山东大学学报(理学版)2025 年 3 月 第 60 卷 第 3 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.60, No.3, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)03-0001-11 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.295

基于矩匹配的 Hull-White 模型下商期权定价

张立东[1],吴水苗[2],田静禾[2],董懿琳[2],孟祥波[1*]
(1.天津科技大学理学院, 天津 300457; 2.天津科技大学经济与管理学院, 天津 300457)

摘要:假设标的资产价格服从均值回复过程,运用矩匹配技术,研究 Hull-White 模型下商期权定价问题。相比于使用蒙特卡罗模拟方法,对 Hull-White 模型采用矩匹配的估值方法,可以在确保精度的基础上显著提升商期权定价的稳定性和效率。最后,在中国股票市场上,选取 2 个行业龙头公司的股票作为研究对象进行实例应用,评估期权定价模型在金融市场的适用性。结果显示,本模型与蒙特卡洛模拟方法的估计结果差异极小,但前者用时显著缩短。

关键词:商期权;均值回复过程;Hull-White 模型;矩匹配

中图分类号:O211; F830.9 **文献标志码**:A

引用格式:张立东,吴水苗,田静禾,等. 基于矩匹配的 Hull-White 模型下商期权定价[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(3):1-11.

Pricing quotient options by the moment matching approach under the Hull-White model

ZHANG Lidong[1], WU Shuimiao[2], TIAN Jinghe[2], DONG Yilin[2], MENG Xiangbo[1*]
(1. School of Science, Tianjin University of Science and Technology, Tianjin 300457, China; 2. College of Economics and Management, Tianjin University of Science and Technology, Tianjin 300457, China)

Abstract: Under the assumption that the underlying asset price follows the mean reversion process, the quotient option pricing problem under the Hull-White model is studied by using the moment matching technique. Compared with the Monte Carlo simulation method, the stability and efficiency of quotient option pricing can be significantly improved by the proposed valuation method, while maintaining accuracy. Furthermore, in the Chinese stock market, the stocks of two leading companies are chosen as research objects for evaluating the applicability of the option pricing model in the financial market. The results indicate that the estimation results of this model and the Monte Carlo simulation method exhibit minimal differences, althougth the former requires significantly less time.

Key words: quotient option; mean-reverting process; Hull-White model; moment matching

0 引言

根据国际期货业协会公布的关于全球场内期权的统计数据:2021 年期权成交量约为 333.1 亿手,比 2020 年同比增长 56.6%;2021 年期权持仓量约为 8.1 亿手,比 2020 年同比增长 1.5%(https://www.fia.org)。由此可见,期权作为金融衍生品市场基础工具之一,具有越来越高的场内交易活跃度。为了满足客户特殊化的风险管理需求,商期权的发展与研究渐渐得到了重视。

期权定价研究常基于 Heston 模型刻画资产价格, 王波等[1]结合 Heston 模型和 3/2 模型展开研究,并描述了 Heston 随机波动率模型的渐近行为[2]。此外,一些学者研究了带指数缓增因子的分布阶粗糙Heston模型和 Heston 模型下美式看跌期权定价[3-4]。Heston 模型的使用改进了传统 Black-Scholes 模型下波动率为

收稿日期:2023-07-06; **网络出版时间**:2024-10-30 16:58:43
基金项目:教育部人文社会科学研究一般项目(19YJCZH251);天津市哲学社会科学规划项目(TJYJ21-009)

第一作者:张立东(1979—),男,教授,博士,研究方向为金融工程与风险管理. E-mail:zhanglidong1999@126.com
* **通信作者**:孟祥波(1981—),男,副教授,博士,研究方向为金融数学、随机最优控制. E-mail:mengxb@tust.edu.cn

常数的不合理假设,同时提高了计算过程的效率,但参数估计较为复杂,并且参数估计缺乏稳定性。与之相比,Hull-White 模型[5]具有更大的灵活性,更容易进行参数的估计[6],在出现负利率的情况下仍然有效。Hull-White 模型假设资产具有均值回复特性,这意味着资产在长期内将趋近于一个平均值,能够更好地描述实际观察到的资产行为,兼具参数估计的简易性和计算的高效性。

矩匹配技术可以有效地处理多个标的资产引发的高维问题,因此被广泛用于篮子期权定价研究。Li 等[7]假设资产价格遵循 Hull-White 模型,利用矩匹配方法对篮子期权进行定价研究。Yu 等[8]假设利率遵循单因子 Hull-White 模型,利用矩匹配方法推导出篮子期权的近似公式。矩匹配技术对篮子期权的有效定价,展现了其在多资产期权定价中的良好应用前景[9]。

商期权也称为比率期权,其标的为 2 个资产、指数或其他数量的比率,具有名义价值和票面价值的特性。Gao 等[10]基于不确定理论提出不确定带跳跃的多资产价格模型,并运用于商期权定价研究中。李敬楠等[11]假设标的资产遵循多维指数奥恩斯坦-乌伦贝克过程(Ornstein-Uhlenbeck process, OU),利率分别遵循 Ho-Lee 模型和扩展 Vasicek 模型,通过多维 Girsanov 定理和测度变换方法,推导出商期权的定价公式。Özsoy[12]主要对 Black-Scholes-Merton 模型下的商期权定价进行概括,并将该结果运用到伊斯坦布尔证券交易所商期权定价研究中。

本文提出一种简洁有效的商期权定价方法,在保证精度的情况下提高计算效率。假设标的资产价格遵循 Hull-White 模型,采用矩匹配方法对标的资产进行逐段近似匹配,将 2 个资产价格的商转化为 2 个对数正态过程的商,从而研究商资产组合的分布特征,最终根据期权定价基本原理,给出欧式商期权价格的近似解析解。将本文所得商期权定价结果与蒙特卡罗模拟方法所得结果相比较,验证本方法定价的准确性、高效性和稳定性,通过实证分析评估期权定价模型在金融市场的适用性。

1 模型与主要结论

假设 2 种资产的价格过程 $X_i(t)$, $i=1,2$,分别遵循带有均值回复过程特性[13]的 Hull-White 模型[14-15]:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_i(t)=k_i(t)(\gamma_i(t)-X_i(t))\,\mathrm{d}t+v_i(t)X_i^{\beta}(t)\,\mathrm{d}W_i(t), \quad \forall\, t\in[0,T], \\ X_i(0)=x_{i0}, \end{cases}$$

其中:$k_i(t)$为回归到长期均衡价格的速度;$\gamma_i(t)$为资产的长期均衡价格;$v_i(t)$为第 i 个资产的波动率。为了简化分析,假设参数 $k_i(t)$、$\gamma_i(t)$和 $v_i(t)$是关于时间 t 的函数,布朗运动 $W_1(t)$和 $W_2(t)$相互独立。

商期权价格资产组合形式如下:

$$X(T)=\frac{X_1(T)}{X_2(T)}。\tag{1}$$

依据期权定价基本原理,执行价格为 K,到期时间为 T 的看涨商期权的价格为

$$C(X)=\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t}E\left[\max\left(\frac{X_1(T)}{X_2(T)}-K,0\right)\right],\tag{2}$$

看跌商期权的价格为

$$C(X)=\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t}E\left[\max\left(K-\frac{X_1(T)}{X_2(T)},0\right)\right]。\tag{3}$$

定理 1 执行价格为 K,到期时间为 T 的看涨商期权价格为

$$\begin{aligned} C(X)\approx\ & \mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t}\frac{E[X_1(T)]E[X_2^2(T)]}{(E[X_2(T)])^3}\Phi\left(\frac{\ln E[X_1^2(T)]/2+3\ln E[X_2^2(T)]/2-4\ln E[X_2(T)]-\ln K}{\sqrt{-2\ln E[X_1(T)]-2\ln E[X_2(T)]+\ln E[X_1^2(T)]+\ln E[X_2^2(T)]}}\right) \\ & -K\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t}\Phi\left(\frac{2\ln E[X_1(T)]-2\ln E[X_2(T)]-\ln E[X_1^2(T)]/2+\ln E[X_2^2(T)]/2-\ln K}{\sqrt{-2\ln E[X_1(T)]-2\ln E[X_2(T)]+\ln E[X_1^2(T)]+\ln E[X_2^2(T)]}}\right)。\end{aligned}\tag{4}$$

定理 2 执行价格为 K,到期时间为 T 的看跌商期权价格为

$$C(X) \approx K\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}\Phi\left(\frac{\ln K-2\ln E[X_1(T)]+2\ln E[X_2(T)]+\ln E[X_1^2(T)]/2-\ln\{E[X_2^2(T)]\}/2}{\sqrt{-2\ln E[X_1(T)]-2\ln E[X_2(T)]+\ln E[X_1^2(T)]+\ln E[X_2^2(T)]}}\right)$$
$$-\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}\frac{E[X_1(T)]E[X_2^2(T)]}{(E[X_2(T)])^3}\Phi\left(\frac{\ln K-\ln E[X_1^2(T)]/2-3\ln E[X_2^2(T)]/2+4\ln E[X_2(T)]}{\sqrt{-2\ln E[X_1(T)]-2\ln E[X_2(T)]+\ln E[X_1^2(T)]+\ln E[X_2^2(T)]}}\right)。\tag{5}$$

2　主要结论证明

假设标的资产价格遵循 Hull-White 模型,采用矩匹配方法对标的资产进行逐段近似匹配,将 2 个资产价格的商转化为 2 个对数正态过程的商,从而研究商资产组合的分布特征,最终根据期权定价基本原理,给出欧式商期权价格的近似解析解。

研究商资产组合分布特征的过程主要包括以下步骤:第 1 步,给出 Hull-White 模型的一阶原点矩 $E[X_i(t)]$和二阶原点矩 $E[X_i^2(t)]$;第 2 步,给出用于逐段匹配的几何布朗运动及其一阶原点矩 $E[S_i(t)]$和二阶原点矩$E[S_i^2(t)]$,并将资产价格过程与几何布朗运动逐段匹配;第 3 步,计算 Hull-White 模型下商期权的近似价格。具体步骤如下。

第 1 步　给出 Hull-White 模型的一阶原点矩(推导过程见附录 A)和二阶原点矩(推导过程见附录 B)。对于 Hull-White 模型二阶原点矩的探讨,本文选取 β 分别为 0、$\frac{1}{2}$ 和 1 时对应的 Vasicek-Ornstein-Uhlenbeck (VOU)过程、Cox-Ingersoll-Ross(CIR)过程和 Exponential-Ornstein-Uhlenbeck(EOU)过程为例展开探讨。

通过伊藤引理以及一阶线性常微分方程解法,计算得到一般 Hull-White 模型下均值回复过程的一阶矩

$$E[X_i(t)] = \mathrm{e}^{-\int_0^t k_i(s)\mathrm{d}s}\left(x_{i0}+\int_0^t k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{e}^{\int_0^s k_i(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\right)。\tag{6}$$

$\beta=0$ 时, Hull-White 模型即为 VOU 过程[16],其过程以及二阶原点矩分别为

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_i(t)=k_i(t)(\gamma_i(t)-X_i(t))\mathrm{d}t+v_i(t)\mathrm{d}W_i(t), & \forall t\in[0,T],\\ X_i(0)=x_{i0},\end{cases}$$
$$E[X_i^2(t)] = \mathrm{e}^{-\int_0^t 2k_i(s)\mathrm{d}s}\int_0^t v_i^2(s)\mathrm{e}^{\int_0^s 2k_i(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{-\int_0^t 2k_i(s)\mathrm{d}s}\left(x_{i0}+\int_0^t k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{e}^{\int_0^s k_i(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\right)^2。\tag{7}$$

$\beta=\frac{1}{2}$时,Hull-White 模型即为 CIR 过程[17-18],其过程以及二阶原点矩分别为

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_i(t)=k_i(t)(\gamma_i(t)-X_i(t))\mathrm{d}t+v_i(t)\sqrt{X_i(t)}\mathrm{d}W_i(t), & \forall t\in[0,T],\\ X_i(0)=x_{i0},\end{cases}$$
$$E[X_i^2(t)] = \mathrm{e}^{-\int_0^t 2k_i(s)\mathrm{d}s}\int_0^t v_i{}^2(s)\left(x_{i0}+\int_0^s k_i(u)\gamma_i(u)\mathrm{e}^{\int_0^u k_i(v)\mathrm{d}v}\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{\int_0^s k_i(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s$$
$$+\mathrm{e}^{-\int_0^t 2k_i(s)\mathrm{d}s}\left(x_{i0}+\int_0^t k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{e}^{\int_0^s k_i(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\right)^2。\tag{8}$$

$\beta=1$ 时,Hull-White 模型即为 EOU 过程,其过程以及二阶原点矩分别为

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_i(t)=k_i(t)(\gamma_i(t)-X_i(t))\mathrm{d}t+v_i(t)X_i(t)\mathrm{d}W_i(t), & \forall t\in[0,T],\\ X_i(0)=x_{i0},\end{cases}$$
$$E[X_i^2(t)] = \mathrm{e}^{\int_0^t (v_i(s)^2-2k_i(s))\mathrm{d}s}\int_0^t v_i^2(s)\left(x_{i0}+\int_0^s k_i(u)\gamma_i(u)\mathrm{e}^{\int_0^u k_i(v)\mathrm{d}v}\mathrm{d}u\right)^2\mathrm{e}^{-\int_0^s v_i^2(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s$$
$$+\mathrm{e}^{-\int_0^t 2k_i(s)\mathrm{d}s}\left(x_{i0}+\int_0^t k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{e}^{\int_0^s k_i(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\right)^2。\tag{9}$$

第 2 步　给出逐段几何布朗运动及其一阶原点矩和二阶原点矩,并将资产价格过程与几何布朗运动逐段匹配,从而确定逐段几何布朗运动的常系数 $q_i(t)$和 $\sigma_i(t)$。

将时间区间$[0,T]$划分成 n 个小区间$[t_{l-1},t_l]$, $l=1,2,\cdots,n$,在每个区间$[t_{l-1},t_l]$上分别定义一个常系数几何布朗运动,则在整个时间区间$[0,T]$上定义的过程即为逐段几何布朗运动,其形式如下:

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_i(t)=(r(t)-q_i(t))S_i(t)\mathrm{d}t+\sigma_i(t)S_i(t)\mathrm{d}W_i(t), \quad \forall t\in[0,T], \\ S_i(0)=x_{i0}, \end{cases} \tag{10}$$

其中，$r(t)$为t时刻即时利率，且

$$\begin{cases} q_i(t)=q_{il}, \quad \forall t\in[t_{l-1},t_l], \quad l=1,2,\cdots,n, \\ \sigma_i(t)=\sigma_{il}, \quad \forall t\in[t_{l-1},t_l], \quad l=1,2,\cdots,n。 \end{cases}$$

利用常微分方程解法求解几何布朗运动的一阶原点矩并整理，可得

$$E[S_i(t_l)]=E[S_i(t_{l-1})]\ \mathrm{e}^{\int_{t_{l-1}}^{t_l} r(t)\mathrm{d}t-q_{il}\Delta t_l}, \tag{11}$$

几何布朗运动的二阶原点矩为

$$E[S_i^2(t_l)]=E[S_i^2(t_{l-1})]\ \mathrm{e}^{\int_{t_{l-1}}^{t_l} 2r(t)\mathrm{d}t+(\sigma_{il}^2-2q_{il})\Delta t_l}。 \tag{12}$$

根据式(11)、(12)可以整理得q_{il}和σ_{il}为

$$\begin{cases} q_{il}=\dfrac{1}{\Delta t_l}\left[\int_{t_{l-1}}^{t_l} r(t)\mathrm{d}t-\ln\left(\dfrac{E[S_i(t_l)]}{E[S_i(t_{l-1})]}\right)\right], \\ \sigma_{il}=\sqrt{\dfrac{1}{\Delta t_l}\left[\ln\left(\dfrac{E[S_i(t_l)^2]}{E[S_i(t_{l-1})^2]}\right)-2\ln\left(\dfrac{E[S_i(t_l)]}{E[S_i(t_{l-1})]}\right)\right]}。 \end{cases}$$

进而可得$\int_0^T q_{il}\mathrm{d}t$和$\int_0^T \sigma_{il}^2\mathrm{d}t$如下：

$$\int_0^T q_{il}\mathrm{d}t=\int_0^T r(t)\mathrm{d}t-\ln\frac{E[S_i(T)]}{E[S_i(0)]}=\int_0^T r(t)\mathrm{d}t-\ln E[S_i(T)]+\ln E[S_i(0)], \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \sigma_{il}^2\mathrm{d}t &= \sum_{l=1}^n \sigma_{il}^2\Delta t_l=\sum_{l=1}^n\left[\ln\left(\frac{E[S_i(t_l)^2]}{E[S_i(t_{l-1})^2]}\right)-2\ln\left(\frac{E[S_i(t_l)]}{E[S_i(t_{l-1})]}\right)\right] \\ &=\ln\frac{E[S_i^2(T)]}{S_i(0)^2}-2\ln\frac{E[S_i(T)]}{S_i(0)}=\ln\frac{E[S_i^2(T)]}{(E[S_i(T)])^2}=\ln E[S_i^2(T)]-2\ln E[S_i(T)]。 \end{aligned} \tag{14}$$

将资产价格过程$X_i(t_l)$与几何布朗运动$S_i(t_l)$逐段匹配

$$\begin{cases} E[X_i(t_l)]=E[S_i(t_l)], \quad l=1,2,\cdots,n, \\ E[X_i^2(t_l)]=E[S_i^2(t_l)], \quad l=1,2,\cdots,n, \end{cases} \tag{15}$$

则式(15)成立时所对应的q_{il}和σ_{il}取值分别为

$$\begin{cases} q_{il}=\dfrac{1}{\Delta t_l}\left[\int_{t_{l-1}}^{t_l} r(t)\mathrm{d}t-\ln\left(\dfrac{E[X_i(t_l)]}{E[X_i(t_l-1)]}\right)\right], \\ \sigma_{il}=\sqrt{\dfrac{1}{\Delta t_l}\left[\ln\left(\dfrac{E[X_i(t_l)^2]}{E[X_i(t_{l-1})^2]}\right)-2\ln\left(\dfrac{E[X_i(t_l)]}{E[X_i(t_{l-1})]}\right)\right]}。 \end{cases}$$

第3步 计算Hull-White模型下商期权的近似价格。根据第2步，资产$X_1(T)$和$X_2(T)$分别在每个区间$[t_{l-1},t_l]$上与逐段对数几何布朗运动匹配，下面验证商组合$\dfrac{S_1(T)}{S_2(T)}$服从对数正态分布，即$\ln\dfrac{S_1(T)}{S_2(T)}$服从正态分布。

根据伊藤引理可得

$$\begin{aligned} \ln\frac{S_1(T)}{S_2(T)} &= \ln\frac{S_1(0)}{S_2(0)}+\int_0^T\frac{1}{S_1(t)}\mathrm{d}S_1(t)-\frac{1}{2}\int_0^T\frac{\mathrm{d}\langle S_1(t),S_2(t)\rangle}{S_1{}^2(t)}-\int_0^T\frac{1}{S_2(t)}\mathrm{d}S_2(t)+\frac{1}{2}\int_0^T\frac{\mathrm{d}\langle S_1(t),S_2(t)\rangle}{S_2{}^2(t)} \\ &=\ln\frac{x_{10}}{x_{20}}+\int_0^T\frac{1}{S_1(t)}[(r(t)-q_1(t))S_1(t)\mathrm{d}t+\sigma_1(t)S_1(t)\mathrm{d}W_1(t)]-\frac{1}{2}\int_0^T\frac{1}{S_1^2(t)}\sigma_1^2(t)S_1^2(t)\mathrm{d}t \\ &\quad -\int_0^T\frac{1}{S_2(t)}[(r(t)-q_2(t))S_2(t)\mathrm{d}t+\sigma_2(t)S_2(t)\mathrm{d}W_2(t)]+\frac{1}{2}\int_0^T\frac{1}{S_2{}^2(t)}\sigma_2{}^2(t)S_2^2(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$
=\ln\frac{x_{10}}{x_{20}}+\int_0^T\left(-q_1(t)+q_2(t)-\frac{\sigma_1^2(t)}{2}+\frac{\sigma_2^2(t)}{2}\right)\mathrm{d}t+\int_0^T\sigma_1(t)\,\mathrm{d}W_1(t)-\int_0^T\sigma_2(t)\,\mathrm{d}W_2(t)。\tag{16}
$$

由式(16)可知 $\ln\frac{S_1(T)}{S_2(T)}$服从正态分布,且 $\ln\frac{S_1(T)}{S_2(T)}$的期望μ 与方差 σ^2 分别为

$$
\mu=\ln\frac{x_{10}}{x_{20}}+\int_0^T\left(-q_1(t)+q_2(t)-\frac{\sigma_1^2(t)}{2}+\frac{\sigma_2^2(t)}{2}\right)\mathrm{d}t=\ln\frac{x_{10}}{x_{20}}+\sum_{l=1}^{n}\left(-q_{1l}+q_{2l}-\frac{\sigma_{1l}^2}{2}+\frac{\sigma_{2l}^2}{2}\right)\Delta t_l,
$$

$$
\sigma^2=\int_0^T\sigma_1^2(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^T\sigma_2^2(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{l=1}^{n}(\sigma_{1l}^2+\sigma_{2l}^2)\Delta t_l。
$$

结合式(13)、(15),可以得到期望μ 与方差 σ^2

$$
\mu=2\ln E[X_1(T)]-2\ln E[X_2(T)]-\frac{1}{2}\ln E[X_1^2(T)]+\frac{1}{2}\ln E[X_2^2(T)]=\ln\frac{(E[X_1(T)])^2\sqrt{E[X_2^2(T)]}}{\sqrt{E[X_1^2(T)]}\,(E[X_2(T)])^2},\tag{17}
$$

$$
\sigma^2=-2\ln E[X_1(T)]-2\ln E[X_2(T)]+\ln E[X_1^2(T)]+\ln E[X_2^2(T)]=\ln\frac{E[X_1^2(T)]}{(E[X_1(T)])^2}\frac{E[X_2^2(T)]}{(E[X_2(T)])^2}。\tag{18}
$$

下面给出执行价格为 K、到期时间为 T 的看涨商期权和看跌商期权的价格推导过程。

定理 1 的证明　依据期权定价基本原理,执行价格为 K、到期时间为 T 的看涨商期权的价格为

$$
\begin{aligned}
C(X)&\approx \mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}E\left[\max\left(\mathrm{e}^{\ln\frac{S_1(T)}{S_2(T)}}-K,0\right)\right]=\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}\int_{\ln K}^{+\infty}(\mathrm{e}^y-K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y\\
&=\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}\left[\int_{\ln K}^{+\infty}\mathrm{e}^y\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y-\int_{\ln K}^{+\infty}K\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\int_{\ln K}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(y-(\mu+\sigma^2))^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y-\int_{\ln K}^{+\infty}K\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\left(1-\Phi\left(\frac{\ln K-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)\right)-K\left(1-\Phi\left(\frac{\ln K-\mu}{\sigma}\right)\right)\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\Phi\left(\frac{\mu+\sigma^2-\ln K}{\sigma}\right)-K\Phi\left(\frac{\mu-\ln K}{\sigma}\right)\right]。
\end{aligned}\tag{19}
$$

将式(17)、(18)代入式(19),定理 1 得证。

定理 2 的证明　同理,执行价格为 K、到期时间为 T 的看跌商期权的价格为

$$
\begin{aligned}
C(X)&\approx \mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}E\left[\max\left(K-\mathrm{e}^{\ln\frac{S_1(T)}{S_2(T)}},0\right)\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\ln K}(K-\mathrm{e}^y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y\\
&=\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}\left[\int_{-\infty}^{\ln K}K\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y-\int_{-\infty}^{\ln K}\mathrm{e}^y\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}\left[\int_{-\infty}^{\ln K}K\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y-\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{\ln K}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(y-(\mu+\sigma^2))^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}\left[K\Phi\left(\frac{\ln K-\mu}{\sigma}\right)-\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\Phi\left(\frac{\ln K-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)\right]。
\end{aligned}\tag{20}
$$

将式(17)、(18)代入式(20),定理 2 得证。

3　数值分析与实证研究

蒙特卡罗模拟方法在到期时间较长和波动率较高时可以保持计算精度,但收敛速度慢[19-20],计算效率显著下降[21],当用于研究多资产期权定价问题时,需要在计算效率和计算精度之间进行权衡。鉴于此,本章

将蒙特卡罗模拟结果作为对比,以到期时间和波动率为控制变量,讨论商期权在不同参数下的理论价格,并利用计算结果的差异率和计算时间来说明方法的有效性、高效性和稳定性。

首先,将验证本方法(对 Hull-White 模型采用矩匹配方法,HM 法)的有效性和高效性。从表1看出,从期权价格的估计精度来看,本方法的计算结果具有很高的精度,差异率较小而且相对稳定;从期权价格的估计用时来看,相比于耗时较长的蒙特卡罗模拟方法,本方法因具有解析解的特点而用时较短。综上所述,本方法在 Hull-White 模型中的 VOU 过程、CIR 过程和 EOU 过程都得到了验证,在保证了计算精度的前提下,使得计算商期权的效率有了极大的提升。

表1 HM 方法与 MC 方法定价结果

($T=1$, $x_1=445.55$, $x_2=15.76$, $v_1=0.24$, $v_2=0.21$, $r=5\%$, $k_1=k_2=1/3$)

Table 1 Pricing results of HM method and MC method

($T=1$, $x_1=445.55$, $x_2=15.76$, $v_1=0.24$, $v_2=0.21$, $r=5\%$, $k_1=k_2=1/3$)

Hull-White 模型选取	K	HM		MC			差异率/%
		期权价格	用时/s	期权价格	SD	用时/s	
VOU	5	22.139 4	0.015 6	22.139 7	0.000 06	39	−0.001 4
	7	20.236 9	0.001 0	20.237 3	0.000 07	29	−0.002 0
	9	18.334 5	0.000 2	18.334 3	0.000 10	27	0.001 1
	11	16.432 0	0.000 1	16.432 1	0.000 06	30	−0.000 6
	13	14.529 6	0.000 6	14.529 9	0.000 08	46	−0.002 1
	15	12.627 1	0.000 2	12.627 3	0.000 06	36	−0.001 6
	17	10.724 6	0.000 2	10.724 5	0.000 08	51	0.000 9
	19	8.822 2	0.000 1	8.821 6	0.000 08	55	0.006 8
	21	6.919 7	0.000 2	6.919 2	0.000 07	27	0.007 2
	23	5.017 3	0.000 2	5.017 3	0.000 06	27	0.000 0
CIR	5	22.190 9	0.014 1	22.193 4	0.000 25	16	−0.011 3
	7	20.288 5	0.014 1	20.289 6	0.000 34	48	−0.005 4
	9	18.386 0	0.014 1	18.384 8	0.000 27	76	0.006 5
	11	16.483 6	0.014 1	16.478 9	0.000 31	50	0.028 5
	13	14.581 1	0.014 1	14.579 3	0.000 31	79	0.012 3
	15	12.678 6	0.029 7	12.679 4	0.000 21	51	−0.006 3
	17	10.776 2	0.029 7	10.774 5	0.000 30	23	0.015 8
	19	8.873 7	0.029 7	8.872 8	0.000 29	46	0.010 1
	21	6.971 3	0.029 7	6.968 0	0.000 41	81	0.047 4
	23	5.068 8	0.029 7	5.066 4	0.000 30	57	0.047 4
EOU	5	23.008 2	0.015 7	23.010 1	0.001 80	54	−0.008 3
	7	21.105 8	0.015 7	21.061 2	0.002 95	54	0.211 8
	9	19.203 3	0.015 7	19.192 7	0.002 84	54	0.055 2
	11	17.301 0	0.015 7	17.300 9	0.001 87	54	0.000 6
	13	15.400 4	0.015 7	15.382 0	0.002 37	54	0.119 6
	15	13.508 3	0.031 3	13.498 8	0.002 76	50	0.070 4
	17	11.643 0	0.031 3	11.628 9	0.002 45	43	0.121 2
	19	9.837 4	0.031 3	9.829 3	0.002 19	42	0.082 4
	21	8.135 4	0.031 3	8.132 0	0.001 32	44	0.041 8
	23	6.581 6	0.031 3	6.565 8	0.001 65	43	0.240 6

注:HM 代表本文所提出的方法;MC 代表蒙特卡罗模拟方法;SD 表示蒙特卡罗模拟方法期权估计值的标准误差,M 表示运算次数,ω 为标准差,期权估计值的标准误差为 $\omega/\sqrt{M}$。差异率是将两期权价值的差与蒙特卡罗模拟的结果相比所得。

其次,将验证 HM 法的稳定性。从表2、3可以看出,当到期时间变长,蒙特卡罗模拟所耗费的时间会有所增加,与之相比,本方法并没有受到显著影响,依旧保持极短的运算时间;当波动率较大时,与之相比,本方法并没有受到显著影响,依旧保持极短的运算时间。综上所述,不同于蒙特卡罗模拟方法,本方法在到期时间变长和波动率增大的情况下,计算精度和计算效率都不会受到影响,稳定性得到了验证。

表 2　到期时间较长时的 HM 方法与 MC 方法定价结果
($T=3$, $x_1=445.55$, $x_2=15.76$, $v_1=0.24$, $v_2=0.21$, $r=5\%$, $k_1=k_2=1/3$)
Table 2　The pricing results of HM method and MC method when the expiration time is long
($T=3$, $x_1=445.55$, $x_2=15.76$, $v_1=0.24$, $v_2=0.21$, $r=5\%$, $k_1=k_2=1/3$)

Hull-White 模型选取	K	HM		MC			差异率/%
		期权价格	用时/s	期权价格	SD	用时/s	
VOU	5	20.034 1	0.001 0	20.034 5	−0.000 05	69	−0.002 0
	7	18.312 7	0.000 2	18.312 4	−0.000 09	30	0.001 6
	9	16.591 3	0.000 2	16.590 8	−0.000 07	28	0.003 0
	11	14.869 8	0.000 3	14.869 3	−0.000 09	28	0.003 4
	13	13.148 4	0.000 1	13.148 3	−0.000 08	48	0.000 8
	15	11.427 0	0.000 1	11.427 7	−0.000 08	103	−0.006 1
	17	9.705 6	0.014 5	9.705 5	−0.000 11	103	0.001 0
	19	7.984 2	0.000 2	7.983 8	−0.000 10	83	0.005 0
	21	6.262 8	0.000 2	6.262 2	−0.000 08	50	0.009 6
	23	4.541 4	0.000 1	4.541 9	−0.000 09	31	−0.011 0
CIR	5	20.124 0	0.000 1	20.110 7	−0.000 27	134	0.066 1
	7	18.402 6	0.000 1	18.393 3	−0.000 35	166	0.050 6
	9	16.681 2	0.016 1	16.668 3	−0.000 34	201	0.077 4
	11	14.959 8	0.016 1	14.944 9	−0.000 31	129	0.099 7
	13	13.238 4	0.016 1	13.222 4	−0.000 36	180	0.121 0
	15	11.516 9	0.016 1	11.505 5	−0.000 33	116	0.099 1
	17	9.795 5	0.016 1	9.775 5	−0.000 35	150	0.204 6
	19	8.074 1	0.016 1	8.057 4	−0.000 25	126	0.207 3
	21	6.352 7	0.031 8	6.338 4	−0.000 36	112	0.225 6
	23	4.631 4	0.031 8	4.614 6	−0.000 27	140	0.364 1
EOU	5	21.413 5	0.000 1	21.372 0	−0.002 99	42	0.194 2
	7	19.692 2	0.000 1	19.654 9	−0.003 68	39	0.189 8
	9	17.971 2	0.015 6	17.930 0	−0.003 19	39	0.229 8
	11	16.253 6	0.015 6	16.177 9	−0.002 13	39	0.467 9
	13	14.548 2	0.015 6	14.520 4	−0.002 42	40	0.191 5
	15	12.872 9	0.015 6	12.807 7	−0.003 47	39	0.509 1
	17	11.253 4	0.015 6	11.155 4	−0.002 76	39	0.878 5
	19	9.718 8	0.031 3	9.635 3	−0.002 22	39	0.866 6
	21	8.295 6	0.031 3	8.188 9	−0.002 56	39	1.303 0
	23	7.003 7	0.031 3	6.914 3	−0.002 25	39	1.293 0

表 3　波动率较大时的 HM 方法与 MC 方法定价结果
($T=1$, $x_1=445.55$, $x_2=15.76$, $v_1=0.64$, $v_2=0.61$, $r=5\%$, $k_1=k_2=1/3$)
Table 3　The pricing results of HM method and MC method with higher volatility
($T=1$, $x_1=445.55$, $x_2=15.76$, $v_1=0.64$, $v_2=0.61$, $r=5\%$, $k_1=k_2=1/3$)

Hull-White 模型选取	K	HM		MC			差异率/%
		期权价格	用时/s	期权价格	SD	用时/s	
VOU	5	22.164 6	0.000 2	22.163 7	−0.000 21	31	0.004 1
	7	20.262 1	0.014 6	20.264 8	−0.000 25	27	−0.013 3
	9	18.359 7	0.000 2	18.357 4	−0.000 23	27	0.012 5
	11	16.457 2	0.000 1	16.458 9	−0.000 21	70	−0.010 3
	13	14.554 7	0.000 2	14.555 5	−0.000 20	78	−0.005 5
	15	12.652 3	0.000 2	12.647 9	−0.000 22	78	0.034 8
	17	10.749 8	0.003 7	10.752 5	−0.000 17	78	−0.025 1
	19	8.847 4	0.000 1	8.848 5	−0.000 27	67	−0.012 4
	21	6.944 9	0.000 2	6.943 3	−0.000 18	62	0.023 0
	23	5.042 4	0.000 1	5.039 6	−0.000 17	63	0.055 6

表 3(续)

Hull-White 模型选取	K	HM 期权价格	HM 用时/s	MC 期权价格	MC SD	MC 用时/s	差异率/%
CIR	5	22.599 5	0.015 6	22.606 0	−0.001 00	42	−0.028 8
	7	20.697 0	0.000 1	20.694 9	−0.001 11	43	0.010 1
	9	18.794 6	0.000 1	18.797 4	−0.001 02	42	−0.014 9
	11	16.892 1	0.000 1	16.882 8	−0.001 10	42	0.055 1
	13	14.989 6	0.000 1	14.996 3	−0.000 93	42	−0.044 7
	15	13.087 2	0.015 6	13.086 6	−0.000 78	42	0.004 6
	17	11.184 7	0.000 1	11.177 1	−0.000 98	42	0.068 0
	19	9.283 0	0.000 1	9.282 6	−0.000 68	42	0.004 3
	21	7.389 4	0.000 1	7.391 2	−0.000 99	42	−0.024 4
	23	5.540 3	0.000 1	5.533 0	−0.001 04	42	0.131 9
EOU	5	22.599 5	0.002 6	22.598 4	−0.001 15	42	0.004 9
	7	20.697 0	0.000 1	20.701 5	−0.001 04	41	−0.021 7
	9	18.794 6	0.000 1	18.795 7	−0.001 29	42	−0.005 9
	11	16.892 1	0.000 1	16.891 0	−0.001 24	43	0.006 5
	13	14.989 6	0.015 7	14.986 1	−0.000 94	41	0.023 4
	15	13.087 2	0.000 1	13.096 2	−0.001 03	43	−0.068 7
	17	11.184 7	0.000 1	11.187 2	−0.000 93	41	−0.022 3
	19	9.283 0	0.000 1	9.274 9	−0.001 04	42	0.087 3
	21	7.389 4	0.000 1	7.391 4	−0.001 32	42	−0.027 1
	23	5.540 3	0.015 6	5.521 2	−0.000 94	42	0.003 5

最后,评估期权定价模型在金融市场的适用性。选取中国股票市场中贵州茅台和长江电力股票为研究对象,以 2019 年 10 月 8 日至 2022 年 10 月 10 日期间的收盘价格为研究数据。贵州茅台和长江电力 2 家公司作为行业的龙头,其在中国股票市场中股票价格的波动性和市场影响力较大,因此被选作本研究的样本。由于 CIR 过程能够保证资产值大于 0,更符合真实市场表现,因此选用 CIR 过程。在参数估计的过程中,通过计算股票价格的均值和方差,确定长期均衡价格 $\gamma_i(t)$ 和波动率 $v_i(t)$ 的估计参数;将历史数据代入 CIR 模型,并通过最小二乘法拟合模型,得到均值回复速度 $k_i(t)$ 的估计参数。将得到的参数应用于 CIR 模型,使用蒙特卡罗模拟方法和本文的方法分别对这 2 种标的资产的看涨商期权定价。从表 4 可以看出,2 种方法的估计结果差异极小,但 HM 法用时明显较短。综上所述,HM 法在股票市场的定价表现良好。

表 4 股票实例定价结果($T=3$, $x_1=1\ 167.1$, $x_2=18.58$, $\gamma_1=1\ 705.396\ 417$, $\gamma_2=20.212\ 764$, $v_1=5.727\ 5$, $v_2=0.337\ 7$, $r=5\%$, $k_1=0.100\ 121$, $k_2=0.100\ 012$)

Table 4 The pricing results applied to stocks and exchange rates($T=3$, $x_1=1\ 167.1$, $x_2=18.58$, $\gamma_1=1\ 705.396\ 417$, $\gamma_2=20.212\ 764$, $v_1=5.727\ 5$, $v_2=0.337\ 7$, $r=5\%$, $k_1=0.100\ 121$, $k_2=0.100\ 012$)

K	HM 期权价格	HM 用时/s	MC 期权价格	MC SD	MC 用时/s	差异率/%
5	55.685 8	0.001 0	55.722 2	0.003 8	205	−0.065 3
7	53.964 3	0.000 2	53.922 1	0.003 2	352	0.078 3
9	52.242 9	0.000 1	52.224 8	0.003 6	215	0.034 7
11	50.521 5	0.000 6	50.559 2	0.004 0	251	−0.074 6
13	48.800 1	0.000 2	48.822 7	0.003 6	359	−0.046 3
15	47.078 7	0.000 2	47.052 0	0.003 4	365	0.056 7
17	45.357 3	0.000 1	45.398 2	0.004 3	125	−0.090 1
19	43.635 8	0.000 2	43.691 8	0.004 4	410	−0.128 2
21	41.914 4	0.000 1	41.899 6	0.004 1	381	0.035 3
23	40.193 0	0.000 1	40.215 9	0.003 0	485	−0.056 9

4 结语

利用 Hull-White 模型刻画资产价格,并利用矩匹配方法给商期权定价公式。数值模拟和实证检验结果表明:该定价模型具有一定的有效性、高效性和稳定性及金融市场的适用性,为投资者提供一种简洁有效的商期权定价方法,也为进一步研究更高维的期权拓展研究思路。

参考文献:

[1] 王波,朱顺伟,邓亚东,等. 4/2 随机波动率模型下的期权定价[J]. 系统管理学报, 2020, 29(1):192-198.
WANG Bo, ZHU Shunwei, DENG Yadong, et al. Options on S&P 500 index by fundamental transform approach: 4/2 stochastic volatility model[J].Journal of System Management, 2020, 29(1):192-198.

[2] SHI Chao. Asymptotic analysis of the Heston model and its statistical and financial applications[J]. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 2022, 38(6):1049-1060.

[3] SHI Z, ALFONZETTI S. Solving parametric volterra integral equation from distributed-order rough heston model and option pricing[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2022, 2022:1979003.

[4] ZHANG Qi, SONG Haiming, HAO Yongle. Semi-implicit FEM for the valuation of American options under the Heston model [J]. Computational and Applied Mathematics, 2022, 41(2):73.

[5] HULL J C, WHITE A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities[J]. The Journal of Finance, 1987, 42(2): 281-300.

[6] HULL J. An analysis of the bias in option pricing caused by a stochastic volatility[J]. Advances in Futures and Options Research, 1988, 3:29-61.

[7] LI Xun, WU Zhenyu. On an approximation method for pricing a high-dimensional basket option on assets with mean-reverting prices[J]. Computers & Operations Research, 2008, 35(1):76-89.

[8] YU Bo, ZHU Hongmei, WU Ping. The closed-form approximation to price basket options under stochastic interest rate[J]. Finance Research Letters, 2022, 46:102434.

[9] WU Ping, LIN Hui. Pricing of basket options by conditioning and moment matching[J]. The Journal of Derivatives, 2020, 28 (2):80-87.

[10] GAO Zhichao, WANG Xiaosheng, HA Mingyu. Multi-asset option pricing in an uncertain financial market with jump risk [J]. Journal of Uncertainty Analysis and Applications, 2016, 4(1):1.

[11] 李敬楠,刘会利. 随机利率下基于 O-U 过程的商期权定价[J]. 吉首大学学报(自然科学版),2022,43(2):23-30.
LI Jingnan, LIU Huili. Quotientoption pricing based on O-U process with stochastic interest rate[J]. Journal of Jishou University (Natural Sciences Edition), 2022, 43(2):23-30.

[12] ÖZSOY A U. Pricing and hedging of quotient options in İstanbul stock exchange[D]. Ankara: Middle East Technical University, 2016.

[13] BOS L P, WARE A F, PAVLOV B S. On a semi-spectral method for pricing an option on a mean-reverting asset[J]. Quantitative Finance, 2002, 2(5):337-345.

[14] HULL J C, WHITE A D. Numerical procedures for implementing term structure models I: single-factor models[J]. The Journal of Derivatives, 1994, 2(1):7-16.

[15] HULL J, WHITE A. Numerical procedures for implementing term structure models II: two-factor models[J]. Journal of Derivatives, 1994, 2(2):37-48.

[16] VASICEK O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2): 177-188.

[17] COX J C, INGERSOLL J E, ROSS S A. A re-examination of traditional hypotheses about the term structure of interest rates [J]. The Journal of Finance, 1981, 36(4):769-799.

[18] COX J C, INGERSOLL J E, ROSS S A. A theory of the term structure of interest rates[J]. Econometrica, 1985, 53(2): 385.

[19] ZHU Y L, WU X N, CHERN I L. Derivative securities and difference methods[M]. New York: Springer, 2004.

[20] SEYDEL R. Tools for computational finance[M]. 3rd ed. Berlin: Springer, 2006.

[21] BROADIE M, GLASSERMAN P. A stochastic mesh method for pricing high-dimensional American options[J]. Journal of Computational Finance, 2004, 7(4):35-72.

(编辑:李艺)

附录 A Hull-White 模型的一阶原点矩

Hull-White 模型的随机过程积分形式为

$$X_i(t)=X_i(0)+\int_0^t k_i(s)(\gamma_i(s)-X_i(s))\mathrm{d}s+\int_0^t v_i(s)X_i^{\beta}(s)\mathrm{d}W_i(s),$$

因此,

$$\begin{aligned}E[X_i(t)]&=E[X_i(0)]+E\int_0^t k_i(s)(\gamma_i(s)-X_i(s))\mathrm{d}s+E\int_0^t v_i(s)X_i^{\beta}(s)\mathrm{d}W_i(s)\\&=x_{i0}+E\left[\int_0^t k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{d}s\right]-E\left[\int_0^t k_i(s)X_i(s)\mathrm{d}s\right]。\end{aligned}$$

令 $\alpha_i(t)=EX_i(t)$,则

$$\alpha_i(t)=\alpha_i(0)+\int_0^t k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{d}s-\int_0^t k_i(s)\alpha_i(s)\mathrm{d}s。$$

对 t 求导,可得

$$\frac{\mathrm{d}[\alpha_i(t)]}{\mathrm{d}t}=k_i(t)\gamma_i(t)-k_i(t)\alpha_i(t),$$

可得

$$\alpha_i(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t k_i(s)\mathrm{d}s}\left(\int_0^t k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{e}^{\int_0^s k_i(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s+C\right),$$

将 $\alpha_i(0)=EX_i(0)=x_{i0}$代入可得 $C=x_{i0}$,故

$$E[X_i(t)]=\alpha_i(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t k_i(s)\mathrm{d}s}\left(\int_0^t k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{e}^{\int_0^s k_i(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s+x_{i0}\right)。$$

附录 B Hull-White 模型的二阶原点矩

根据伊藤公式,有

$$\begin{aligned}X_i^2(t)&=X_i^2(0)+\int_0^t 2X_i(s)\mathrm{d}X_i(s)+\int_0^t\frac{1}{2}\cdot 2\mathrm{d}\langle X_i(s),X_i(s)\rangle\\&=X_i^2(0)+\int_0^t 2X_i(s)[k_i(s)(\gamma_i(s)-X_i(s))\mathrm{d}s+v_i(s)X_i^{\beta}(s)\mathrm{d}W_i(s)]\\&\quad+\int_0^t v_i^2(s)X_i^{2\beta}(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

令 $\eta_i(t)=EX_i^2(t)$,则有

$$\eta_i(t)=\eta_i(0)+E\left[\int_0^t 2X_i(s)k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{d}s\right]-\int_0^t 2\eta_i(s)k_i(s)\mathrm{d}s+E\left[\int_0^t v_i^2(s)X_i^{2\beta}(s)\mathrm{d}s\right]。$$

VOU 过程中 $\beta=0$,则

$$\eta_i(t)=\eta_i(0)+\int_0^t 2\alpha_i(s)k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{d}s-\int_0^t 2\eta_i(s)k_i(s)\mathrm{d}s+\int_0^t v_i^2(s)\mathrm{d}s, \tag{21}$$

其中,$\alpha_i(s)=\mathrm{e}^{-\int_0^t k_i(s)\mathrm{d}s}\left(\int_0^t k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{e}^{\int_0^s k_i(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s+x_{i0}\right)$。式(21)对 t 求导,可得

$$\frac{\mathrm{d}[\eta_i(t)]}{\mathrm{d}t}=2\alpha_i(t)k_i(t)\gamma_i(t)-2\eta_i(t)k_i(t)+v_i^2(t),$$

可得

$$\eta_i(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t 2k_i(s)\mathrm{d}s}\left[\int_0^t\mathrm{e}^{\int_0^s 2k_i(u)\mathrm{d}u}(2\alpha_i(s)k_i(s)\gamma_i(s)+v_i^2(s))\mathrm{d}s+C\right]。$$

将 $\eta_i(0)=x_{i0}^2$代入,可得 $C=x_{i0}^2$,则有

$$E[X_i^{\ 2}(t)]=\eta_i(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t 2k_i(s)\mathrm{d}s}\int_0^t v_i^2(s)\mathrm{e}^{\int_0^s 2k_i(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{-\int_0^t 2k_i(s)\mathrm{d}s}\left(x_{i0}+\int_0^t k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{e}^{\int_0^s k_i(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\right)^2。$$

CIR 过程中 $\beta=\dfrac{1}{2}$,则

$$\eta_i(t)=\eta_i(0)+\int_0^t \alpha_i(s)\left[2k_i(s)\gamma_i(s)+v_i^2(s)\right]\mathrm{d}s-\int_0^t 2\eta_i(s)k_i(s)\mathrm{d}s, \tag{22}$$

其中,$\alpha_i(s)=\mathrm{e}^{-\int_0^t k_i(s)\mathrm{d}s}\left(\int_0^t k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{e}^{\int_0^s k_i(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s+x_{i0}\right)$。式(22)对 t 求导,可得

$$\frac{\mathrm{d}[\eta_i(t)]}{\mathrm{d}t}=\alpha_i(t)\left[2k_i(t)\gamma_i(t)+v_i^2(t)\right]-2\eta_i(t)k_i(t)。$$

可以得到

$$\eta_i(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t 2k_i(s)\mathrm{d}s}\left[\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^s 2k_i(u)\mathrm{d}u}\left(\alpha_i(s)\left[2k_i(t)\gamma_i(t)+v_i^2(t)\right]\right)\mathrm{d}s+C\right]。$$

将 $\eta_i(0)=x_{i0}^2$ 代入,可得 $C=x_{i0}^2$,则有

$$E\left[X_i^2(t)\right]=\eta_i(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t 2k_i(s)\mathrm{d}s}\int_0^t v_i^2(s)\left(x_{i0}+\int_0^s k_i(u)\gamma_i(u)\mathrm{e}^{\int_0^u k_i(v)\mathrm{d}v}\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{\int_0^s k_i(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s$$
$$+\mathrm{e}^{-\int_0^t 2k_i(s)\mathrm{d}s}\left(x_{i0}+\int_0^t k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{e}^{\int_0^s k_i(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\right)^2。$$

EOU 过程中 $\beta=1$,则

$$\eta_i(t)=\eta_i(0)+\int_0^t 2\alpha_i(s)k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{d}s+\int_0^t \eta_i(s)\left[v_i^2(s)-2k_i(s)\right]\mathrm{d}s, \tag{23}$$

其中,$\alpha_i(s)=\mathrm{e}^{-\int_0^t k_i(s)\mathrm{d}s}\left(\int_0^t k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{e}^{\int_0^s k_i(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s+x_{i0}\right)$。式(23)对 t 求导,可得

$$\frac{\mathrm{d}[\eta_i(t)]}{\mathrm{d}t}=2\alpha_i(t)k_i(t)\gamma_i(t)+\eta_i(t)\left[v_i^2(t)-2k_i(t)\right]。$$

可得

$$\eta_i(t)=\mathrm{e}^{\int_0^t\left[v_i^2(s)-2k_i(s)\right]\mathrm{d}s}\left[\int_0^t 2\mathrm{e}^{\int_0^s\left(2k_i(u)-v_i^2(u)\right)\mathrm{d}u}\alpha_i(s)k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{d}s+C\right]。$$

将 $\eta_i(0)=x_{i0}^2$ 代入,可得 $C=x_{i0}^2$,则有

$$E\left[X_i^2(t)\right]=\eta_i(t)=\mathrm{e}^{\int_0^t\left(v_i^2(s)-2k_i(s)\right)\mathrm{d}s}\int_0^t v_i^2(s)\left(x_{i0}+\int_0^s k_i(u)\gamma_i(u)\mathrm{e}^{\int_0^u k_i(v)\mathrm{d}v}\mathrm{d}u\right)^2\mathrm{e}^{-\int_0^s v_i^2(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s$$
$$+\mathrm{e}^{-\int_0^t 2k_i(s)\mathrm{d}s}\left(x_{i0}+\int_0^t k_i(s)\gamma_i(s)\mathrm{e}^{\int_0^s k_i(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\right)^2。$$