山东大学学报(理学版)2025 年 11 月 第 60 卷 第 11 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.60, No.11, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)11-0001-05 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.499

关于条件(IE)的研究

乔虎生[1,2],张雪倩[1*]
(1.西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070; 2.甘肃省数学与统计学基础学科研究中心, 甘肃 兰州 730070)

摘要:设 S 是幺半群,K 是 S 的右理想,介绍条件(E)的一个推广条件(IE),研究条件(IE)与条件(E)及其他平坦性质之间的关系,讨论满足条件(IE)的 S-系的余积、融合余积与直积。此外,给出循环 S-系 S/ρ,对角 S-系 $D(S)$ 及 Rees 商 S-系 S/K 满足条件(IE)的充要条件。

关键词:幺半群;S-系;条件(E);条件(IE)
中图分类号:O152.7 **文献标志码**:A
引用格式:乔虎生,张雪倩.关于条件(IE)的研究[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):1-5.

Some studies on condition (IE)

QIAO Husheng[1,2], ZHANG Xueqian[1*]
(1. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China; 2. Gansu Provincial Research Center for Basic Disciplines of Mathematics and Statistics, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: Let S be a monoid, and K be a right ideal of S. A generalized condition (IE) of condition (E) is introduced. The relationship between condition (IE) and condition (E) and other flat properties is studied. The coproduct, amalgamated coproduct and direct product of S-acts satisfying condition (IE) are discussed. In addition, the necessary and sufficient conditions for the cyclic acts S/ρ, diagonal acts $D(S)$ and Rees quotient acts S/K to satisfy condition (IE) are given.

Key words: monoid; S-act; condition (E); condition (IE)

0 引言

为了刻画 S-系的弱拉回平坦,引入条件(E)的推广条件(E′)[1]。Maskoni 给出条件(E)的另一个推广条件(E_E)[2],并且研究条件(E_E)的性质及对幺半群的刻画。本文提出条件(E)的一个新的推广,称为条件(IE)。

设 S 是幺半群,1 是其单位元,A 是非空集合,若有 $A\times S$ 到 A 的映射 $f:A\times S\to A$, $(a,s)\mapsto as$,满足

$$(as)t=a(st),\quad a1=a,\quad \forall a\in A,\quad \forall s,t\in S,$$

则称(A,f)是右 S-系[3],或称 S 右作用于 A 上。简记为 A_S 或 A。

特别地,在上述定义中,如果 $A=S\times S$,满足

$$(s,t)u=(su,tu),\quad \forall s,t,u\in S,$$

则称右 S-系 $S\times S$ 为对角 S-系[4],记作 $D(S)$。

称右 S-系 A 满足条件(P)[3],如果对任意的 $a,a'\in A$, $s,t\in S$,若 $as=a't$,则存在 $a''\in A$, $u,v\in S$,使得$a=a''u$、$a'=a''v$、$us=vt$。

收稿日期:2023-11-29; **网络出版时间**:2024-09-25 16:04:57
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11961058); 基础研究创新群体项目(23JRRA684)
第一作者:乔虎生(1974—),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为半群代数理论. E-mail:gsqiaohsh@163.com
*通信作者:张雪倩(2000—),女,硕士研究生,研究方向为半群代数理论. E-mail:3196597513@qq.com

称右 S-系 A 满足条件(E)[3],如果对任意的 $a\in A$, $s,t\in S$,若 $as=at$,则存在 $a'\in A$, $u\in S$,使得 $a=a'u$、$us=ut$。

本文中没有特别说明的定义和符号参见文献[3,5-9]。

1 主要结果

设 S 是幺半群,$E(S)$ 是 S 的幂等元集合,首先介绍条件(E)的一个推广条件(IE)。

定义 1 称右 S-系 A 满足条件(IE),如果对于任意的 $a\in A$,任意的 $e,f\in E(S)$,若 $ae=af$,则存在 $a'\in A$, $u\in S$,使得 $a=a'u$、$ue=uf$。

称 S-满同态 $f:A\to B$ 是可收缩的[5],如果存在 S-同态 $g:B\to A$,使得 $fg=1_B$。

定理 1 设 S-满同态 $f:A\to B$ 是可收缩的,如果 A 满足条件(IE),那么 B 也满足条件(IE)。

证明 假设 A,B 是右 S-系,且 A 满足条件(IE),设 $b\in B$, $e,f\in E(S)$,满足 $be=bf$。因为 $f:A\to B$ 是可收缩的,则存在 S-同态 $g:B\to A$,使得 $fg=1_B$,则 $g(be)=g(bf)$,即 $g(b)e=g(b)f$,因为 $g(b)\in A$,由 A 满足条件(IE)可知存在 $a\in A$, $u\in S$,使得 $g(b)=au$ 且 $ue=uf$,即 $b=f(g(b))=f(au)=f(a)u$,记 $f(a)=b'$,则 $b'\in B$ 且 $b=b'u$,故 B 满足条件(IE)。

幺半群 S 为右 reversible 幺半群[5],如果对任意的 $a,b\in S$,存在 $u,v\in S$,使得 $ua=vb$。称 S 为左 collapsible幺半群[5],如果对任意的 $a,b\in S$,存在 $u\in S$,使得 $ua=ub$。类似地,定义左 I-collapsible 幺半群。

定义 2 称 S 为左 I-collapsible 幺半群,如果对任意的 $e,f\in E(S)$,存在 $u\in S$,使得 $ue=uf$。

引理 1[5] 设 S 是幺半群,则一元 S-系 Θ 满足条件(E)当且仅当 S 是左 collapsible 幺半群。

引理 2 设 S 是幺半群,则一元 S-系 Θ 满足条件(IE)当且仅当 S 是左 I-collapsible 幺半群。

证明 *必要性*。设 $\Theta=\{\theta\}$, $e,f\in E(S)$,显然 $\theta e=\theta f$,因为 Θ 满足条件(IE),所以存在 $u\in S$,使得 $\theta=\theta u$ 且 $ue=uf$,故 S 是左 I-collapsible 的。

充分性。设 $e,f\in E(S)$,显然有 $\theta e=\theta f$。因为 S 是左 I-collapsible 的,所以存在 $u\in S$,使得 $ue=uf$,又 $\theta=\theta u$,故 Θ 满足条件(IE)。

命题 1 如果右 S-系 A 满足条件(E),则 A 满足条件(IE)。

注意上述命题反之不成立,下面例子即可说明。

例 1 S 是群,且 S 至少包含两个元素,则 $E(S)=\{1\}$,显然一元 S-系 Θ 满足条件(IE)。然而,S 不是左 collapsible 的,由引理 1 知,Θ 不满足条件(E)。

引理 3[5] 设 S 是幺半群,则一元 S-系 Θ 是平坦的当且仅当 S 是右 reversible 幺半群。

下面例子说明满足条件(IE)的右 S-系不是平坦的,从而不是均衡平坦的。

例 2 自由幺半群 $S=\langle a,b\rangle\cup\{1\}$,由引理 2 可知 Θ 满足条件(IE)。但 S 不是右 reversible 幺半群,所以由引理 3 知 Θ 不是平坦的,从而不是均衡平坦的。

引理 4[5] 设 S 是幺半群,则一元 S-系 Θ 满足条件(P)当且仅当 S 是右 reversible 幺半群。

例 3 取例 2 中的幺半群 S,则 Θ 满足条件(IE),且 S 不是右 reversible 幺半群,故由引理 4 知 Θ 不满足条件(P)。

称右 S-系 A 是挠自由的[5],如果对于任意的 $a,b\in A$,任意右可消元 $s\in S$,若 $as=bs$,则 $a=b$。

引理 5[5] 设 S 是幺半群,则一元 S-系 Θ 是挠自由的。

下面例子说明挠自由与条件(IE)之间没有推出关系。

例 4 幺半群 $S=\{1,e,f\}$,其中 $e^2=e$, $f^2=f$, $ef=f$, $fe=e$。显然 $Se\cap Sf=\varnothing$,则 S 不是左 I-collapsible 幺半群,故 Θ 是挠自由的但不满足条件(IE)。同样,满足条件(IE)的右 S-系不一定是挠自由的,见例 5。

根据以上结论,可以得到如下一些关系:

条件(E)$\Rightarrow$条件(IE); 条件(IE)$\nRightarrow$条件(E);

均衡平坦$\Rightarrow$条件(IE); 条件(IE)$\nRightarrow$均衡平坦;

条件(IE)$\nRightarrow$平坦(弱平坦); 条件(IE)$\nRightarrow$条件(P);

条件(IE)$\nRightarrow$挠自由; 挠自由$\nRightarrow$条件(IE)。

称幺半群 S 是带[5]，如果 $E(S)=S$。那么下面命题是显然的。

命题 2　S 是带，则右 S-系 A 满足条件（IE）当且仅当 A 满足条件（E）。

下面定理给出了循环 S-系满足条件（IE）的等价刻画。

定理 2　设 S 是幺半群，ρ 是 S 上的右同余，则 S/ρ 满足条件（IE）当且仅当对任意的 $a\in S$，$e,f\in E(S)$，如果 $ae\rho af$，则存在 $u\in S$，使得 $a\rho u$、$ue=uf$。

证明　*必要性*。设 $ae\rho af$，$a\in S$，$e,f\in E(S)$，则 $[a]_\rho e=[a]_\rho f$。因此由条件（IE）知存在 $a'=[x]_\rho\in S/\rho$，$u'\in S$，使得 $[a]_\rho=a'u'=[x]_\rho u'$、$u'e=u'f$。令 $u=xu'$，则 $[a]_\rho=[u]_\rho$，即 $a\rho u$。又 $xu'e=xu'f$，即 $ue=uf$。

充分性。设 $a\in S/\rho$，$e,f\in E(S)$，满足 $ae=af$。不妨设 $a=[x]_\rho\in S/\rho$，则 $[x]_\rho e=[x]_\rho f$，即 $xe\rho xf$，所以由条件知存在 $u\in S$，使得 $x\rho u$、$ue=uf$。令 $a'=[1]_\rho\in S/\rho$，则 $a=[x]_\rho=[u]_\rho=[1]_\rho u=a'u$，故 S/ρ 满足条件（IE）。

推论 1　设 S 是幺半群，$z\in S$，则主右理想 zS 满足条件（IE）当且仅当对任意的 $x\in S$，$e,f\in E(S)$，如果 $zxe=zxf$，则存在 $u\in S$，使得 $zx=zu$、$ue=uf$。

证明　因为 $zS=S/\ker_{\lambda_z}$，令 $\rho=\ker_{\lambda_z}$，由定理 2 可得。

命题 3　设 S 是幺半群，ρ 是 S 上的右同余，如果 S/ρ 满足条件（IE），则 $[1]_\rho$ 是 S 的左 I-collapsible 子幺半群。

证明　假设 S/ρ 满足条件（IE），设 $a,b\in[1]_\rho$，则 $a\rho1,b\rho1,ab\rho b\rho1$，即 $ab\in[1]_\rho$，所以 $[1]_\rho$ 是 S 的子幺半群。对任意的 $x,y\in E([1]_\rho)$，则 $x\rho y$。因为 S/ρ 满足条件（IE），所以存在 $u\in S$，使得 $1\rho u$、$ux=uy$，则 $u\in[1]_\rho$，所以 $[1]_\rho$ 是 S 的左 I-collapsible 子幺半群。

命题 4　设 S 是幺半群，A 是右 S-系，如果对任意的 $a\in A$，aS 满足条件（IE），则 A 满足条件（IE）。

证明　设 $a\in A$，$e,f\in E(S)$，满足 $ae=af$。因为 aS 满足条件（IE），所以存在 $u_1,u_2\in S$，使得 $a=(au_1)u_2$、$u_2e=u_2f$，则 $u_1u_2e=u_1u_2f$。记 $u_1u_2=u$，则 $a=au$、$ue=uf$，所以 A 满足条件（IE）。

接下来讨论满足条件（IE）的 S-系的余积、融合余积与直积。在 S-系范畴中，余积和直积的表达分别为不交并和卡氏积。

定理 3　设 S 是幺半群，I 是非空集合，对任意 $i\in I$，右 S-系 A_i 满足条件（IE）当且仅当 S-系 $\coprod_{i\in I}A_i$ 满足条件（IE）。

证明　*必要性*。设 $a\in\coprod_{i\in I}A_i$，$e,f\in E(S)$，满足 $ae=af$，则存在 $i\in I$，使得 $a\in A_i$。由于对任意的 $i\in I$，S-系 A_i 满足条件（IE），所以存在 $a'\in A_i\subseteq\coprod_{i\in I}A_i$，$u\in S$，使得 $a=a'u$ 且 $ue=uf$，故 $\coprod_{i\in I}A_i$ 满足条件（IE）。

充分性。设 $a_i\in A_i\subseteq\coprod_{i\in I}A_i$，$e,f\in E(S)$，满足 $a_ie=a_if$。因为 $\coprod_{i\in I}A_i$ 满足条件（IE），所以存在 $a'\in\coprod_{i\in I}A_i$，$u\in S$，使得 $a_i=a'u$ 且 $ue=uf$。因为 $a_i=a'u\in A_i$，所以 $a'\in A_i$，故 A_i 满足条件（IE）。

定义 3[6]　设 A 是右 S-系，B 是 A 的真子系，x,y,z 是不属于 A 的任意 3 个不相同的元素。设 $A\coprod^B A=(\{x,y\}\times(A-B))\dot{\cup}(\{z\}\times B)$，在 $A\coprod^B A$ 上定义如下右作用：

$$(x,a)s=\begin{cases}(x,as), & as\in A-B,\\ (z,as), & as\in B;\end{cases}$$

$$(y,a)s=\begin{cases}(y,as), & as\in A-B,\\ (z,as), & as\in B;\end{cases}$$

$$(z,b)s=(z,bs),$$

其中 $a\in A-B$，$b\in B$，故

$$A\coprod^B A=\{(x,a)\mid a\in A-B\}\dot{\cup}\{(y,a)\mid a\in A-B\}\dot{\cup}\{(z,b)\mid b\in B\}。$$

命题 5　设 A 是右 S-系，B 是 A 的真子系，则 A 满足条件（IE）当且仅当 $A\coprod^B A$ 满足条件（IE）。

证明　*必要性*。假设 A 满足条件（IE），设 $a\in A$，$e,f\in E(S)$，满足 $(w,a)e=(w,a)f$，其中 $w=\{x,y,z\}$。考虑以下 3 种情况：

（1）$w=x$，则 $(x,a)e=(x,a)f$，故 $ae=af$。因为 A 满足条件（IE），所以存在 $a'\in A$，$u\in S$，使得 $a=a'u$、

$ue=uf$，则$(x,a)=(x,a'u)=(x,a')u$、$ue=uf$。

(2) $w=y$，则$(y,a)e=(y,a)f$，与(1)同理得$(y,a)=(y,a')u$、$ue=uf$。

(3) $w=z$，则$(z,a)e=(z,a)f$，故$ae=af$。因为A满足条件(IE)，所以存在$b'\in A$，$u\in S$，使得$a=b'u$、$ue=uf$。若$b'\in A-B$，则$(z,a)=(x,b')u$或者$(z,a)=(y,b')u$，$ue=uf$。若$b'\in B$，则$(z,a)=(z,b'u)=(z,b')u$、$ue=uf$。

综上，$A\coprod^{B}A$满足条件(IE)。

充分性。假设$A\coprod^{B}A$满足条件(IE)，设$a\in A$，$e,f\in E(S)$，满足$ae=af$，那么$(w,ae)=(w,af)$，即$(w,a)e=(w,a)f$，其中$w=\{x,y,z\}$。分为以下2种情况讨论：

(1) 若$a\in B$，则$(z,a)e=(z,a)f$。因为$A\coprod^{B}A$满足条件(IE)，所以存在$(z,a')\in A\coprod^{B}A$，$u\in S$，使得$(z,a)=(z,a')u=(z,a'u)$、$ue=uf$，故$a=a'u$、$ue=uf$。

(2) 若$a\in A-B$，则$(x,a)e=(x,a)f$或者$(y,a)e=(y,a)f$。因为$A\coprod^{B}A$满足条件(IE)，所以存在(x,a')或者$(y,a')\in A\coprod^{B}A$，$u\in S$，使得$(x,a)=(x,a')u$或者$(y,a)=(y,a')u$，$ue=uf$，即$(x,a)=(x,a'u)$或者$(y,a)=(y,a'u)$，故$a=a'u$、$ue=uf$。综上，A满足条件(IE)。

下面例子说明满足条件(IE)的右S-系不一定是挠自由的。

例5 设$S=(N,\cdot)$是自然数在乘法下构成的幺半群，设$A_N=N\coprod^{N\setminus\{1\}}N=\{(x,1)\}\dot{\cup}\{N\setminus\{1\}\}\dot{\cup}\{(y,1)\}$。因为$N$满足条件(IE)，由命题5知$A_N$满足条件(IE)。又因为$(x,1)2=2=(y,1)2$，但$(x,1)\neq(y,1)$，所以$A_N$不是挠自由的。

定理4 设S是幺半群，则以下几条等价：

(1) 对任意S-系A_i，$i\in I$，如果$\prod_{i\in I}A_i$满足条件(IE)，则每个A_i满足条件(IE)；

(2) Θ满足条件(IE)；

(3) S是左I-collapsible 的。

证明 (1)⇒(2)。因为$\coprod_{i\in I}A_i\cong\coprod_{i\in I}A_i\times\{\theta\}$，则$\Theta$满足条件(IE)。

(2)⇒(3)。由引理2可知。

(3)⇒(1)。设$a_i\in A_i$，$e,f\in E(s)$，满足$a_ie=a_if$。由于S是左I-collapsible 的，因此存在$u'\in S$，使得$u'e=u'f$。考虑某个固定的$a_j\in A_j$，$j\neq i$，设

$$c_i=\begin{cases}a_i, & i=j,\\ a_ju', & i\neq j,\end{cases}$$

则$(c_i)_Ie=(c_i)_If$，因为$\prod_{i\in I}A_i$满足条件(IE)，所以存在$(a_i')_I\in\prod_{i\in I}A_i$，$u\in S$，使得$(c_i)_I=(a_i')_Iu$且$ue=uf$，从而$a_i=a_i'u$，则$A_i$满足条件(IE)。

回顾文献[5]中集合$L(a,b)$的定义，假设S是幺半群，$a,b\in S$，设

$$L(a,b)=\{(s,t)\in S\times S\mid sa=tb\},$$

则$L(a,b)$要么是一个空集，要么是左S-系。类似地给出集合$L(e,f)$的定义，假设S是幺半群，$e,f\in E(S)$，$L(e,f)=\{(s,t)\in S\times S\mid se=tf\}$。

下面定理给出了对角系$D(S)$满足条件(IE)的刻画。

定理5 设S是幺半群，则以下几条等价：

(1) 右S-系A_i，$i=\{1,2,\cdots,n\}$满足条件(IE)，则$\prod_{i=1}^{n}A_i$满足条件(IE)；

(2) $D(S)$满足条件(IE)；

(3) 对任意的$e,f\in E(S)$，要么$L(e,f)\cap\triangle_{S\times S}$是空集，要么对任意的$(u,u),(v,v)\in L(e,f)\cap\triangle_{S\times S}$，存在$p\in S$，使得$pe=pf$且$(u,u),(v,v)\in S(p,p)$。

证明 (1)⇒(2)是显然的。

(2)⇒(3)。假设$D(S)$满足条件(IE)，设$(u,u),(v,v)\in L(e,f)\cap\triangle_{S\times S}$，$e,f\in E(S)$，则$ue=uf$，$ve=vf$，

故$(u,v)e=(u,v)f$。因为$D(S)$满足条件(IE),所以存在$(s,t)\in D(S)$, $p\in S$,使得$(u,v)=(s,t)p$、$pe=pf$,则$u=sp$, $v=tp$,故$(u,u)=s(p,p)$, $(v,v)=t(p,p)$,即(u,u),$(v,v)\in S(p,p)$。

(3)⇒(1)。假设$A_1,A_2,\cdots,A_n$满足条件(IE),设$a_i\in A_i$, $i=\{1,2,\cdots,n\}$, $e,f\in E(S)$,满足$(a_1,a_2,\cdots,a_n)e=(a_1,a_2,\cdots,a_n)f$,则$a_ie=a_if$, $i=\{1,2,\cdots,n\}$。因为A_i满足条件(IE),所以存在$a_i'\in A_i$, $u_i\in S$,使得$a_i=a_i'u_i$、$u_ie=u_if$,则$(u_i,u_i)\in L(e,f)\cap\triangle_{S\times S}$,所以由条件可知存在$p\in S$,使得$pe=pf$且$(u_i,u_i)\in S(p,p)$。则存在$s_i\in S$,使得$(u_i,u_i)=s_i(p,p)$,即$u_i=s_ip$,所以

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(a_1's_1p,a_2's_2p,\cdots,a_n's_np)=(a_1's_1,a_2's_2,\cdots,a_n's_n)p,$$

故$\prod_{i=1}^{n}A_i$满足条件(IE)。

引理 6[5]　设S是幺半群,K是S的真右理想,则 Rees 商右S-系S/K满足条件(E)当且仅当$|K|=1$。

类似地,研究 Rees 商右S-系S/K满足条件(IE)的等价刻画,先给出如下定义。

定义 4　设S是幺半群,K是S的右理想,称K是I-左 annihilating,如果

$$(\forall x\in S,\ t,t'\in E(S))(xt\neq xt')\Rightarrow[(xt\notin K)\vee(xt'\notin K)\vee((x\in K)\wedge(\exists u\in K,\ ut=ut'))]。$$

定理 6　设S是幺半群,K是S的右理想,Rees 商右S-系S/K满足条件(IE)当且仅当S是左I-collapsible 幺半群或K是I-左 annihilating 真右理想。

证明　必要性。假设K是S的右理想,S/K满足条件(IE),考虑以下 2 种情况:

情况 1　$K=S$。那么$S/K\cong\Theta$,由引理 2 知,S是左I-collapsible 幺半群。

情况 2　$K\neq S$。设$xt\neq xt'$,其中$x\in S$, $t,t'\in E(S)$。如果$xt\notin K$或$xt'\notin K$,则显然K是I-左 annihilating。否则$xt,xt'\in K$,则$xt\rho_Kxt'$,由定理 2 可知,存在$u\in S$,使得$x\rho_Ku$、$ut=ut'$。由于$x\rho_Ku$,则$x,u\in K$,因此K是I-左 annihilating。

充分性。假设K是S的右理想,考虑以下 2 种情况:

情况 1　$K=S$。S是左I-collapsible 幺半群,由引理 2 可知$S/K\cong\Theta$满足条件(IE)。

情况 2　$K\neq S$且K是S的I-左 annihilating 真右理想。假设$x\in S$, $t,t'\in E(S)$, $xt\rho_Kxt'$,那么有以下情形:

(1) $xt=xt'$。如果$u=x$,则$ut=ut'$,所以由定理 2 可知S/K满足条件(IE)。

(2) $xt\neq xt'$。$xt,xt'\in K$,因为K是I-左 annihilating 真右理想,所以$x\in K$且存在$u\in K$,使得$ut=ut'$,又$x\rho_Ku$,所以由定理 2 可知S/K满足条件(IE)。

综上,可以证明如果S是左I-collapsible 幺半群或K是I-左 annihilating 真右理想,则S/K满足条件(IE)。

参考文献:

[1] LAAN V. Pullbacks and flatness properties of acts I[J]. Communications in Algebra, 2001, 29(2):829-850.

[2] MASKONI Z J, GOLCHIN A, MOHAMMADZADEH H. On a generalization of condition (E)[J]. Asian-European Journal of Mathematics, 2023, 16(2):2350021.

[3] 刘仲奎,乔虎生. 半群的 S-系理论[M]. 北京:科学出版社,2008:1-119.
LIU Zhongkui, QIAO Husheng. The S-act theory of semigroups[M]. Beijing: Science Press, 2008: 1-119.

[4] BULMAN-FLEMING S, GILMOUR A. Flatness properties of diagonal acts over monoids[J]. Semigroup Forum, 2009, 79(2):298-314.

[5] KILP M, KNAUER U, MIKBALEV A. Monoids, acts and categories[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2000: 29-262.

[6] LIANG Xingliang, LUO Yanfeng. On a generalization of weak pullback flatness[J]. Communications in Algebra, 2016, 44(9):3796-3817.

[7] GOLCHIN A, MOHAMMADZADEH H. On condition(E′P)[J]. Islamic Republic of Iran, 2006, 17(4):343-349.

[8] GOULD V. Coherent monoids[J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 1992, 53(2):166-182.

[9] COLCHIN A, MOHAMMADZADEH H. On condition (EP)[J]. International Mathematical Forum, 2007, 2(19):911-918.

(编辑:陈丽萍)