

基于 LSCUSUM 方法的 RCA(1) 模型参数变点检验

侯成婷¹, 陈占寿^{1,2*}

(1.青海师范大学数学与统计学院, 青海 西宁 810008; 2.青海师范大学省部共建藏语智能信息处理及应用国家重点实验室, 青海 西宁 810008)

摘要:对一阶随机系数自回归模型(first-order random coefficient autoregressive model, RCA(1))的参数变点问题展开研究,提出了一种检验参数变点的基于位置和尺度的累积和(location and scale-based cumulative sum, LSCUSUM)检验统计量,在无变点原假设下推导出 LSCUSUM 统计量收敛于布朗桥的上界,并在备择假设下证明了该方法的一致性。数值模拟结果表明, LSCUSUM 方法可以较好地控制经验水平,且相比 RCA(1)模型参数变点的方法,经验势也有了一定程度的提高。最后通过所提方法分析了东晶电子股票的日收盘数据,检测出了该组数据中存在的变点。

关键词:随机系数自回归模型;LSCUSUM 统计量;参数变点;变点检验

中图分类号:O212.1 **文献标志码:**A

引用格式:侯成婷,陈占寿. 基于 LSCUSUM 方法的 RCA(1)模型参数变点检验[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(3):107-115.

Test of parameter change point in RCA(1) model based on LSCUSUM method

HOU Chengting¹, CHEN Zhanshou^{1,2*}

(1. School of Mathematics and Statistics, Qinghai Normal University, Xining 810008, Qinghai, China; 2. The State Key Laboratory of Tibetan Intelligent Information Processing and Application Jointly Built by Qinghai Normal University, Xining 810008, Qinghai, China)

Abstract: The parameter change point problem of the first-order random coefficient autoregressive (RCA(1)) model is studied, and a location and scale based cumulative sum (LSCUSUM) test statistic is proposed to test the parameter change points. Under the null hypothesis of no change points, the convergence of the LSCUSUM statistic to the upper bound of the Brownian bridge is derived. Consistency of the method is established under the alternative hypothesis. Numerical simulation results demonstrate that the introduced LSCUSUM method effectively controls the empirical level. Furthermore, compared to existing methods for testing parameter change points in RCA(1) models, the proposed approach exhibits an enhanced empirical power. Finally, the method is applied to analyze daily closing data of Dongjing electronics stock, and detect the change points within the dataset.

Key words: random coefficient model; LSCUSUM test; parameter change point; change point test

0 引言

变点问题最早起源于工业质量控制,后在金融、经济、计算机、气象学、流行病学等许多领域中得到发展和广泛应用。累积和(cumulative sum, CUSUM)方法因具有检验功效高、使用方便的优点而成为变点检验中最常用的方法之一。早期基于 CUSUM 方法的变点检验研究主要考虑的是独立序列,相关研究总结可见文献[1]。自 Inlanc 等^[2]的开创性工作以来,人们对时间序列模型变点的 CUSUM 检验问题进行了大量研究,相关研究请参阅文献[3-6]。Kang 等^[7]指出传统基于估计的 CUSUM 检验经常会出现水平扭曲问题,特

收稿时间:2023-12-24; 网络出版时间:2024-11-14 09:50:23

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12161072); 青海省自然科学基金资助项目(2024-ZJ-933)

第一作者:侯成婷(1999—),女,硕士研究生,研究方向为应用数理统计. E-mail:980289934@qq.com

*通信作者:陈占寿(1982—),男,教授,博士,研究方向为应用数理统计. E-mail:chenzhanshou@126.com

别是在处理具有高波动性的时间序列时水平扭曲会很严重,于是很多学者对CUSUM方法进行了不同的改进^[8-11]。

构造CUSUM检验统计量时要么使用原始观测数据,要么使用拟合模型后的残量。由于在时间序列中存在变点时,不论是原始观测数据还是残量中都带有变点的信息,因此通过组合原始数据和残量来构造CUSUM统计量是否能够进一步提高变点检验的功效是一个值得研究的问题。基于此思想, Lee^[12]提出了一种基于位置和尺度的累积和(location and scale-based cumulative sum, LSCUSUM)检验统计量, LSCUSUM统计量中同时用到了原始观测值和模型拟合残量,并指出, LSCUSUM统计量在检验参数变点时相比于传统CUSUM方法具有显著优势。有关将LSCUSUM方法用于变点检验的相关文献请参阅文献[13-14]。

由于现实中有许多时间序列是非线性的,因此也有许多文献研究非线性时间序列模型中的变点问题,其中随机系数自回归模型是最受关注的非线性时间序列模型之一。Lee^[4]等将CUSUM方法应用于基于(条件)最小二乘估计(least squares estimate, LSE)的随机系数自回归模型参数变点的检验问题,并给出了检验统计量收敛到独立标准布朗桥的一个充分条件。Aue^[15]证明了RCA(1)模型随机变量部分和的强不变性原理,并利用CUSUM方法研究模型均值变点的检验和在线监测问题。其余研究RCA模型变点检验的相关研究请参阅文献[16-19]。

考虑到LSCUSUM统计量因同时用到了原始观测数据及残量中的信息而有助于提高变点检验功效,本文基于LSCUSUM方法研究RCA(1)模型参数变点的检验问题。其次,对LSCUSUM统计量做了修正,修正后的统计量在检验功效方面比原统计量表现更好,并与Aue^[15]和Lee^[4]提出的CUSUM检验进行了对比,模拟实验表明运用本文的方法时检验势进一步提高,并利用一组股票数据来验证该方法的实用性。

1 模型假设与检验统计量

一阶随机系数自回归模型定义如下:

$$X_t = (\varphi + b_t)X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad 1 \leq t < \infty, \quad (1)$$

其中, φ 表示自回归系数, $\{b_t\}$ 是随机扰动序列, $\{\varepsilon_t\}$ 是噪声序列且 $E(|\varepsilon_t|^4) < \infty$, 满足下列条件:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} b_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \sim \text{i.i.d.} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \right);$$

$$\text{ii) } \varphi^2 + \omega^2 < 1;$$

$$\text{iii) } \text{存在 } k > 0, \text{ 使 } E(\varepsilon_t^{2k}) < \infty, E(\varphi + b_t)^{2k} < 1, \text{ 则有 } E(X_t^{2k}) < \infty.$$

注1 条件 i) 保证了序列 $\{X_t\}$ 的严格平稳性, 条件 ii) 是二阶平稳性的充分必要条件^[15]。

式(1)在满足上述2个条件时,存在严格平稳解,解由式(2)给出。

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}, \quad (2)$$

其中, $a_i = \prod_{l=0}^{i-1} (\varphi + b_{t-l})$, $i = 1, 2, \dots$ 。式(2)也可以改写为

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (3)$$

其中 $|\pi_j| \leq C\rho^j$, $C > 0$ 。假定观测样本 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 可以分解为如下形式:

$$Y_t = \mu I_{|t| \geq k^*} + X_t, \quad 1 \leq t \leq n, \quad (4)$$

其中: $\{X_t\}$ 服从一阶随机系数自回归模型; μ 是未知参数; I 表示示性函数。变点位置 $k^* = [n\xi]$, $\xi \in (0, 1)$, $[\cdot]$ 表示取整函数。记参数向量 $\theta = (\mu, \varphi, \omega^2, \sigma^2)$, 本文考虑如下假设检验问题:

$$H_0: \theta = \theta_0 = (0, \varphi, \omega^2, \sigma^2),$$

$$H_1: \theta = \theta^* = (\Delta_1, \varphi + \Delta_2, \delta_1 \omega^2, \delta_2 \sigma^2), \quad k^* < n,$$

其中 $\Delta_1, \Delta_2, \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ 为未知常数, 且 Δ_1 和 Δ_2 不全为 0 或 δ_1 和 δ_2 不全为 1。

为了验证上述假设检验问题,本文提出如下2个检验统计量:

$$\hat{T}_n^{LS*} = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{1}{n\hat{\tau}_1^2} \left| \sum_{t=1}^k (Y_t - \hat{\varepsilon}_t) \hat{\varepsilon}_t - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\varepsilon}_t) \hat{\varepsilon}_t \right|^2 + \frac{1}{n\hat{\tau}_2^2} \left| \sum_{t=1}^k \hat{\varepsilon}_t^2 - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2 \right|^2 \right\}, \quad (5)$$

$$\hat{T}_n^{\max*} = \max_{1 \leq k \leq n} \max \left\{ \frac{1}{n\hat{\tau}_1^2} \left| \sum_{t=1}^k (Y_t - \hat{\varepsilon}_t) \hat{\varepsilon}_t - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\varepsilon}_t) \hat{\varepsilon}_t \right|, \frac{1}{n\hat{\tau}_2^2} \left| \sum_{t=1}^k \hat{\varepsilon}_t^2 - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2 \right|^2 \right\}, \quad (6)$$

其中,

$$\hat{\tau}_1^2 = \min \{ \hat{\tau}_{11,k}^2, \hat{\tau}_{12,n-k}^2 \},$$

$$\hat{\tau}_{11,k}^2 = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k (Y_t - \hat{\varepsilon}_t)^2 \hat{\varepsilon}_t^2 - \left(\frac{1}{k} \sum_{t=1}^k (\hat{Y}_t - \hat{\varepsilon}_t) \hat{\varepsilon}_t \right)^2,$$

$$\hat{\tau}_{12,n-k}^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{t=n-k+1}^n (Y_t - \hat{\varepsilon}_t)^2 \hat{\varepsilon}_t^2 - \left(\frac{1}{n-k} \sum_{t=n-k+1}^n (\hat{Y}_t - \hat{\varepsilon}_t) \hat{\varepsilon}_t \right)^2,$$

$$\hat{\tau}_2^2 = \min \{ \hat{\tau}_{21,k}^2, \hat{\tau}_{22,n-k}^2 \},$$

$$\hat{\tau}_{21,k}^2 = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \hat{\varepsilon}_t^4 - \left(\frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \hat{\varepsilon}_t^2 \right)^2,$$

$$\hat{\tau}_{22,n-k}^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{t=n-k+1}^n \hat{\varepsilon}_t^4 - \left(\frac{1}{n-k} \sum_{t=n-k+1}^n \hat{\varepsilon}_t^2 \right)^2.$$

因为噪声项 $\{b_t\}$ 的均值为 0, 所以 $E(\hat{\varepsilon}_t^2) = E(\varepsilon_t^2)$, 用 $\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{\varphi}X_{t-1}$ 来估计 ε_t 是合理的, 统计量中 $\hat{\varepsilon}_t$ 的定义为

$$\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{\varphi}X_{t-1}, \quad (7)$$

其中 $\hat{\varphi}$ 是 φ 的 \sqrt{n} 相合估计量, 由 n 个样本计算出自回归系数 φ 的条件最小二乘估计 $\hat{\varphi}$ 为

$$\hat{\varphi} = \left(\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^n X_{t-1} X_t \right).$$

式(5)、(6)这2个检验统计量是在改进 Lee^[11] 给出的LSCUSUM检验统计量的基础上提出的。具体改进的地方是将2个统计量分母中的 $\hat{\tau}_1^2$ 和 $\hat{\tau}_2^2$ 改为前 k 个观测值的和剩余 $n-k$ 个观测值的和取小。由于当观测数据中存在变点时 $\hat{\tau}_1^2$ 和 $\hat{\tau}_2^2$ 的值通常会变大, 因此导致一定的检验势损失, 这样改进可以避免因变点的出现而导致值变大, 有助于减少检验势损失。

定理 1 假定模型(4)中的随机项 $\{X_t\}$ 服从一阶随机系数自回归模型(1), 且满足条件 i) 和 ii), 则在原假设 H_0 下, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\hat{T}_n^{LS*} \xrightarrow{d} \sup_{0 \leq s \leq 1} \|W_2^\circ(s)\|^2, \quad (8)$$

$$\hat{T}_n^{\max*} \xrightarrow{d} \sup_{0 \leq s \leq 1} \{ |W_{11}^\circ(s)|, |W_{12}^\circ(s)| \}, \quad (9)$$

其中 W_{11}° 和 W_{12}° 是独立的布朗桥。

证明 在原假设 H_0 下, $Y_t = X_t, 1 \leq t \leq n$, 联合式(1)、(7), 可以表示为

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_t - \varepsilon_t &= (\varphi - \hat{\varphi})X_{t-1} + b_t X_{t-1}, \\ (X_t - \hat{\varepsilon}_t) \hat{\varepsilon}_t - (X_t - \varepsilon_t) \varepsilon_t &= (X_t - \varepsilon_t) (\hat{\varepsilon}_t - \varepsilon_t) + (\hat{\varepsilon}_t - \varepsilon_t)^2 + \varepsilon_t (\hat{\varepsilon}_t - \varepsilon_t). \end{aligned}$$

首先

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n (\varepsilon_t - \hat{\varepsilon}_t)^2 &= \sum_{t=1}^n [(\hat{\varphi} - \varphi + b_t) X_{t-1}]^2 \\ &= (\hat{\varphi} - \varphi)^2 \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 + \sum_{t=1}^n b_t^2 X_{t-1}^2 + 2(\hat{\varphi} - \varphi) \sum_{t=1}^n b_t X_{t-1}, \end{aligned}$$

由于 $\hat{\varphi}$ 是 φ 的 \sqrt{n} 相合估计量, 即 $(\hat{\varphi} - \varphi) = O_p(\sqrt{n})$, 又由 X_{t-1} 平稳性, 因此可得

$$(\hat{\varphi} - \varphi)^2 \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 = O_p(1). \quad (10)$$

由于 b_t 是均值为 0 的独立同分布随机变量序列, 且 b_t 与 X_{t-1} 相互独立, 令 $Z_t = b_t X_{t-1}$, 因此可得

$$E(Z_t) = E(b_t X_{t-1}) = E(b_t)E(X_{t-1}) = 0. \tag{11}$$

Z_t 的自协方差函数 $\gamma_Z(h)$ 表示为

$$\gamma_Z(h) = E[(Z_t - EZ_t)(Z_{t+h} - EZ_{t+h})]. \tag{12}$$

由于 $Eb_t = 0$, 因此式(12)可以表示为

$$\gamma_Z(h) = E(b_t X_{t-1} b_{t+h} X_{t-1+h}).$$

由于 b_t 独立于 b_{t+h} , 因此

$$\gamma_Z(h) = E(X_t X_{t-1+h})E(b_t b_{t+h}) = 0. \tag{13}$$

由式(11)、(13)可知, Z_t 平稳, 由 $(\hat{\varphi} - \varphi) = O_p(\sqrt{n})$ 和 Z_t 的平稳性可知

$$(\hat{\varphi} - \varphi) \sum_{t=1}^n b_t X_{t-1} = O_p(1). \tag{14}$$

由于 $Eb_t^2 = \omega^2 < \infty$, 因此由条件iii)可知, $E(X_{t-1}^2) = \sigma_X^2 < \infty$, 则对序列部分和 $S_n = \sum_{t=1}^n b_t^2 X_{t-1}^2$, 有

$$E(S_n) = E\left(\sum_{t=1}^n b_t^2 X_{t-1}^2\right) = \sum_{t=1}^n E(b_t^2)E(X_{t-1}^2) = n\omega^2\sigma_X^2,$$

对序列的部分和 S_n 利用马尔可夫不等式, 有

$$P(S_n \geq a) \leq \frac{E(S_n)}{a} = \frac{n\omega^2\sigma_X^2}{a},$$

可得

$$S_n = \sum_{t=1}^n b_t^2 X_{t-1}^2 = O_p(1). \tag{15}$$

联合式(10)、(14)和(15)可以得出 $\sum_{t=1}^n (\varepsilon_t - \hat{\varepsilon}_t)^2 = O_p(1)$, 则

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{t=1}^k (\hat{\varepsilon}_t - \varepsilon_t)^2 - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n (\hat{\varepsilon}_t - \varepsilon_t)^2 \right| = o_p(1). \tag{16}$$

当 $m < l$ 时, 将 $p=2$ 的 Doob 极大不等式应用到 $\{\varepsilon_t \varepsilon_{t-l+m}; \mathcal{F}_t\}$, $1 \leq t \leq n$, 其中 \mathcal{F}_t 是 $\sigma_s, s \leq t$ 生成的 σ 场, 得到

$$E \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{t=1}^k \varepsilon_{t-1-l} \varepsilon_{t-1-m} - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n \varepsilon_{t-1-l} \varepsilon_{t-1-m} \right| \right\}^2 \leq C, \tag{17}$$

当 $C > 0$ 时, 同样地, 对于 $m > l$ 和 $m = l$, 也可以得到同样的上界, 再进一步将 Doob 不等式应用于 $\varepsilon_{t-m} \varepsilon_{t-l} - E(\varepsilon_{t-m}) \varepsilon_{t-l}$. 对于所有的 $m, l \geq 1$ 有

$$\begin{aligned} & E \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{t=1}^k X_{t-1}^2 - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \right| \right\}^2 \\ & \leq \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_l| |a_m| E^{1/2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{t=1}^k \varepsilon_{t-1-l} \varepsilon_{t-1-m} - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n \varepsilon_{t-1-l} \varepsilon_{t-1-m} \right| \right\}^2 \right)^2 \leq C, \end{aligned} \tag{18}$$

因此, 对于 $C > 0$, 可得

$$E \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{t=1}^k X_{t-1} \varepsilon_t - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n X_{t-1} \varepsilon_t \right| \right\}^2 \leq C, \tag{19}$$

其中, $\hat{\varepsilon}_t - \varepsilon_t = (\varphi - \hat{\varphi})X_{t-1} + b_t X_{t-1} = (\varphi - \hat{\varphi}) \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i-1} + R_t$, $\sum_{t=1}^{\infty} R_t = \sum_{t=1}^{\infty} b_t X_{t-1} = O_p(\sqrt{n})$. 当 $t > M$ 时, 可以将 $\hat{\varepsilon}_t - \varepsilon_t$ 分为 $\delta_t^M + \tilde{\delta}_t^M + R_t$, 那么

$$\delta_t^M = (\varphi - \hat{\varphi}) \sum_{i=0}^M a_i \varepsilon_{t-i-1},$$

则可以得到

$$\tilde{\delta}_t^M = \hat{\varepsilon}_t - \varepsilon_t - \delta_t^M.$$

根据式(18),可以得到如下结果:

$$\begin{aligned}
 & \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{t=1}^k (X_t - \varepsilon_t) \delta_t^M - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n (X_t - \varepsilon_t) \delta_t^M \right| \\
 &= \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| (\varphi - \hat{\varphi}) \sum_{t=1}^k \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^M a_i \pi_j X_{t-j} \varepsilon_{t-i-1} - \left(\frac{k}{n}\right) (\varphi - \hat{\varphi}) \sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^M a_i \pi_j X_{t-j} \varepsilon_{t-i-1} \right| \\
 &= \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{\infty} |a_i \pi_j| |\varphi - \hat{\varphi}| \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{t=1}^k X_{t-j} \varepsilon_{t-i-1} - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n X_{t-j} \varepsilon_{t-i-1} \right| \\
 &\leq C \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{\infty} |a_i \pi_j| |\varphi - \hat{\varphi}| \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{t=1}^k X_{t-j} \varepsilon_{t-i-1} - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n X_{t-j} \varepsilon_{t-i-1} \right| \\
 &= o_p(1).
 \end{aligned} \tag{20}$$

然后根据式(19),可以得到

$$\begin{aligned}
 & \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{t=1}^k \varepsilon_t \delta_t^M - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n \varepsilon_t \delta_t^M \right| \\
 &= \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| (\varphi - \hat{\varphi}) \sum_{t=1}^k \sum_{i=0}^M a_i \varepsilon_{t-i-1} - \left(\frac{k}{n}\right) (\varphi - \hat{\varphi}) \sum_{t=1}^n \sum_{i=0}^M a_i \varepsilon_{t-i-1} \right| \\
 &= \sum_{i=0}^M |a_i| |\varphi - \hat{\varphi}| \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{t=1}^k \varepsilon_t \varepsilon_{t-i-1} - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n \varepsilon_t \varepsilon_{t-i-1} \right| \\
 &\leq C \sum_{i=0}^M |a_i| |\varphi - \hat{\varphi}| \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{t=1}^k \varepsilon_t \varepsilon_{t-i-1} - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n \varepsilon_t \varepsilon_{t-i-1} \right| \\
 &= o_p(1).
 \end{aligned} \tag{21}$$

因为 $\sum_{t=1}^n \left\{ |X_t - \varepsilon_t| \tilde{\delta}_t^M + |\varepsilon_t \tilde{\delta}_t| \right\} = O_p(\rho^M)$, 所以得到如下关系式:

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{t=1}^k (X_t - \varepsilon_t) \tilde{\delta}_t^M - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n (X_t - \varepsilon_t) \tilde{\delta}_t^M \right| = O_p(\rho^M), \tag{22}$$

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{t=1}^k \varepsilon_t \tilde{\delta}_t^M - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n \varepsilon_t \tilde{\delta}_t^M \right| = O_p(\rho^M). \tag{23}$$

再结合式(20)–(23),可以得到

$$\begin{aligned}
 & \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{t=1}^k (X_t - \hat{\varepsilon}_t) \hat{\varepsilon}_t - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n (X_t - \hat{\varepsilon}_t) \hat{\varepsilon}_t \right| \\
 &= \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{t=1}^k (X_t - \varepsilon_t) \varepsilon_t - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n (X_t - \varepsilon_t) \varepsilon_t \right| + o_p(1).
 \end{aligned} \tag{24}$$

又因为 $\hat{\varepsilon}_t^2 - \varepsilon_t^2 = 2(\hat{\varepsilon}_t - \varepsilon_t) \varepsilon_t + (\hat{\varepsilon}_t - \varepsilon_t)^2$, 所以得到

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{t=1}^k \hat{\varepsilon}_t^2 - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2 \right| = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{t=1}^k \varepsilon_t^2 - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \right| = o_p(1). \tag{25}$$

由于 $\hat{\tau}_i^2 \xrightarrow{P} \tau_i^2$, 结合式(16)、(24)和(25)和连续映射定理, 因此得到式(9)。由于式(9)可以相似地得到, 因此定理 1 得证。

定理 2 假定模型(4)中的随机项 $\{X_t\}$ 服从一阶随机系数自回归模型(1), 且满足条件 i) 和 ii), 若 $\mu = \Delta_1 \neq 0$, 则在备择假设 H_1 下, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\hat{T}_n^{LS*} \xrightarrow{P} \infty, \tag{26}$$

$$\hat{T}_n^{\max*} \xrightarrow{P} \infty. \tag{27}$$

证明 这里只证式(26), 式(27)的证明可类似得到。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{i=1}^k (Y_i - \hat{\varepsilon}_i) \hat{\varepsilon}_i - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\varepsilon}_i) \hat{\varepsilon}_i \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{i=1}^k (\Delta_1 + \hat{\varphi} X_{i-1}) (X_i - \hat{\varphi} X_{i-1}) - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{i=1}^n (\Delta_1 + \hat{\varphi} X_{i-1}) (X_i - \hat{\varphi} X_{i-1}) \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{i=1}^k (\Delta_1 + \hat{\varphi} X_{i-1}) - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{i=1}^n (\Delta_1 + \hat{\varphi} X_{i-1}) + \sum_{i=1}^k \hat{\varphi} X_{i-1} (X_i - \hat{\varphi} X_{i-1}) - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{i=1}^n \hat{\varphi} X_{i-1} (X_i - \hat{\varphi} X_{i-1}) \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \left| \sum_{i=1}^k \Delta_1 (X_i - \hat{\varphi} X_{i-1}) - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{i=1}^n \Delta_1 (X_i - \hat{\varphi} X_{i-1}) \right| + \left| \sum_{i=1}^k \hat{\varphi} X_{i-1} (X_i - \hat{\varphi} X_{i-1}) - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{i=1}^n \hat{\varphi} X_{i-1} (X_i - \hat{\varphi} X_{i-1}) \right| \right\} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{i=1}^k \Delta_1 (X_i - \hat{\varphi} X_{i-1}) - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{i=1}^n \Delta_1 (X_i - \hat{\varphi} X_{i-1}) \right| \\
&= \frac{(n-k)\Delta_1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{i=1}^k (X_i - \hat{\varphi} X_{i-1}) - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\varphi} X_{i-1}) \right| \\
&= \frac{(n-k)\Delta_1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{i=1}^k \hat{\varepsilon}_i - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i \right| \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

所以得到

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{i=1}^k \hat{\varepsilon}_i^2 - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 \right| + \frac{(n-k)\Delta_1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{i=1}^k \hat{\varepsilon}_i - \left(\frac{k}{n}\right) \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i \right| \rightarrow \infty. \quad (28)$$

由 $\hat{\tau}_i^2 \xrightarrow{P} \tau_i^2$, 再结合式(28), 定理2得证。

2 数值模拟

本章通过数值模拟讨论统计量 $\hat{T}_n^{\text{LS}*}$ 和 $\hat{T}_n^{\text{max}*}$ 的有限样本性质, 将统计量 $\hat{T}_n^{\text{LS}*}$ 和 $\hat{T}_n^{\text{max}*}$ 与统计量 \hat{T}_n (Aue^[15]所提出的CUSUM统计量)进行了比较, 在模拟中, 对RCA(1)模型中的自回归参数采用了条件最小二乘估计。所有的模拟实验均通过R语言实现。

采用如下的数据生成过程

$$Y_i = \Delta_1 + X_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (29)$$

其中, $X_i = (\varphi + b_i)X_{i-1} + \varepsilon_i$, $1 \leq i < \infty$, $\varphi = 0$, $b_i \sim N(0, 0.1)$, $\varepsilon_i \sim N(0, 1)$ 。利用蒙特卡罗模拟确定统计量的临界值, 得出在检验水平 $\alpha = 0.1$ 下, 若 $\hat{T}_n^{\text{LS}*} > 3.126\ 399$, $\hat{T}_n^{\text{max}*} > 2.692\ 578$, 则拒绝 H_0 。为了避免初始值的影响, 本文在模拟实验时将去掉前100个观测值, 重点分析跳跃度 Δ_1 、样本量 n 和变点位置 k^* 对检验势的影响。以下所有的模拟结果都是经1000次循环得到。表1给出了统计量在原假设下的经验水平, 可以看出3个统计量都没有发生严重的水平扭曲, 表明3个检验都是稳健的。

表1 统计量在 H_0 下的经验水平(检验水平0.1)
Table 1 Empirical size of statistic under the H_0
(nominal level 0.1)

n	$\hat{T}_n^{\text{LS}*}$	$\hat{T}_n^{\text{max}*}$	\hat{T}_n
200	0.139	0.119	0.112
400	0.096	0.102	0.088
800	0.114	0.116	0.098

表2—4分别给出了3个统计量在样本量 $n = \{200, 400, 800\}$ 、跳跃度 $\Delta_1 = \{1/2, 1, 2\}$ 以及变点位置 $k^* = [n\xi]$, $\xi \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$ 下的检验势。在大多数的情况下, 随着样本量的增大, 经验势在逐渐提高, 变点出现在中间位置 $k^* = [0.5n]$ 时的经验势比变点位置在 $k^* = [0.2n]$ 和 $k^* = [0.8n]$ 时的经验势大, 即变点越靠近中间位置时越容易被检测到。随着跳跃度 Δ_1 的增加, 经验势也随之增加, 说明跳跃度越大, 前后数据的均值差异就越大, 越容易检验出变点, 但是在表2中, 在均值跳跃度较小、变点位置靠前和靠后的情况下出现了检验势随着样本量的增大而减小的情况, 可能是由于在样本量较小的情况下, 检验水平为0.139和0.119, 明显高于显著性水平0.1, 进而出现在小样本量下的检验势不够准确的情况。而随着样本量的增大, 统计量的分布

更接近于渐近分布,使得检验势更加稳定。当跳跃度 $\Delta_1 = 1/2$ 时,在大样本情况下和变点位置处于中心的情况下,检验效果都不是很理想。随着跳跃度 Δ_1 的增大和样本量 n 的增加,经验势逐渐接近于 1,但是在任何条件下,本文所采用的统计量 \hat{T}_n^{LS*} 和 $\hat{T}_n^{\max*}$ 的经验势均明显大于统计量 \hat{T}_n 。

表2 Δ_1 在 $k^* = [n\xi]$ 处由 0 变为 1/2 时的检验势
Table 2 Empirical power of Δ_1 changes from 0 to 1/2 at $k^* = [n\xi]$

n	\hat{T}_n^{LS*}			$\hat{T}_n^{\max*}$			\hat{T}_n		
	$\xi=0.2$	$\xi=0.5$	$\xi=0.8$	$\xi=0.2$	$\xi=0.5$	$\xi=0.8$	$\xi=0.2$	$\xi=0.5$	$\xi=0.8$
200	0.336	0.411	0.310	0.333	0.407	0.304	0.108	0.324	0.231
400	0.290	0.522	0.401	0.279	0.504	0.280	0.226	0.396	0.283
800	0.339	0.683	0.411	0.347	0.635	0.360	0.292	0.511	0.299

表3 Δ_1 在 $k^* = [n\xi]$ 处由 0 变成 1 时的经验势
Table 3 Empirical power of Δ_1 changes from 0 to 1 at $k^* = [n\xi]$

n	\hat{T}_n^{LS*}			$\hat{T}_n^{\max*}$			\hat{T}_n		
	$\xi=0.2$	$\xi=0.5$	$\xi=0.8$	$\xi=0.2$	$\xi=0.5$	$\xi=0.8$	$\xi=0.2$	$\xi=0.5$	$\xi=0.8$
200	0.552	0.944	0.803	0.526	0.932	0.774	0.453	0.771	0.521
400	0.826	1	0.987	0.777	1	0.976	0.641	0.845	0.680
800	0.978	1	1	0.955	1	0.999	0.887	1	0.821

表4 Δ_1 在 $k^* = [n\xi]$ 处由 0 变成 2 时的经验势
Table 4 Empirical power of Δ_1 changes from 0 to 2 at $k^* = [n\xi]$

n	\hat{T}_n^{LS*}			$\hat{T}_n^{\max*}$			\hat{T}_n		
	$\xi=0.2$	$\xi=0.5$	$\xi=0.8$	$\xi=0.2$	$\xi=0.5$	$\xi=0.8$	$\xi=0.2$	$\xi=0.5$	$\xi=0.8$
200	0.780	1	1	0.754	1	1	0.560	0.881	0.781
400	0.993	1	1	0.991	1	1	0.687	0.964	0.850
800	1	1	1	1	1	1	0.976	1	1

接下来,从模型参数变点的检验出发,讨论统计量 \hat{T}_n^{LS*} 和 $\hat{T}_n^{\max*}$ 的有限样本性质,并与统计量 T_n (Lee^[4]提出的CUSUM检验)作比较,还是采用式(29)中的数据的生成过程,其中取 $\Delta_1 = 0$,假设随机扰动项 b_t 的方差 ω^2 在发生前后的值分别为 0.1 和 0.5, σ^2 是误差项 ε_t 的方差。同样地,每次模拟都去掉前 100 个观测值。以下模拟结果均在 $\alpha = 0.1$ 的检验水平下经 1 000 次循环得到。在以下的 2 种情况中,均假设变点发生在样本中心的位置:

情况 1 模型参数 φ 和 ω^2 发生变化时, σ^2 保持恒定。

情况 2 模型参数 φ 和 ω^2 发生变化时, σ^2 由 1 变为 2。

从表 5 可以看出,这 3 个统计量都没有发生严重的水平扭曲,表 6 给出了在 σ^2 恒定的情况下其他 2 个参数发生变化的经验势,可知经验势随着样本量的增加而增大,在模拟的所有情况下,本文采用的 2 个统计量的经验势均高于 T_n 。

表 7 给出了在 σ^2 由 1 变为 2 的情况下其他 2 个参数也发生变化的经验势,在样本量较小的情况下,本文采用的统计量的经验势小于 T_n 统计量的经验势,当样本量增大到 400 时,这 3 个统计量都具有较高的经验势,而本文所采用的统计量的经验势在任何情况下均能达到 1。统计量 \hat{T}_n^{LS*} 和 $\hat{T}_n^{\max*}$ 只须知道观测值和残差序列就可以构造,因此本文的检验方法较 T_n 更简便。

表5 $\sigma^2 = 1, \omega^2 = 0.1$ 时的经验水平(检验水平 0.1)
Table 5 Empirical size of $\sigma^2 = 1$ and $\omega^2 = 1$ (nominal level 0.1)

n	$\varphi = 0$			$\varphi = 0.3$		
	\hat{T}_n^{LS*}	$\hat{T}_n^{\max*}$	T_n	\hat{T}_n^{LS*}	$\hat{T}_n^{\max*}$	T_n
200	0.139	0.119	0.108	0.144	0.113	0.150
400	0.096	0.102	0.102	0.118	0.098	0.098
800	0.114	0.116	0.118	0.112	0.103	0.118

表6 ω^2 从 0.1→0.5, $\sigma^2=1$ 下的经验势
Table 6 Empirical power of ω^2 changes from 0.1 to 0.5 and $\sigma^2=1$ remains the same

φ	$n=200$			$n=400$			$n=800$		
	\hat{T}_n^{LS*}	\hat{T}_n^{max*}	T_n	\hat{T}_n^{LS*}	\hat{T}_n^{max*}	T_n	\hat{T}_n^{LS*}	\hat{T}_n^{max*}	T_n
0→0.3	0.757	0.738	0.676	0.937	0.931	0.926	0.999	0.998	0.994
0→0.5	0.876	0.854	0.762	0.993	0.992	0.992	1	1	1
0.3→0.5	0.778	0.765	0.688	0.960	0.965	0.870	1	1	1

表7 ω^2 从 0.1→0.5, σ^2 从 1→2 下的经验势
Table 7 Empirical power of ω^2 changes from 0.1 to 0.5 and σ^2 changes from 1 to 2

φ	$n=200$			$n=400$			$n=800$		
	\hat{T}_n^{LS*}	\hat{T}_n^{max*}	T_n	\hat{T}_n^{LS*}	\hat{T}_n^{max*}	T_n	\hat{T}_n^{LS*}	\hat{T}_n^{max*}	T_n
0→0.3	0.759	0.739	0.990	1	1	0.809	1	1	1
0→0.5	0.875	0.854	0.998	1	1	0.936	1	1	0.908
0.3→0.5	0.780	0.770	0.972	1	1	0.998	1	1	0.998

3 实例分析

将本文方法用于分析东晶电子股票 2021 年 10 月 8 日到 2023 年 8 月 18 日的日收盘价数据,共有 456 个观测值。数据的原始序列图 Y_t 如图 1 所示。首先在 R 语言中利用 ADF 单位根检验对原始序列做平稳性检验,其中 ADF 单位根检验的原假设是序列非平稳,计算出 $p=0.0407 < 0.05$,故拒绝序列非平稳的原假设,认为原始序列是平稳的。用 RCA(1)模型拟合对数差分数据,计算出 φ 的估计值 $\hat{\varphi}=0.144$,然后对残差进行检验,发现满足零均值、同方差、独立性,说明对该数据采用 RCA(1)模型拟合是合理的。用文献[20]中提出的固定样本检验方法检测到在第 151 个样本处存在变点。本文将该数据带入到 LSCUSUM 统计量中,得出统计量 \hat{T}_n^{LS*} 的值为 5.142,超过了其临界值 3.126 399,统计量 \hat{T}_n^{max*} 的值为 4.967,也超过了其临界值 2.696 578,故认为该序列中存在变点。究其原因,2022 年宏观经济下行、地缘政治、全球通胀等复杂因素导致消费电子市场需求减弱,对上游元器件行业造成较大冲击。2022 年度财务报告显示,东晶电子实现营业收入同比下降 40.6%,表明该公司在这段时间遭受了较大的经营压力和财务亏损。

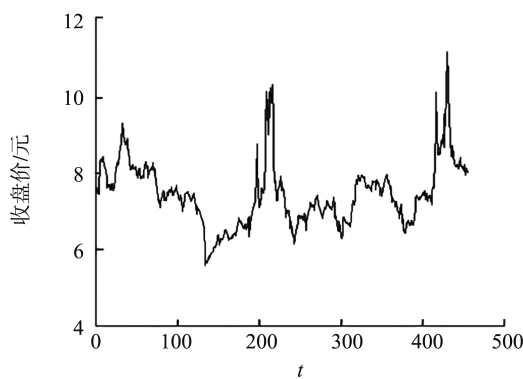


图1 东晶电子股票日收盘数据
Fig.1 Daily closing price of East Crystal Electronics Stock

4 结论

本文基于一种改进的 LSCUSUM 方法研究了一阶随机系数自回归模型参数变点的检验问题并在理论上给出了相关证明。在数值模拟部分,分析了跳跃度、变点位置对经验势的影响,另外,从参数发生变化的角度出发,分析了参数变化的大小对经验势的影响,比较了本文所给出的统计量和 Lee^[4]、Aue^[15] 提出的统计量的检验效果。模拟结果显示,除了当样本量较小的情况下参数 σ^2 发生变化外,本文所提统计量的检验效

果均优于其余2个统计量的检验效果,而且LSCUSUM统计量的构造相较于其余2个统计量更加简单,从而为RCA(1)模型的参数变点检验提供了一种新的方法。最后通过对东晶电子股票日收盘价进行分析,检验出了数据中的变点并解释了出现变点的原因,说明了本文所提方法的有效性。

参考文献:

- [1] 陈占寿. 基于 Bootstrap 方法的时间序列变点检测[M]. 北京:科学出版社,2020.
CHEN Zhanshou. Time series change point detection based on Bootstrap method[M]. Beijing: Science Press, 2020.
- [2] INCLANC, TIAOG C. Use of cumulative sums of squares for retrospective detection of changes of variance[J]. Journal of the American Statistical Association, 1994, 89(427):913-923.
- [3] KIM S, CHO S, LEE S. On the CUSUM test for parameter changes in GARCH(1, 1) models[J]. Communications in Statistics: Theory and Methods, 2000, 29(2):445-462.
- [4] LEE S, HA J, NA O, et al. The CUSUM test for parameter change in time series models[J]. Scandinavian Journal of Statistics, 2003, 30(4):781-796.
- [5] BERKES I, HORVTH L, KOKOSZKA P. Testing for parameter constancy in GARCH(p, q) models[J]. Statistics & Probability Letters, 2004, 70(4):263-273.
- [6] GOMBAY E. Change detection in autoregressive time series[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2008, 99(3):451-464.
- [7] KANG J, LEE S. Parameter change test for Poisson autoregressive models[J]. Scandinavian Journal of Statistics, 2014, 41(4):1136-1152.
- [8] LEE S, TOKUTSU Y, MAEKAWA K. The CUSUM test for parameter change in regression models with ARCH errors[J]. Journal of the Japan Statistical Society, 2004, 34(2):173-188.
- [9] LEE J, LEE S. Parameter change test for nonlinear time series models with GARCH type errors[J]. Journal of Korean Mathematical Society, 2015, 52(3):503-522.
- [10] OH H, LEE S. On score vector- and residual-based CUSUM tests in ARMA-GARCH models[J]. Statistical Methods and Applications, 2018, 27(3):385-406.
- [11] OH H, LEE S. Modified residual CUSUM test for location-scale time series models with heteroscedasticity[J]. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 2019, 71(5):1059-1091.
- [12] LEE S. Location and scale-based CUSUM test with application to autoregressive models[J]. Journal of Statistical Computation and Simulation, 2020, 90(13):2309-2328.
- [13] LEE S, LEE S, MOON M. Hybrid change point detection for time series via support vector regression and CUSUM method[J]. Applied Soft Computing, 2020, 89:106101.
- [14] RI Xihame, CHEN Zhanshou, LIANG Yan. Detecting structural change point in ARMA models via neural network regression and LSCUSUM methods[J]. Entropy, 2023, 25(1):133.
- [15] AUE A. Strong approximation for RCA(1) time series with applications[J]. Statistics and Probability Letters, 2004, 68(4):369-382.
- [16] NA O, LEE J, LEE S. Monitoring parameter changes for random coefficient autoregressive models[J]. Journal of the Korean Statistical Society, 2010, 39(3):281-288.
- [17] ZHAO Zhiwen, WANG Dehui, PENG Cuixin. Test for parameter changes in generalized random coefficient autoregressive model[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2014, 2014(1):309.
- [18] 李拂晓,田铮,陈占寿. 随机系数自回归模型变均值点在线监测与应用[J]. 控制理论与应用,2012,29(4):497-502.
LI Fuxiao, TIAN Zheng, CHEN Zhanshou. Online monitoring of mean change point in a random coefficient autoregressive model[J]. Control Theory & Applications, 2012, 29(4):497-502.
- [19] LI Fuxiao, TIAN Zheng, QI Peiyan, et al. Monitoring parameter changes in RCA(p) models[J]. Journal of the Korean Statistical Society, 2015, 44(1):111-122.
- [20] 韩四儿,田铮,武新乾. 一类股市波动性预测模型的多变点检验[J]. 系统工程理论与实践,2006,26(3):94-101.
HAN Sier, TIAN Zheng, WU Xinqian. Multiple change point test of a volatility forecasting models in the stock market[J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2006, 26(3):94-101.