 \int_0^t \lambda_{2s} ds + J_{2t})^T,$$

则 $\hat{\mathbf{Y}}_t$ 是一个满足方程(1)的四维仿射跳扩散过程

$$\begin{cases} d\hat{\mathbf{Y}}_t = (\hat{\alpha} + \hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\mathbf{Y}}_t) dt + \sum_{j=1}^2 \gamma_{jj} d\mathbf{K}_{jt}, \\ \lambda_{jt} = \hat{\boldsymbol{\delta}}_j \hat{\mathbf{Y}}_t, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\hat{\alpha} = (\eta_1 \lambda_1, \eta_2 \lambda_2, \mathbf{0}_v)^T$, $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \text{diag}(-\eta_1, -\eta_2) & \mathbf{0}_M \\ \text{diag}(-m_1, -m_2) & \mathbf{0}_M \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_{jt} = (N_{jt} \mathbf{1}_v, J_{jt} \mathbf{1}_v)^T$, $\boldsymbol{\gamma}_1 = \text{diag}(\gamma_{11}, 0, \mathbf{e}_1)^T$, $\boldsymbol{\gamma}_2 = \text{diag}(0, \gamma_{22}, \mathbf{e}_2)^T$, $\hat{\boldsymbol{\delta}}_j = (\mathbf{e}_j, \mathbf{0}_v)$, 这里 $\mathbf{0}_v$ 表示元素为 0 的二维行向量, $\mathbf{0}_M$ 表示元素全为 0 的 2×2 矩阵, $\mathbf{1}_v$ 表示元素全为 1 的二维行向量, \mathbf{e}_j 表示二维行向量中第 j 个元素为 1, 其他元素为 0。

根据文献[15], \hat{Y}_t 在时间 t 的条件特征函数为

$$f_{\hat{Y}}(\boldsymbol{\varepsilon}, t, T) = E^Q[e^{\boldsymbol{\varepsilon}^T \hat{Y}_t} | F_t] = \exp(\mathbf{G}_1(\boldsymbol{\varepsilon}, t, T) + \mathbf{G}_2(\boldsymbol{\varepsilon}, t, T)^T \hat{Y}_t), \quad \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{C}^4,$$

其中, $\mathbf{G}_2(\boldsymbol{\varepsilon}, t, T) = (G_{21}(\boldsymbol{\varepsilon}, t, T), G_{22}(\boldsymbol{\varepsilon}, t, T), G_{23}(\boldsymbol{\varepsilon}, t, T), G_{24}(\boldsymbol{\varepsilon}, t, T))^T$ 满足以下微分方程:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{G}_1(\boldsymbol{\varepsilon}, t, T)}{dt} = -\hat{\boldsymbol{\alpha}}^T \mathbf{G}_2(\boldsymbol{\varepsilon}, t, T), \\ \frac{d\mathbf{G}_2(\boldsymbol{\varepsilon}, t, T)}{dt} = -\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{G}_2(\boldsymbol{\varepsilon}, t, T) - \sum_{j=1}^2 (\psi_j(\mathbf{G}_2(\boldsymbol{\varepsilon}, t, T)) - 1) \hat{\boldsymbol{\delta}}_j^T, \end{cases}$$

其中, $\psi_j(\mathbf{w}) = \int_{\mathbf{R}} e^{\mathbf{w}^T \vartheta(y)} dF_j(y)$, $\mathbf{w} \in \mathcal{C}^4$, $\vartheta(y) = (\mathbf{1}_v, y \mathbf{1}_v)^T$, $F_j(y)$ 是均值为 μ_j 、方差为 σ_j^2 的正态分布函数。

此外, 边界条件 $\mathbf{G}_1(\boldsymbol{\varepsilon}, 0) = 0$, $\mathbf{G}_2(\boldsymbol{\varepsilon}, 0) = \boldsymbol{\varepsilon}$, 从而可得

$$f_j(\phi_1, \phi_2, t, T) = f_{\hat{Y}}(\mathbf{0}_v, i\phi_1, i\phi_2, t, T). \tag{2}$$

方程组(2) 通常没有闭式解, 因此需要采用 Runge - Kutta 算法对其进行求解。

下面求解 $f_c(\phi_1, \phi_2, t, T)$ 。由于 $f_c(\phi_1, \phi_2, t, T)$ 中有马尔可夫链的存在, 因此导致该特征函数的求解较为困难。在本文中, 采用文献[10-16] 引入的方法, 由于马尔可夫链 X_t 在整个生命周期 $[0, T]$ 内是已知的, 因此 θ_{x_t} 不再是随机变量, 而是一个随时间变化的函数 θ_t , 因此, 可以先求 $\hat{f}_c(\phi_1, \phi_2, t, T) = E^Q[e^{-\int_t^T r_s ds + i\phi^T A \int_t^T \varphi_s X_s ds}]$ 。

定理 1 若 A_t^c 由上式确定, 则 Y_{1t}^c, Y_{2t}^c 的联合特征函数为

$$\hat{f}_c(\phi_1, \phi_2, t, T) = \exp(A(\phi_1, \phi_2, \tau)z + B(\phi_1, \phi_2, \tau) + i\phi_1 y_1^c + i\phi_2 y_2^c), \quad \tau = T - t,$$

其中

$$\begin{cases} A(\phi_1, \phi_2, \tau) = \frac{\alpha_1(\phi_1, \phi_2) + \alpha_2(\phi_1, \phi_2)}{\sigma_z^2} \frac{1 - e^{-\alpha_1(\phi_1, \phi_2)\tau}}{1 - \alpha_3(\phi_1, \phi_2)e^{-\alpha_1(\phi_1, \phi_2)\tau}}, \\ B(\phi_1, \phi_2, \tau) = r_0(i\phi_1 + i\phi_2 - 1)\tau + k_z \int_0^\tau \theta_s A(\phi_1, \phi_2, s) ds + \lambda \int_0^\tau \frac{1}{1 - \xi A(\phi_1, \phi_2, s)} ds - \lambda\tau, \\ a(\phi_1, \phi_2) = (\rho_2 \sigma_s \sigma_z i\phi_1 + \rho_3 \sigma_v \sigma_z i\phi_2 - k_z)^2 - 2\sigma_z^2 \left[(r_1 - \frac{1}{2}\sigma_s^2) i\phi_1 + (r_1 - \frac{1}{2}\sigma_v^2) i\phi_2 - \frac{1}{2}\sigma_s^2 \phi_1^2 - \frac{1}{2}\sigma_v^2 \phi_2^2 - \rho_1 \sigma_s \sigma_v \phi_1 \phi_2 - r_1 \right], \\ \alpha_1(\phi_1, \phi_2) = \sqrt{a(\phi_1, \phi_2)}, \\ \alpha_2(\phi_1, \phi_2) = \rho_2 \sigma_s \sigma_z i\phi_1 + \rho_3 \sigma_v \sigma_z i\phi_2 - k_z, \\ \alpha_3(\phi_1, \phi_2) = \frac{\alpha_2(\phi_1, \phi_2) + \alpha_1(\phi_1, \phi_2)}{\alpha_2(\phi_1, \phi_2) - \alpha_1(\phi_1, \phi_2)}. \end{cases}$$

证明 将 Feynman-Kac 定理应用到 $\hat{f}_c(\phi_1, \phi_2, t, T)$, 将得到偏微分方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{f}_c}{\partial t} + (r - \frac{1}{2}\sigma_s^2 z) \frac{\partial \hat{f}_c}{\partial Y_1} + (r - \frac{1}{2}\sigma_v^2 z) \frac{\partial \hat{f}_c}{\partial Y_2} + k_z(\theta_t - z) \frac{\partial \hat{f}_c}{\partial z} + \frac{1}{2}\sigma_s^2 z \frac{\partial^2 \hat{f}_c}{\partial Y_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 z \frac{\partial^2 \hat{f}_c}{\partial Y_2^2} \\ & + \frac{1}{2}\sigma_z^2 z \frac{\partial^2 \hat{f}_c}{\partial z^2} + \rho_1 \sigma_s \sigma_v z \frac{\partial^2 \hat{f}_c}{\partial Y_1 \partial Y_2} + \rho_2 \sigma_s \sigma_z z \frac{\partial^2 \hat{f}_c}{\partial Y_1 \partial z} + \rho_3 \sigma_v \sigma_z z \frac{\partial^2 \hat{f}_c}{\partial Y_2 \partial z} - (r_0 + r_1 z) \hat{f}_c \\ & + \lambda E[\hat{f}_c(Y_{1t}, Y_{2t}, z_t + J^c(z), t, T, \phi_1, \phi_2) - \hat{f}_c(Y_{1t}, Y_{2t}, z_t, t, T, \phi_1, \phi_2)] = 0. \end{aligned}$$

假设特征函数 $\hat{f}_c(\phi_1, \phi_2, t, T)$ 具有如下形式:

$$\hat{f}_c(\phi_1, \phi_2, t, T) = \exp(A(\phi_1, \phi_2, \tau)z + B(\phi_1, \phi_2, \tau) + i\phi_1 y_1^c + i\phi_2 y_2^c), \quad \tau = T - t,$$

其中边界条件 $A(\phi_1, \phi_2, 0) = 0$, $B(\phi_1, \phi_2, 0) = 0$, 将上述公式代入可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} z + \frac{\partial B}{\partial t} + (r_0 + r_1 z - \frac{1}{2} \sigma_s^2 z) i \phi_1 + (r_0 + r_1 z - \frac{1}{2} \sigma_v^2 z) i \phi_2 + k_z (\theta_t - z) A - \frac{1}{2} \sigma_s^2 z \phi_1^2 - \frac{1}{2} \sigma_v^2 z \phi_2^2 - \rho_1 \sigma_s \sigma_v z \phi_1 \phi_2 \\ + \rho_2 \sigma_s \sigma_z z i \phi_1 A + \rho_3 \sigma_v \sigma_z z i \phi_2 A + \frac{1}{2} \sigma_z^2 z A^2 - (r_0 + r_1 z) + \lambda \left(\frac{1}{1 - A\xi} - 1 \right) = 0, \end{aligned}$$

因此, 可得到常微分方程组

$$\begin{cases} -\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma_z^2 A^2 + (\rho_2 \sigma_s \sigma_z i \phi_1 + \rho_3 \sigma_v \sigma_z i \phi_2 - k_z) A \\ \quad + \left[(r_1 - \frac{1}{2} \sigma_s^2) i \phi_1 + (r_1 - \frac{1}{2} \sigma_v^2) i \phi_2 - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \phi_1^2 - \frac{1}{2} \sigma_v^2 \phi_2^2 - \rho_1 \sigma_s \sigma_v \phi_1 \phi_2 - r_1 \right], \\ -\frac{\partial B}{\partial t} = r_0 (i \phi_1 + i \phi_2) + k_z \theta_t A - r_0 + \lambda \left(\frac{1}{1 - A\xi} - 1 \right). \end{cases} \quad (3)$$

为了便于求解, 式(3)可以改写为

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma_z^2 A^2 + (\rho_2 \sigma_s \sigma_z i \phi_1 + \rho_3 \sigma_v \sigma_z i \phi_2 - k_z) A \\ \quad + \left[(r_1 - \frac{1}{2} \sigma_s^2) i \phi_1 + (r_1 - \frac{1}{2} \sigma_v^2) i \phi_2 - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \phi_1^2 - \frac{1}{2} \sigma_v^2 \phi_2^2 - \rho_1 \sigma_s \sigma_v \phi_1 \phi_2 - r_1 \right], \\ \frac{\partial B}{\partial \tau} = r_0 (i \phi_1 + i \phi_2) + k_z \theta_t A - r_0 + \lambda \left(\frac{1}{1 - A\xi} - 1 \right). \end{cases}$$

先求 $A(\phi_1, \phi_2, \tau)$ 。首先令

$$\begin{aligned} a(\phi_1, \phi_2) &= (\rho_2 \sigma_s \sigma_z i \phi_1 + \rho_3 \sigma_v \sigma_z i \phi_2 - k_z)^2 \\ &\quad - 2\sigma_z^2 \left[(r_1 - \frac{1}{2} \sigma_s^2) i \phi_1 + (r_1 - \frac{1}{2} \sigma_v^2) i \phi_2 - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \phi_1^2 - \frac{1}{2} \sigma_v^2 \phi_2^2 - \rho_1 \sigma_s \sigma_v \phi_1 \phi_2 - r_1 \right], \end{aligned}$$

$$\alpha_1(\phi_1, \phi_2) = \sqrt{a(\phi_1, \phi_2)}, \quad \alpha_2(\phi_1, \phi_2) = \rho_2 \sigma_s \sigma_z i \phi_1 + \rho_3 \sigma_v \sigma_z i \phi_2 - k_z, \quad \alpha_3(\phi_1, \phi_2) = \frac{\alpha_2(\phi_1, \phi_2) + \alpha_1(\phi_1, \phi_2)}{\alpha_2(\phi_1, \phi_2) - \alpha_1(\phi_1, \phi_2)},$$

可直接求得

$$A(\phi_1, \phi_2, \tau) = \frac{\alpha_1(\phi_1, \phi_2) + \alpha_2(\phi_1, \phi_2)}{\sigma_z^2} \frac{1 - e^{-\alpha_1(\phi_1, \phi_2)\tau}}{1 - \alpha_3(\phi_1, \phi_2) e^{-\alpha_1(\phi_1, \phi_2)\tau}}.$$

对于 $B(\phi_1, \phi_2, \tau)$, 对微分方程两边同时积分, 可得

$$B(\phi_1, \phi_2, \tau) = r_0 (i \phi_1 + i \phi_2 - 1) \tau + k_z \int_0^\tau \theta_s A(\phi_1, \phi_2, s) ds + \lambda \int_0^\tau \frac{1}{1 - \xi A(\phi_1, \phi_2, s)} ds - \lambda \tau.$$

对于 $\lambda \int_0^\tau \frac{1}{1 - \xi A(\phi_1, \phi_2, s)} ds$ 的求解, 首先进行如下近似(详细证明见文献[17]):

$$1 - e^{-l_1 \tau} \approx \frac{1 - e^{-\alpha_1(\phi_1, \phi_2)\tau}}{1 - \alpha_3(\phi_1, \phi_2) e^{-\alpha_1(\phi_1, \phi_2)\tau}},$$

其中 $l_1 = -\ln\left(\frac{e^{-\alpha_1(\phi_1, \phi_2)} - \alpha_3(\phi_1, \phi_2) e^{-\alpha_1(\phi_1, \phi_2)}}{1 - \alpha_3(\phi_1, \phi_2) e^{-\alpha_1(\phi_1, \phi_2)}}\right)$ 。于是

$$A(\phi_1, \phi_2, \tau) \approx C_1 (1 - e^{-l_1 \tau}),$$

其中 $C_1 = \frac{\alpha_1(\phi_1, \phi_2) + \alpha_2(\phi_1, \phi_2)}{\sigma_z^2}$ 。将 $A(\phi_1, \phi_2, \tau)$ 代入

$$\int_0^\tau \frac{1}{1 - \xi A(\phi_1, \phi_2, s)} ds = \int_0^\tau \frac{1}{1 - C_1 \xi (1 - e^{-l_1 s})} ds, \quad (4)$$

对式(4)右端积分,

$$\int_0^\tau \frac{1}{1-\xi A(\phi_1, \phi_2, s)} ds = -\frac{\ln(1-C_1\xi+C_1\xi e^{-l_1\tau})}{l_1(C_1\xi-1)} + \frac{-l_1\tau}{l_1(C_1\xi-1)}.$$

定理 2 根据文献[10],假设过程 Y_{1t}, Y_{2t}, z_t 服从该模型,则 $f(\phi_1, \phi_2, \tau)$ 的表达式为

$$f(\phi_1, \phi_2, t, T) = f_j(\phi_1, \phi_2, t, T) \exp[i\phi_1 y_1^c + i\phi_2 y_2^c + A(\phi_1, \phi_2, \tau)z + H(\phi_1, \phi_2, \tau)] \times \langle e^U X_t, I \rangle,$$

其中, $\tau = T - t$, $U = \int_t^T [Q^T + \text{diag}[k_z A(\phi_1, \phi_2, s)\theta]] ds$,

$$H(\phi_1, \phi_2, \tau) = r_0(i\phi_1 + i\phi_2 - 1)\tau + \lambda \int_0^\tau \frac{1}{1 - \xi A(\phi_1, \phi_2, s)} ds - \lambda\tau.$$

证明 由累次条件期望公式得

$$\begin{aligned} f(\phi_1, \phi_2, t, T) &= E^\mathcal{Q} [e^{-\int_t^T r_s ds + i\phi^T A_T} | \mathcal{F}_t, X_t] \\ &= E^\mathcal{Q} [E^\mathcal{Q} [e^{-\int_t^T r_s ds + i\phi^T A_T} | \mathcal{F}_t, X_T] | X_t] \\ &= E^\mathcal{Q} [f_j(\phi_1, \phi_2, t, T) \hat{f}_c(\phi_1, \phi_2, t, T) | X_t] \\ &= f_j(\phi_1, \phi_2, t, T) \exp(i\phi_1 y_1^c + i\phi_2 y_2^c + A(\phi_1, \phi_2, \tau)z \\ &\quad + H(\phi_1, \phi_2, \tau)) E^\mathcal{Q} [e^{k_z \int_t^T \theta_s A(\phi_1, \phi_2, s) ds} | X_t] \\ &= f_j(\phi_1, \phi_2, t, T) \exp(i\phi_1 y_1^c + i\phi_2 y_2^c + A(\phi_1, \phi_2, \tau)z \\ &\quad + H(\phi_1, \phi_2, \tau)) E^\mathcal{Q} [e^{k_z \int_t^T \langle A(\phi_1, \phi_2, s)\theta, X_t \rangle ds} | X_t]. \end{aligned}$$

根据文献[文献18]中的引理 A.1 或文献[10]中的定理 2,可以很容易地得到

$$E^\mathcal{Q} [e^{k_z \int_0^\tau \langle A(\phi_1, \phi_2, s)\theta, X_t \rangle ds} | X_t] = \langle e^U X_t, I \rangle,$$

证毕。

于是可得出 $P(t, T) = f(0, 0, t, T)$, 其中 $P(t, T) = E^\mathcal{Q} [e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t]$ 表示在 T 时刻到期的零息债券在 t 时刻的价格。

3 脆弱期权定价

3.1 脆弱期权在市场中的应用

根据文献[4],脆弱期权即易受交易对手违约风险(又被称为反方风险,是指在期权交易中,期权的卖方无法按照期权合约的规定,满足买方的行权要求)影响的期权,其交易场所通常发生在场外,因为它们直接由 2 个交易对手进行交易,而没有中央对手方(如交易所)来保障交易的履约。

以下是含有交易对手违约风险的期权在市场中的应用。

1) 风险交易:一些愿意承担高风险来换取高回报的投资者,可能会进行含有交易对手违约风险的期权交易。

2) 风险对冲:一些大型企业或金融机构,在面临市场价格波动的风险(如利率、汇率、商品价格等)时,可能会购买含有交易对手违约风险的期权来进行对冲。

3) 信用风险管理:对于面临显著信用风险的投资者或企业,通过购买含有交易对手违约风险的期权,可以把风险转移给期权卖方。

3.2 脆弱期权定价公式

在风险中性测度 \mathcal{Q} 下,执行价格为 K ,到期日为 T 的脆弱期权在时间 $0 \leq t \leq T$ 的价格为

$$C(S_t, V_t, r_t, z_t) = E^\mathcal{Q} [e^{-\int_t^T r_s ds} (I_{|V_T \geq D^*|} (S_T - K)^+ + I_{|V_T < D^*|} \frac{(1-\omega)V_T(S_T - K)^+}{D}) | \mathcal{F}_t],$$

其中: ω 为企业重组或破产的损失比例; D 为交易对手需偿还的债务; D^* 为常数违约边界,且通常小于 D ,这是因为当 $V_T < D$ 时交易对手还可能继续保持经营。当信用事件发生时,期权承销方按照名义赔付的 $\frac{(1-\omega)V_T}{D}$ 支付给期权的持有者。若 $V_T > D$,则信用事件不会发生,期权持有者在 T 时刻将获得全部的赔付。

由于在风险中性测度 \mathcal{Q} 下,该定价公式存在多个随机变量,使得直接求得该模型下的期权价格较为困难,因此先通过 Radon-Nikodym 导数定义远期测度 \mathcal{Q}^S ,即

$$\frac{d\mathcal{Q}^S}{d\mathcal{Q}} = \frac{e^{-\int_t^T r_s ds}}{P(t, T)},$$

那么在 \mathcal{Q}^S 下,期权价格的计算公式为

$$\begin{aligned} C(k, \zeta) &= C(S_T, V_T, r_T, z_T) = P(t, T) E^{\mathcal{Q}^S} [I_{|V_T \geq D^*|} (S_T - K)^+ + I_{|V_T < D^*|} \frac{(1-\omega) V_T (S_T - K)^+}{D} | \mathcal{F}_t] \\ &= P(t, T) E^{\mathcal{Q}^S} [I_{|e^{Y_{2T}} \geq e^\zeta|} (e^{Y_{1T}} - e^k)^+ + I_{|e^{Y_{2T}} < e^\zeta|} \frac{(1-\omega) e^{Y_{2T}} (e^{Y_{1T}} - e^k)^+}{D} | \mathcal{F}_t], \end{aligned}$$

其中, $Y_{1T} = \ln S_T$, $Y_{2T} = \ln V_T$, $k = \ln K$, $\zeta = \ln D^*$ 。

通过测度变换的 Radon-Nikodym 导数将 \mathcal{Q}^S 下的期望转换为 \mathcal{Q} 测度下的期望

$$\begin{aligned} \varphi(\phi_1, \phi_2, t, T) &= E^{\mathcal{Q}^S} [e^{i\phi^T A_T} | Y_{1t} = y_1, Y_{2t} = y_2, z_t = z, X_t] \\ &= E^{\mathcal{Q}} \left[\frac{e^{-\int_t^T r_s ds + i\phi^T A_T}}{P(t, T)} | Y_{1t} = y_1, Y_{2t} = y_2, z_t = z, X_t \right] = \frac{1}{P(t, T)} f(\phi_1, \phi_2, t, T). \end{aligned}$$

定理 3 若标的资产价格 V_t 和交易对手资产价格 V_t 的联合特征函数 $f(\phi_1, \phi_2, t, T)$, 则该脆弱欧式看涨期权的价格为

$$C(k, \zeta) = P(t, T) C_1(k, \zeta) + P(t, T) \frac{(1-\omega)}{D} C_2(k, \zeta),$$

其中

$$\begin{aligned} C_1(k, \zeta) &= \frac{e^{-\alpha_1 k - \beta_1 \zeta}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\delta_1 k + \delta_2 \zeta)} \hat{c}_1(\delta_1, \delta_2) d\delta_1 d\delta_2, \\ C_2(k, \zeta) &= \frac{e^{-\alpha_1 k + \beta_2 \zeta}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\delta_1 k + \delta_2 \zeta)} \hat{c}_2(\delta_1, \delta_2) d\delta_1 d\delta_2, \\ \hat{c}_1(\delta_1, \delta_2) &= \frac{\varphi(\delta_1 - (\alpha_1 + 1)i, \delta_2 - i\beta_1, t, T)}{(\alpha_1^2 + \alpha_1 - \delta_1^2 + i(2\alpha_1 + 1)\delta_1)(i\delta_2 + \beta_1)}, \\ \hat{c}_2(\delta_1, \delta_2) &= \frac{\varphi(\delta_1 - (\alpha_1 + 1)i, \delta_2 - (1 - \beta_2)i, t, T)}{(\alpha_1^2 + \alpha_1 - \delta_1^2 + i(2\alpha_1 + 1)\delta_1)(-i\delta_2 + \beta_2)}, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_1, \beta_1, \beta_2 > 0$ 为阻尼系数。详细证明见文献[14]或附录 A。

3.3 FFT 算法过程

根据文献[14],为了便于求解,首先采用梯形公式来近似双重积分 $C_1(k, \zeta)$ 、 $C_2(k, \zeta)$ 的步骤与其类似。

$$C_1(k, \zeta) \approx \frac{e^{-\alpha_1 k - \beta_1 \zeta}}{(2\pi)^2} \sum_{a_1=0}^{N-1} \sum_{b_1=0}^{N-1} e^{-i(s_{a_1} k + s_{b_1} \zeta)} \hat{c}_1(s_{a_1}, s_{b_1}) \omega_1 \omega_2,$$

其中: $s_{a_1} = (a_1 - \frac{N}{2})\omega_1$; $s_{a_2} = (a_2 - \frac{N}{2})\omega_2$; $a_1, b_1 = 0, 1, \dots, N-1$, N 是区间数目, ω_1, ω_2 为步长。

在二维 FFT 算法中,定义

$$k_{p_1} = (p_1 - \frac{N}{2})\tilde{\lambda}_1, \quad \zeta_{q_1} = (q_1 - \frac{N}{2})\tilde{\lambda}_2,$$

其中: $\tilde{\lambda}_1 \omega_1 = \tilde{\lambda}_2 \omega_2 = \frac{2\pi}{N}$; $0 \leq p_1, q_1 \leq N$ 。对 $N \times N$ 个不同对数执行价格和不同对数违约边界, $C_1(k_{p_1}, \zeta_{q_1})$ 可以近似表示为

$$\varphi_1(t, T) = (-1)^{p_1+q_1} \sum_{a_1=0}^{N-1} \sum_{b_1=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(a_1 p_1 + b_1 q_1)} [(-1)^{a_1+b_1} \hat{c}_1(s_{a_1}, s_{b_1})],$$

其中 $\varphi_1(t, T) = (-1)^{p_1+q_1} \sum_{a_1=0}^{N-1} \sum_{b_1=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(a_1 p_1 + b_1 q_1)} [(-1)^{a_1+b_1} \hat{c}_1(s_{a_1}, s_{b_1})]$ 。用类似的方法也可求得 $C_2(k, \zeta)$ 的数

值近似 $C_2(k_{p_1}, \zeta_{q_1})$ 。

4 数值分析

本章基于 FFT 方法对构建的脆弱期权定价模型进行数值分析。简单起见,在计算时,令 $N=2\ 048$, $\omega_1 =$

$$\omega_2 = \frac{600}{N}, \tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = \frac{2\pi}{N\omega_1}, \alpha_1 = 1.2, \beta_1 = \beta_2 = 2。$$

表 1 是基于文献[10-14]设置的基准参数值。

表 1 基准参数值
Table 1 Reference parameter value

参数	S_0	V_0	T	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_s	σ_z	σ_v	k_z	r_0	r_1	λ	ξ
参数值	10	10	0.5	0.5	-0.5	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.03	0.2	2	0.5
参数	θ_1	θ_2	z_0	η_1	η_2	λ_1	λ_2	γ_{11}	γ_{22}	μ_1	μ_2	σ_1	σ_2	
参数值	0.02	0.2	0.02	18	18	1	1	4	4	0.1	0.1	0.24	0.24	

表 2 提供了利用本文给出的 FFT 方法与 Monte Carlo 模拟分别得出的脆弱期权的定价结果,其中 RE (relative error) 表示采用 FFT 方法的期权价格与 Monte Carlo 模拟的期权价格之间的最大相对误差(计算公式:

$$RE(\%) = \frac{P_{FFT} - P_{Monte\ Carlo}}{P_{FFT}} \times 100\%。$$

通过比较二者得出的结果,可以看出本文给出的脆弱期权的定价公式具有较高的准确性。此外,FFT 大约需要 437 s 的时间来产生 2 048 个期权价格,而 Monte Carlo 模拟大约需要 67 s 的时间来产生单个期权价格,因此,FFT 方法相较于 Monte Carlo 法来说计算效率也更高。

表 2 Monte Carlo 与 FFT 求解结果比较
Table 2 Comparison of Monte Carlo and FFT solution results

K	FFT	Monte Carlo	RE/%	K	FFT	Monte Carlo	RE/%
8.0	3.164 6	3.159 9	-0.147 5	10.2	2.359 0	2.349 8	-0.390 3
8.2	3.072 1	3.076 3	0.135 9	10.4	2.303 8	2.308 3	0.195 5
8.4	2.984 4	3.001 2	0.564 3	10.6	2.250 8	2.253 1	0.102 7
8.6	2.901 0	2.906 8	0.199 5	10.8	2.199 9	2.189 3	-0.485 2
8.8	2.821 7	2.814 7	-0.249 5	11.0	2.151 1	2.154 0	0.136 8
9.0	2.746 1	2.761 6	0.564 3	11.2	2.104 1	2.109 9	0.278 5
9.2	2.674 1	2.683 0	0.332 4	11.4	2.085 9	2.045 1	-0.668 3
9.4	2.605 3	2.625 2	0.763 9	11.6	2.015 3	2.010 1	-0.260 3
9.6	2.539 6	2.533 7	-0.231 9	11.8	1.973 4	1.976 7	0.167 4
9.8	2.476 8	2.501 9	1.016 5	12.0	1.933 0	1.936 1	0.159 3
10.0	2.416 6	2.423 9	0.302 7				

本文主要讨论一些基本参数对脆弱期权的影响,见图 1—3。图 1 展示了 3 种不同状态下的脆弱期权价格与执行价格 K 以及违约边界 D^* 的关系,其中红线表示具有转移速率矩阵 Q 的混合状态下的期权价格变化情况,蓝线和绿线分别表示状态 1 和状态 2 下期权价格的变化情况。从总体上看,3 种状态下的脆弱期权价格都随着执行价格 K 、违约边界 D^* 的增加而递减。这是因为对于看涨期权来说,如果执行价格较低,那么就意味着行权的时候可以用更低的价格做多期货,那么在其他条件相同的情况下,执行价格低的期权合约就会越高。随着违约边界 D^* 的增大,交易对手违约概率会增大,期权价格就越低。其次,本文提出的模型的期权价格比状态 1(均值水平恒为 $\theta_1 = 0.02$,且 $Q = 0$,不存在状态切换,状态 2 同理)得到的期权价格高,比状态 2(S_0) 得到的期权价格低。这主要是因为均值回复水平越大,波动性风险就越大,导致脆弱看涨期权的价格更高(或更低)。再次,从图 2 中可以看出,随机利率下的脆弱期权价格高于固定利率,波动率含有跳时的期权价格高于波动率不含跳的情况。这是因为在随机利率或者波动率带有跳跃的情况下,资产价格击中执行价格的可能性会更大,因此最终得到的欧式看涨期权的价格也会更高,需要额外的风险溢价来补偿波动性风险、利率风险和区制转换风险(本文考虑的模型纳入了 3 个风险因素的影响,包括随机波动率、区制转换和随机利率)。换句话说,忽略这 3 个风险来源可能会导致期权溢价的严重低估。这些风险的特殊之处在于它们是其他

长到期衍生品定价的重要风险因素。图3(a)、(b)分别分析了 S_0 、 V_0 的初始价格对欧式脆弱看涨期权的影响。可以看出,期权价格随着 S_0 、 V_0 的增加而增加,并且该结果与 Han 等^[11]所得结果保持一致。

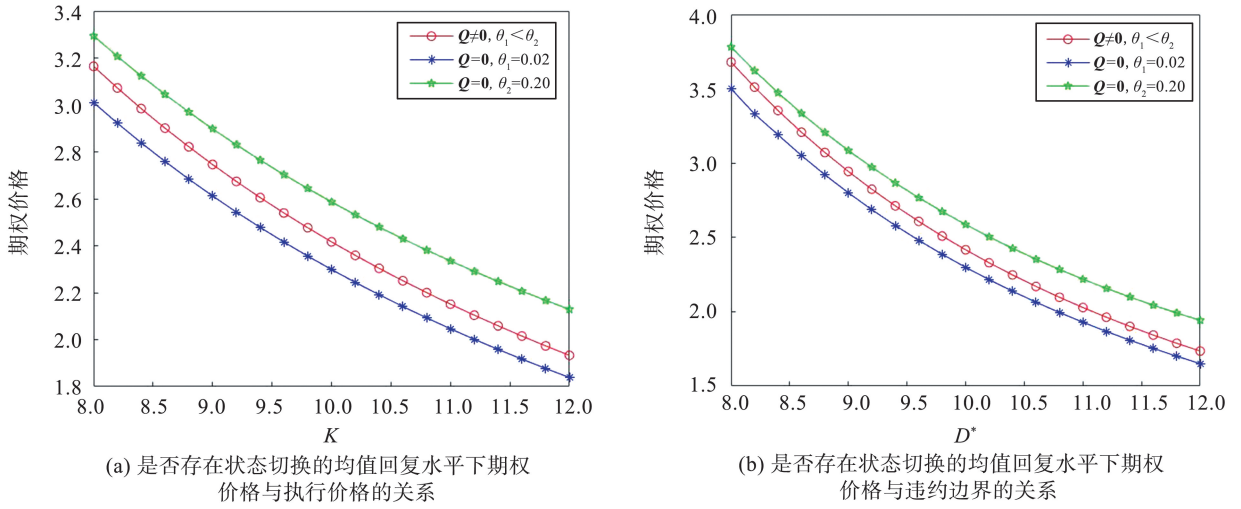


图1 均值回复水平是否存在状态切换对期权价格的影响

Fig.1 The impact of whether there is a state switch in the mean level on option prices

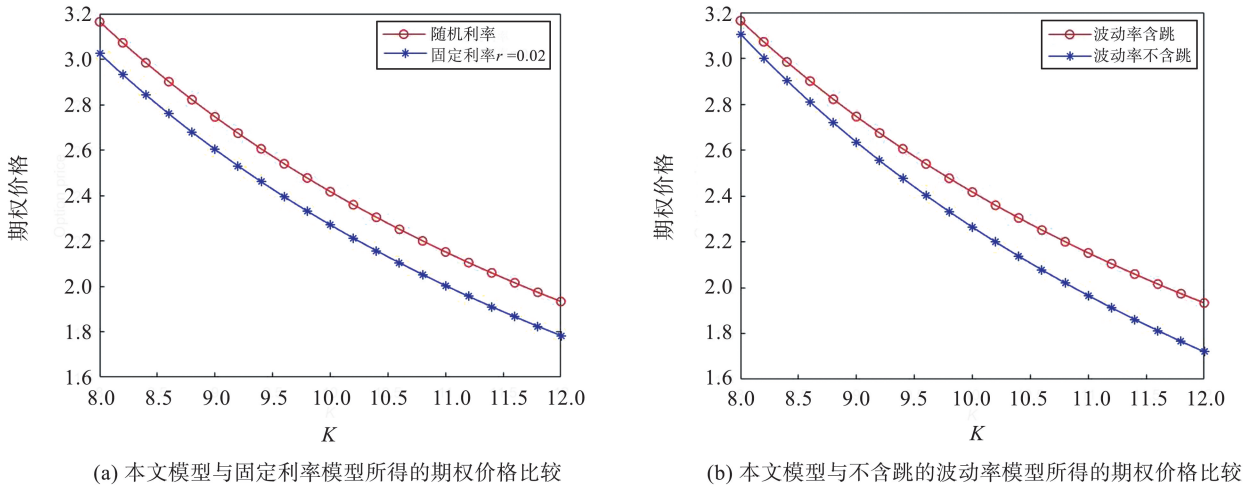


图2 本文模型与固定利率模型、不含跳的波动率模型所得脆弱期权价格比较

Fig.2 Comparison between the model in this paper and fixed interest rate model and volatility model without jump

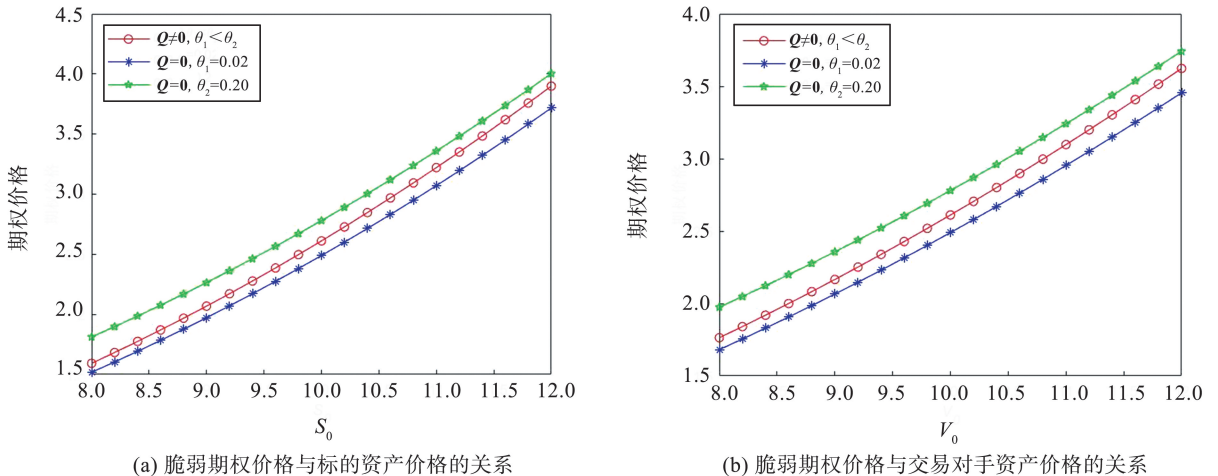


图3 期权价格与标的资产价格、交易对手资产价格的关系

Fig.3 Relationship between option price and underlying asset price as well as counterparty asset price

5 结语

本文假设波动率和利率的均值回复水平由有限状态空间的连续马尔可夫过程控制、标的资产价格过程和交易对手的资产价格过程中含有的跳服从 Hawkes 过程。该模型不仅考虑到了资产价格受到外界冲击而产生的跳以及跳跃之间的聚集性,还考虑到了经济条件发生变化对资产价格动态的影响。与现有的大多数脆弱期权定价的相关文献相比,本文提出的模型能够更好地描述市场特征。通过数值分析的结果可以看出,本文得出的脆弱期权的定价公式具有较强的可行性,得出的定价结果也有较高的准确性;并通过比较该模型与无马尔可夫区制转换的随机利率模型的定价结果,显示了在模型中引入马尔可夫区制转换、随机利率、波动率以及随机跳跃强度的作用,可以看出该模型在实际市场中有着广泛的应用。

参考文献:

- [1] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. *Journal of Political Economy*, 1973, 81(3):637-654.
- [2] HE Xinjiang. A closed-form pricing formula for European options under the Heston model with stochastic interest rate[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, 335:323-333.
- [3] PILLAY E, O'HARA G J. FFT based option pricing under a mean reverting process with stochastic volatility and jumps[J]. *Computational Applied Mathematics*, 2011, 235(12):3378-3384.
- [4] JOHNSON H, STULZ R. The pricing of options with default risk[J]. *Journal of Finance*, 1987, 42(2):267-280.
- [5] TIAN Lihui, WANG Guanying, WANG Xingchun, et al. Pricing vulnerable options with correlated credit risk under jump-diffusion processes[J]. *Journal of Futures Markets*, 2014, 34(10):957-979.
- [6] JING Bo, LI Shenghong, MA Yong. Pricing VIX options with volatility clustering[J]. *Journal of Futures Markets*, 2020, 40(6):928-944.
- [7] CHEN Li, MA Yong, XIAO Weilin. Pricing defaultable bonds under Hawkes jump-diffusion processes[J]. *Finance Research Letters*, 2022, 47:102738.
- [8] MA Y, PAN D, SHRESTHA K, et al. Pricing and hedging foreign equity options under Hawkes jump-diffusion processes[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2020, 537:122645.
- [9] HAMILTON J D. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle[J]. *Econometrica*, 1989, 57(2):357.
- [10] XIE Yurong, DENG Guohe. Vulnerable European option pricing in a Markov regime-switching Heston model with stochastic interest rate[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2022, 156:111896.
- [11] HAN Miao, SONG Xuefeng, NIU Huawei, et al. Pricing vulnerable options with market prices of common jump risks under regime-switching models[J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2018, 2018:8545841.
- [12] FAN K, SHEN Y, SIU K T, et al. An FFT approach for option pricing under a regime-switching stochastic interest rate model[J]. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 2016, 46(11):5292-5310.
- [13] ELLIOTT R J, AGGOUN L, MOORE J B. Hidden Markov models: estimation and control[M]. New York: Springer, 1994.
- [14] 马勇,吕建平. Hawkes 跳扩散模型下的脆弱期权定价[J]. *系统工程学报*, 2022, 37(5):605-616.
MA Yong, LYU Jianping. Vulnerable option pricing under Hawkes jump diffusion model[J]. *Journal of Systems Engineering*, 2022, 37(5):605-616.
- [15] DUFFIE D, PAN J, SINGLETON K. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions[J]. *Econometrica*, 2000, 68(6):1343-1376.
- [16] ELLIOTT J R, NISHIDE K, OSAKWE U C. Heston-type stochastic volatility with a Markov switching regime[J]. *Journal of Futures Markets*, 2016, 36(9):902-919.
- [17] TENG L, EHRHARDT M, GÜNTHER M. On the Heston model with stochastic correlation[J]. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2016, 19(6):1-30.
- [18] BUFFINGTON J, ELLIOTT R J. American options with regime switching[J]. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2002, 5(5):497-514.

附录 A

定理 3 的证明 令

$$C_1(k, \xi) = E^{\mathcal{Q}^S} [I_{|e^{Y_{2T}} \geq e^{\xi}|} (e^{Y_{1T}} - e^k) + | \mathcal{F}_t],$$

$$C_2(k, \xi) = E^{\mathcal{Q}^S} [I_{|e^{Y_{2T}} < e^{\xi}|} \frac{(1-\omega)e^{Y_{2T}}(e^{Y_{1T}} - e^k)^+}{D} | \mathcal{F}_t],$$

所以脆弱期权的定价公式可写成

$$C(k, \xi) = P(t, T) C_1(k, \xi) + P(t, T) \frac{(1-\omega)}{D} C_2(k, \xi) C。$$

由于 C_1, C_2 不是平方可积的, 因此不能直接用傅里叶变换, 需要对 $C_1(k, \xi), C_2(k, \xi)$ 进行修正。令

$$c_1(k, \xi) = e^{\alpha_1 k} e^{\beta_1 \xi} C_1(k, \xi), \quad c_2(k, \xi) = e^{\alpha_1 k} e^{-\beta_2 \xi} C_2(k, \xi),$$

其中 $\alpha_1, \beta_1, \beta_2 > 0$ 为阻尼系数, 此时 $c_1(k, \xi), c_2(k, \xi)$ 是平方可积的, 其傅里叶变换分别为

$$\hat{c}_1(\delta_1, \delta_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\delta_1 k} e^{i\delta_2 \xi} c_1(k, \xi) dk d\xi;$$

$$\hat{c}_2(\delta_1, \delta_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\delta_1 k} e^{i\delta_2 \xi} c_2(k, \xi) dk d\xi,$$

对 $\hat{c}_1(\delta_1, \delta_2)$ 进行计算并运用 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned} \hat{c}_1(\delta_1, \delta_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(i\delta_2 + \alpha_1)k} e^{(i\delta_2 + \beta_1)\xi} E^{\mathcal{Q}^S} [(e^{Y_{1T}} - e^k) + I_{|e^{Y_{2T}} \geq e^{\xi}|} | \mathcal{F}_t] dk d\xi \\ &= E^{\mathcal{Q}^S} [\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(i\delta_2 + \beta_1)\xi} I_{|e^{Y_{2T}} \geq e^{\xi}|} \int_{-\infty}^{Y_{1T}} (e^{(i\delta_1 + \alpha_1)k} e^{Y_{1T}} - e^{(i\delta_1 + \alpha_1 + 1)k}) dk d\xi | \mathcal{F}_t] \\ &= \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_1 - \delta_1^2 + i(2\alpha_1 + 1)\delta_1} E^{\mathcal{Q}^S} [\int_{-\infty}^{Y_{2T}} e^{(i\delta_2 + \beta_1)\xi} e^{(i\delta_1 + \alpha_1 + 1)Y_{1T}} d\xi | \mathcal{F}_t] \\ &= \frac{\varphi(\delta_1 - (\alpha_1 + 1)i, \delta_2 - i\beta_1, t, T)}{(\alpha_1^2 + \alpha_1 - \delta_1^2 + i(2\alpha_1 + 1)\delta_1)(i\delta_2 + \beta_1)}。 \end{aligned}$$

类似可证

$$\hat{c}_2(\delta_1, \delta_2) = \frac{\varphi(\delta_1 - (\alpha_1 + 1)i, \delta_2 - (1 - \beta_2)i, t, T)}{(\alpha_1^2 + \alpha_1 - \delta_1^2 + i(2\alpha_1 + 1)\delta_1)(-i\delta_2 + \beta_2)}。$$

对 $\hat{c}_1(\delta_1, \delta_2)$ 和 $\hat{c}_2(\delta_1, \delta_2)$ 进行傅里叶变换可得

$$C_1(k, \xi) = \frac{e^{-\alpha_1 k - \beta_1 \xi}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\delta_1 k + \delta_2 \xi)} \hat{c}_1(\delta_1, \delta_2) d\delta_1 d\delta_2,$$

$$C_2(k, \xi) = \frac{e^{-\alpha_1 k + \beta_2 \xi}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\delta_1 k + \delta_2 \xi)} \hat{c}_2(\delta_1, \delta_2) d\delta_1 d\delta_2。$$

最终可得脆弱欧式看涨期权价格

$$C(k, \xi) = P(t, T) C_1(k, \xi) + P(t, T) \frac{(1-\omega)}{D} C_2(k, \xi)。$$