山东大学学报(理学版)2025 年 2 月 第 60 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.2, 2025
© 山东大学科技期刊社版权所有
E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2025)02-0114-13　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.518

四阶抛物问题基于降维格式的一种差分谱逼近

王军林,胡小平,安静*
(贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳 550025)

摘要:提出了球域上四阶抛物问题基于降维格式的一种差分谱逼近。将四阶抛物问题转化为球坐标系下的等价形式,利用 Laplace-Beltrami 算子的性质和球谐函数的正交性,进一步分解为一系列解耦的一维四阶抛物问题。基于每个一维四阶抛物问题,建立了其全离散格式,并且证明了全离散格式的稳定性和逼近解的误差估计。给出一些数值算例,数值结果表明差分谱逼近算法是稳定的和收敛的。

关键词:四阶抛物问题;降维;差分谱格式;稳定性及误差估计;球域
中图分类号:O241.82　　**文献标志码**:A
引用格式:王军林,胡小平,安静. 四阶抛物问题基于降维格式的一种差分谱逼近[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(2):114-126.

Differential spectral approximation based on a dimensionality reduction for the fourth-order parabolic problem

WANG Junlin, HU Xiaoping, AN Jing*
(School of Mathematical Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, Guizhou, China)

Abstract: This paper presents a differential spectral approximation for a fourth-order parabolic problem on a spherical domain based on a dimension reduction scheme. The fourth-order parabolic problem is transformed into an equivalent form in the spherical coordinates. By utilizing the properties of the Laplace-Beltrami operator and the orthogonality of the spherical harmonic functions, the problem is further decomposed into a series of decoupled one-dimensional fourth-order parabolic problems. Based on each one-dimensional fourth-order parabolic problem, its fully discrete scheme is established, and its stability and error estimation of the approximate solution are proved. Some numerical examples are given. The numerical results are shown that the differential spectral approximation algorithm is stable and convergent.

Key words: fourth-order parabolic problem; dimensionality reduction; differential spectral scheme; stability and error estimation; spherical domain

0　引言

抛物型方程有着重要的物理背景,在很多工程和科学领域都有着广泛的应用,如热传导过程、半导体材料中杂质的扩散现象[1-2]、复杂自然现象的模拟[3-5]。

关于抛物问题的理论分析和数值计算已有很多成果,如 Shen 等[6]对 Allen-Cahn 和 Cahn-Hilliard 方程提出了一种有效的数值格式,并给出了相应的稳定性分析和误差估计。Omrani[7]对一维 Kuramoto-Tsuzuki 方程提出了一种全离散的 Crank-Nicolson 格式,并讨论了该格式的存在性、唯一性和收敛性,此外,Wang 等[8]还对 Kuramoto-Tsuzuki 方程提出了阶率为 $o(\tau^2+h^2)$ 的有限差分格式。Zhao 等[9]对二维非线性空间分数阶薛定谔方程提出了一种四阶紧致 ADI 格式。对梯度流问题,文献[10-11]提出了一种无条件稳定的标

收稿日期:2023-12-12; **网络出版时间**:2024-11-22 11:38:05
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11661022,12061023)
第一作者:王军林(1998—),男,硕士研究生,研究方向为偏微分方程数值解. E-mail:1617022647@qq.com
* **通信作者**:安静(1979—),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为偏微分方程数值解. E-mail:aj154@163.com

量辅助变量方法,即 SAV 方法。

众所周知,很多复杂的非线性抛物问题最终都归结为求解一系列的线性抛物问题,如 Cahn-Hilliard 方程[12-13],然而,对于一些特殊区域(如圆域、球域)上的四阶抛物问题,不仅基函数构造复杂,而且自由度也很大,区域边界近似会带来误差,需要大量的计算时间和内存容量才能获得较高精度的数值解。安静等[14]提出了球域上基于降维格式的四阶 Steklov 特征值问题的一种有效的有限元法;文献[15-16]中提出了圆域上二阶椭圆方程及其特征值问题的谱方法。关于球域上基于降维格式的四阶抛物问题的差分谱方法少有报道,主要原因是球坐标变换引入了奇性和变系数[17-19],给稳定性分析和误差估计都带来了一定的困难。

本文提出球域上基于降维格式的四阶抛物问题的一种差分谱逼近,可将原问题转化为球坐标系下的等价形式,利用 Laplace-Beltram 算子的性质和球谐函数的正交性,进一步将原问题分解为一系列解耦的一维四阶抛物问题。基于每个一维四阶抛物问题,建立一种有效的全离散格式,并证明该格式的稳定性和逼近解的误差估计。最后,本文给出数值算例,数值结果表明算法的稳定性和收敛性。

1　降维及其离散格式

1.1　降维格式

本文考虑如下的四阶抛物问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\Delta^2 u+\alpha\Delta u-\beta u+g,\ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega\times(0,T],\tag{1}$$

$$u=\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=0,\ (\boldsymbol{x},t)\in\partial\Omega\times(0,T],\tag{2}$$

$$u(\boldsymbol{x},0)=\varphi(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\tag{3}$$

其中 $u=u(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, $\Omega=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3:0\leqslant r<R\}$, R、T 为变量, α、β 为非负的常数,$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界,Δ 为拉普拉斯算子,$\boldsymbol{n}$ 为$\partial\Omega$ 的单位外法向量。令 $x_1=r\sin\theta\cos\phi$, $\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{r}\sin\theta\sin\phi$, $x_3=r\cos\theta$,则拉普拉斯算子在球坐标下的等价形式为

$$L=\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)+\frac{1}{r^2}\Delta_s,\tag{4}$$

其中

$$\Delta_s=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

为 Laplace-Beltrami 算子,则式(1)—(3)在球坐标系下的等价形式可表述为:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-L^2\psi+\alpha L\psi-\beta\psi+f,\quad (r,\theta,\phi,t)\in\boldsymbol{D}\times(0,T],\tag{5}$$

$$\psi(R,\theta,\phi,t)=\frac{\partial\psi}{\partial r}(R,\theta,\phi,t)=0,\quad (\theta,\phi,t)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]\times(0,T],\tag{6}$$

$$\psi(r,\theta,\phi,0)=\hat{\varphi}(r,\theta,\phi),\quad (r,\theta,\phi)\in\boldsymbol{D},\tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{D}=[0,R)\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$, $\psi(r,\theta,\phi,t)=u(\boldsymbol{x},t)$, $f(r,\theta,\phi,t)=g(\boldsymbol{x},t)$, $\hat{\varphi}(r,\theta,\phi)=\varphi(\boldsymbol{x})$。利用球谐函数展开,得

$$(\psi,f,\hat{\varphi})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{|m|=0}^{l}[\hat{\psi}_l^m(r,t),\hat{f}_l^m(r,t),\hat{\varphi}_l^m(r)]Y_l^m(\theta,\phi)。\tag{8}$$

由文献[20]知,球谐函数$\{Y_l^m\}$为 Δ_s 的特征函数,即

$$\Delta_s Y_l^m=-l(l+1)Y_l^m,\quad l\geqslant 0,\quad |m|\leqslant l。\tag{9}$$

将 ψ 的球谐函数展开式代入式(4),得

$$L\psi=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{|m|=0}^{l}\frac{1}{r^2}(\partial_r(r^2\partial_r\hat{\psi}_l^m)-l(l+1)\hat{\psi}_l^m)Y_l^m。$$

为了避免球坐标变换带来的奇性, $\hat{\psi}_l^m$ 应当满足本质极条件

$$l(l+1)\hat{\psi}_l^m|_{r=0}=\lim_{r\to 0} l(l+1)\hat{\psi}_l^m=0,$$

即

$$l(l+1)\hat{\psi}_l^m(0,t)=0。\tag{10}$$

令

$$r=\frac{z+1}{2}R,\quad u_l^m(z,t)=\hat{\psi}_l^m(r,t),$$

$$q_l^m(z,t)=\hat{f}_l^m(r,t),\quad \varphi_l^m(z,t)=\hat{\varphi}_l^m(r,t),$$

定义微分算子为

$$\mathscr{L}_l u_l^m=\frac{1}{(z+1)^2}\partial_z((z+1)^2\partial_z u_l^m)-\frac{l(l+1)}{(z+1)^2}u_l^m,\tag{11}$$

将式(8)、(9)代入式(5)—(7),利用球谐函数的正交性,式(5)—(7)可分解为如下一系列解耦的一维四阶抛物问题:

$$\frac{\partial u_l^m}{\partial t}=-\frac{16}{R^4}\mathscr{L}_l^2 u_l^m+\alpha\frac{4}{R^2}\mathscr{L}_l u_l^m-\beta u_l^m+q_l^m,\quad (z,t)\in(-1,1)\times(0,T],\tag{12}$$

$$l(l+1)u_l^m(-1,t)=u_l^m(1,t)=\partial_z u_l^m(1,t)=0,\tag{13}$$

$$u_l^m(z,0)=\varphi_l^m(z)。\tag{14}$$

注 $l(l+1)u_l^m(-1,t)=0$ 是一个本质极条件,它避免了球坐标变换带来的奇性。

1.2 时间方向的一阶差分格式

记 $u_l=u_l^m(z,t)$, $q_l=q_l^m(z,t)$, $\varphi_l=\varphi_l^m(z)$,令 $u_l^{n+1}(z)\approx u_l^m(z,t_{n+1})$, $q_l^{n+1}(z)=q_l^m(z,t_{n+1})$, $t_n=n\tau(n=0,1,\cdots,L)$, $\tau=T/L$ 为时间步长增量,则式(12)—(14)在时间方向上的一阶差分格式为:

$$\frac{u_l^{n+1}(z)-u_l^n(z)}{\tau}=-\frac{16}{R^4}\mathscr{L}_l^2 u_l^{n+1}(z)+\alpha\frac{4}{R^2}\mathscr{L}_l u_l^{n+1}(z)-\beta u_l^{n+1}(z)+q_l^{n+1}(z),\tag{15}$$

$$l(l+1)u_l^{n+1}(-1)=u_l^{n+1}(1)=\partial_z u_l^{n+1}(1)=0,\tag{16}$$

$$u_l^0(z)=\varphi_l(z)。\tag{17}$$

1.3 全离散格式

令 $\omega=(z+1)^2$, $z\in I=(-1,1)$ 是一个权函数,定义带权 Sobolev 空间为

$$L_\omega^2(I):=\left\{p:\int_I \omega p^2\mathrm{d}z<\infty\right\},$$

$$H_{0,\omega,l}^2(I):=\{u_l:\mathscr{L}_l u_l\in L_\omega^2(I),\ l(l+1)u_l(-1)=u_l(1)=\partial_z u_l(1)=0\},$$

相应的内积和范数分别为

$$(p,q)_\omega=\int_I \omega pq\mathrm{d}z,\quad \|p\|_\omega=(p,p)_\omega^{\frac{1}{2}};$$

$$(u_l,v_l)_{2,\omega,l}=\int_I \omega\mathscr{L}_l u_l\mathscr{L}_l v_l\mathrm{d}z,\quad \|u_l\|_{2,\omega,l}=(u_l,u_l)_{2,\omega,l}^{\frac{1}{2}}。$$

利用分部积分、极条件及边界条件,式(15)—(17)的变分形式为:找 $u_l^{n+1}\in H_{0,\omega,l}^2(I)$,使得

$$A_l(u_l^{n+1},v_l)=F_l(v_l),\quad \forall v_l\in H_{0,\omega,l}^2,\tag{18}$$

其中

$$A_l(u_l^{n+1},v_l)=\frac{16\tau}{R^4}\int_I (z+1)^2\mathscr{L}_l u_l^{n+1}\mathscr{L}_l v_l\mathrm{d}z+\frac{4\alpha\tau}{R^2}\int_I (z+1)^2\partial_z u_l^{n+1}\partial_z v_l\mathrm{d}z$$

$$+\frac{4\alpha\tau}{R^2}\int_I l(l+1)u_l^{n+1}v_l\mathrm{d}z+(1+\tau\beta)\int_I (z+1)^2 u_l^{n+1}v_l\mathrm{d}z,$$

$$F_l(v_l)=\int_I (z+1)^2(u_l^n+\tau q_l^{n+1})v_l\mathrm{d}z。$$

设 P_N 是一个 N 次多项式空间,定义逼近空间为 $X_N(l)=P_N\cap H_{0,\omega,l}^2(I)$,则变分形式(18)的离散格式为:找 $u_{lN}^{n+1}\in X_N(l)$,使得

$$A_l(u_{lN}^{n+1},v_{lN})=F_l(v_{lN}),\quad \forall v_{lN}\in X_N(l)。\tag{19}$$

2　稳定性分析

2.1　连续能量的稳定性

定理 1　设 $\forall u_l\in H_{0,\omega,l}^2(I)$,$u_l$ 为式(12)—(14)的解,则下列能量估计式成立:

$$\int_{-1}^{1}(z+1)^2u_l^2\mathrm{d}z+\frac{32}{R^4}\int_0^t\int_{-1}^{1}(z+1)^2(\mathscr{L}_lu_l)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant\int_{-1}^{1}(z+1)^2\varphi_l^2\mathrm{d}z+\frac{R^2}{12\alpha+2\beta R^2}\int_0^t\int_{-1}^{1}(z+1)^2q_l^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t。$$

证明　将式(12)两边同时乘以 u_l,并对时间 t 进行积分得

$$u_l^2(z,t)-\varphi_l^2=-\frac{32}{R^4}\int_0^t(\mathscr{L}_l^2u_l)u_l\mathrm{d}t+\alpha\frac{8}{R^2}\int_0^t(\mathscr{L}_lu_l)u_l\mathrm{d}t-2\beta\int_0^tu_l^2\mathrm{d}t+2\int_0^tq_lu_l\mathrm{d}t。\tag{20}$$

将式(20)两边乘$(z+1)^2$,并对 z 积分得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}(z+1)^2u_l^2\mathrm{d}z+\frac{32}{R^4}\int_0^t\int_{-1}^{1}(z+1)^2(L_lu_l)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\\=&-\alpha\frac{8}{R^2}\int_0^t\int_{-1}^{1}(z+1)^2(\partial_zu_l)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t-\alpha\frac{8}{R^2}\int_0^t\int_{-1}^{1}l(l+1)u_l^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\\&-2\beta\int_0^t\int_{-1}^{1}(z+1)^2u_l^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t+2\int_0^t\int_{-1}^{1}(z+1)^2q_lu_l\mathrm{d}z\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}(z+1)^2\varphi_l^2\mathrm{d}z。\end{aligned}$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式及 Young 不等式,有

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}(z+1)^2u_l^2\mathrm{d}z+\frac{32}{R^4}\int_0^t\int_{-1}^{1}(z+1)^2(L_lu_l)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\\\leqslant&-\alpha\frac{8}{R^2}\int_0^t\int_{-1}^{1}(z+1)^2(\partial_zu_l)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t-\alpha\frac{8}{R^2}\int_0^t\int_{-1}^{1}l(l+1)u_l^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\\&-2\beta\int_0^t\int_{-1}^{1}(z+1)^2u_l^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t+\frac{R^2}{12\alpha+2\beta R^2}\int_0^t\int_{-1}^{1}(z+1)^2q_l^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\\&+\frac{12\alpha+2\beta R^2}{R^2}\int_0^t\int_{-1}^{1}(z+1)^2u_l^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}(z+1)^2\varphi_l^2\mathrm{d}z。\end{aligned}\tag{21}$$

根据文献[21]中的引理 2,有

$$\int_0^t\int_{-1}^{1}(z+1)^2u_l^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant\frac{2}{3}\int_0^t\int_{-1}^{1}(z+1)^2(\partial_zu_l)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t。\tag{22}$$

将式(22)代入式(21)可证定理 1 成立。

2.2　离散格式能量的稳定性

本小节给出式(15)—(17)的能量稳定性分析。

定理 2　设 $0<\tau\leqslant2$, $u_l^{n+1}\in H_{0,\omega,l}^2(I)$,则下列能量估计式成立:

$$E(u_l^{n+1})\leqslant E(\varphi_l)+\frac{T}{2}\max_{t\in(0,T]}\|q_l\|_\omega^2,$$

其中

$$E(u_l^n)=\frac{8\tau}{R^4}\|\mathscr{L}_lu_l^n\|_\omega^2+\alpha\frac{2\tau}{R^2}\|\partial_zu_l^n\|_\omega^2+\alpha\frac{2\tau l(l+1)}{R^2}\|u_l^n\|^2+\frac{\tau\beta}{2}\|u_l^n\|_\omega^2。$$

证明　将式(15)两边乘 $\tau(z+1)^2\psi_l^{n+1}$,并对 z 积分,得

$$\begin{aligned}(u_l^{n+1}-u_l^n,\psi_l^{n+1})_\omega=&-\frac{16\tau}{R^4}(\mathscr{L}_lu_l^{n+1},\mathscr{L}_l\psi_l^{n+1})_\omega-\alpha\frac{4\tau}{R^2}(\partial_zu_l^{n+1},\partial_z\psi_l^{n+1})_\omega\\&-\alpha\frac{4\tau l(l+1)}{R^2}(u_l^{n+1},\psi_l^{n+1})-\tau\beta(u_l^{n+1},\psi_l^{n+1})_\omega+\tau(q_l^{n+1},\psi_l^{n+1})_\omega。\end{aligned}\tag{23}$$

在式(23)中取 $\psi_l^{n+1}=u_l^{n+1}-u_l^n$,由恒等式

$$(2a,a-b)=|a|^2-|b|^2+|a-b|^2, \tag{24}$$

得

$$\begin{aligned}\|u_l^{n+1}-u_l^n\|_\omega^2=&-\frac{8\tau}{R^4}(\|\mathscr{L}_l u_l^{n+1}\|_\omega^2-\|\mathscr{L}_l u_l^n\|_\omega^2+\|\mathscr{L}_l(u_l^{n+1}-u_l^n)\|_\omega^2)\\&-\alpha\frac{2\tau}{R^2}(\|\partial_z u_l^{n+1}\|_\omega^2-\|\partial_z u_l^n\|_\omega^2+\|\partial_z(u_l^{n+1}-u_l^n)\|_\omega^2)\\&-\alpha\frac{2\tau l(l+1)}{R^2}(\|u_l^{n+1}\|^2-\|u_l^n\|^2+\|u_l^{n+1}-u_l^n\|^2)\\&-\frac{\tau\beta}{2}(\|u_l^{n+1}\|_\omega^2-\|u_l^n\|_\omega^2+\|u_l^{n+1}-u_l^n\|_\omega^2)+\tau(q_l^{n+1},u_l^{n+1}-u_l^n)_\omega。\end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式及 Young 不等式得

$$\begin{aligned}&(1-\frac{\tau}{2})\|u_l^{n+1}-u_l^n\|_\omega^2+\frac{8\tau}{R^4}\|\mathscr{L}_l u_l^{n+1}\|_\omega^2+\alpha\frac{2\tau}{R^2}\|\partial_z u_l^{n+1}\|_\omega^2+\alpha\frac{2\tau l(l+1)}{R^2}\|u_l^{n+1}\|^2+\frac{\tau\beta}{2}\|u_l^{n+1}\|_\omega^2\\\leqslant&\frac{8\tau}{R^4}\|\mathscr{L}_l u_l^n\|_\omega^2+\alpha\frac{2\tau}{R^2}\|\partial_z u_l^n\|_\omega^2+\alpha\frac{2\tau l(l+1)}{R^2}\|u_l^n\|^2+\frac{\tau\beta}{2}\|u_l^n\|_\omega^2+\frac{\tau}{2}\|q_l^{n+1}\|_\omega^2,\end{aligned}$$

即 $E(u_l^{n+1})\leqslant E(u_l^n)+\frac{\tau}{2}\|q_l^{n+1}\|_\omega^2$。由递推关系及初始条件可知定理 2 成立。

3 解的存在唯一性与误差估计

为了表述方便, $a\lesssim b$ 表示 $a\leqslant cb$,其中 c 为正的常数。

3.1 解的存在唯一性

引理 1[21] 对 $\forall u_l,\ v_l\in H_{0,\omega,l}^2(I)$,下列等式成立:

$$\begin{aligned}\int_I(z+1)^2\mathscr{L}_l u_l\mathscr{L}_l v_l\mathrm{d}z=&\int_I(z+1)^2\partial_z^2u_l\partial_z^2v_l\mathrm{d}z+2(l^2+l+1)\int_I\partial_z u_l\partial_z v_l\mathrm{d}z\\&+l(l+1)(l^2+l-2)\int_I\frac{1}{(z+1)^2}u_lv_l\mathrm{d}z。\end{aligned}$$

引理 2[21] 对 $\forall\ u_l\in H_{0,\omega,l}^2(I)$,下列不等式成立:

$$\int_{-1}^1(z+1)^2u_l^2\mathrm{d}z\lesssim\int_{-1}^1(z+1)^2(\partial_z u_l)^2+l(l+1)u_l^2\mathrm{d}z,$$

$$\int_{-1}^1(z+1)^2(\partial_z u_l)^2+l(l+1)u_l^2\mathrm{d}z\lesssim\int_{-1}^1(z+1)^2(\mathscr{L}_l u_l)^2\mathrm{d}z。$$

引理 3 $A_l(u_l^{n+1},v_l)$是定义在 $H_{0,\omega,l}^2(I)\times H_{0,\omega,l}^2(I)$上的连续正定的双线性形式,即

$$|A_l(u_l^{n+1},v_l)|\lesssim\|u_l^{n+1}\|_{2,\omega,l}\|v_l\|_{2,\omega,l},\quad A_l(u_l^{n+1},u_l^{n+1})\gtrsim\|u_l^{n+1}\|_{2,\omega,l}^2。$$

证明 根据引理 1、2 及 Cauchy-Schwarz 不等式,一方面,

$$\begin{aligned}|A_l(u_l^{n+1},v_l)|\lesssim&\int_I(z+1)^2|\mathscr{L}_l u_l^{n+1}\mathscr{L}_l v_l|\mathrm{d}z+\int_I l(l+1)|u_l^{n+1}v_l|\mathrm{d}z\\&+\int_I(z+1)^2|\partial_z u_l^{n+1}\partial_z v_l|\mathrm{d}z+\int_I(z+1)^2|u_l^{n+1}v_l|\mathrm{d}z\\\lesssim&\left[\int_I(z+1)^2(\mathscr{L}_l u_l^{n+1})^2+l(l+1)(u_l^{n+1})^2+(z+1)^2(\partial_z u_l^{n+1})^2+(z+1)^2(u_l^{n+1})^2\mathrm{d}z\right]^{\frac{1}{2}}\\&\times\left[\int_I(z+1)^2(\mathscr{L}_l v_l)^2+l(l+1)(v_l)^2+(z+1)^2(\partial_z v_l)^2+(z+1)^2(v_l)^2\mathrm{d}z\right]^{\frac{1}{2}}\\\lesssim&\left[\int_I(z+1)^2(\mathscr{L}_l u_l^{n+1})^2\mathrm{d}z\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_I(z+1)^2(\mathscr{L}_l v_l)^2\mathrm{d}z\right]^{\frac{1}{2}}=\|u_l^{n+1}\|_{2,\omega,l}\|v_l\|_{2,\omega,l};\end{aligned}$$

另一方面,

$$A_l(u_l^{n+1},u_l^{n+1})=\frac{16\tau}{R^4}\int_I(z+1)^2(\mathscr{L}_l u_l^{n+1})^2\mathrm{d}z+\tau\alpha\frac{4}{R^2}\int_I(z+1)^2(\partial_z u_l^{n+1})^2\mathrm{d}z$$
$$+\tau\alpha\frac{4}{R^2}\int_I l(l+1)(u_l^{n+1})^2\mathrm{d}z+(1+\tau\beta)\int_I(z+1)^2(u_l^{n+1})^2\mathrm{d}z$$
$$\gtrsim\int_I(z+1)^2(\mathscr{L}_l u_l^{n+1})^2\mathrm{d}z=\|u_l^{n+1}\|_{2,\omega,l}^2。$$

证毕。

定理 3　若$q_l^{n+1}(z)\in L_\omega^2(I)$,则变分形式(18)、(19)分别存在唯一解 $u_l^{n+1}(z)\in H_{0,\omega,l}^2(I)$, $u_{lN}^{n+1}(z)\in X_N(l)$。

证明　根据 Cauchy-Schwarz 不等式、引理 2 及定理 2,有

$$|F_l(v_l)|=\left|\int_I(z+1)^2(u_l^n+\tau q_l^{n+1})v_l\mathrm{d}z\right|$$
$$\leqslant\left(\int_I(z+1)^2(u_l^n+\tau q_l^{n+1})^2\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_I(z+1)^2(v_l)^2\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\lesssim\left[\int_I(z+1)^2(u_l^n)^2\mathrm{d}z+\int_I(z+1)^2(q_l^{n+1})^2\mathrm{d}z\right]^{\frac{1}{2}}\left(\int_I(z+1)^2(v_l)^2\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\lesssim[E(u_l^n)+\|q_l^{n+1}\|_\omega^2]^{\frac{1}{2}}\|v_l\|_\omega\lesssim\|v_l\|_{2,\omega,l},$$

即 $F_l(v_l)$是定义在 $H_{0,\omega,l}^2(I)$上的有界线性泛函。由引理 3 和 Lax-Milgram 引理可知结论成立。

3.2　误差分析

令 $\omega^{\alpha,\beta}=(1-z)^\alpha(1+z)^\beta$ 是一个 Jacobi 权函数,定义非一致带权 Sobolev 空间

$$H_{\omega^{\alpha,\beta},*}^s(I):=\{p:\partial_z^k p\in L_{\omega^{\alpha+k,\beta+k}}^2,\ 0\leqslant k\leqslant s\},$$

相应的内积和范数分别为:

$$(p,q)_{s,\omega^{\alpha,\beta},*}=\sum_{k=0}^s(\partial_z^k p,\partial_z^k q)_{\omega^{\alpha+k,\beta+k}},\quad \|p\|_{s,\omega^{\alpha,\beta},*}=\sqrt{(p,p)_{s,\omega^{\alpha,\beta},*}}。$$

进一步地,定义非一致带权 Sobolev 空间

$$H_{\omega^{-2,-2},l}^s(I):=\{p\in H_{0,\omega,l}^2(I):\partial_z^k p\in L_{\omega^{-2+k,-2+k}}^2,\ 2\leqslant k\leqslant s\},$$

相应的内积和范数分别为:

$$(p,q)_{s,\omega^{-2,-2},l}=(p,q)_{2,\omega,l}+\sum_{k=1}^s(\partial_z^k p,\partial_z^k q)_{\omega^{-2+k,-2+k}},\quad \|p\|_{s,\omega^{-2,-2},l}=\sqrt{(p,p)_{s,\omega^{-2,-2},l}}。$$

定义正交投影算子$\Pi_{N,\omega^{-2,-2}}:L_{\omega^{-2,-2}}^2(I)\to Q_N$,使得

$$(p-\Pi_{N,\omega^{-2,-2}}p,q_N)_{\omega^{-2,-2}}=0,\quad \forall q_N\in Q_N:=\{q\in P_N:\partial_z^k q(\pm1)=0,\ k=0,1\}。$$

根据文献[21]中的定理 5、6 和文献[22]中的定理 1.8.2,有下面的引理。

引理 4　对$\forall p\in H_{\omega^{-2,-2},*}^s(I)$,则下列不等式成立:

$$\|\partial_z^2(\Pi_{N,\omega^{-2,-2}}p-p)\|\lesssim N^{2-s}\|\partial_z^s p\|_{\omega^{-2+s,-2+s}}。\tag{25}$$

引理 5　对 $l=0,1$,存在一个投影算子$\Pi_N^{2,l}:H_{0,\omega,l}^2(I)\to X_N(l)$使得 $\Pi_N^{2,l}p(\pm1)=p(\pm1)$, $\partial_z\Pi_N^{2,l}p(\pm1)=\partial_z p(\pm1)$,当 $s\geqslant2$ 时,对$\forall p(z)\in H_{\omega^{-2,-2},l}^s(I)$,下列不等式成立:

$$\|\partial_z^2(\Pi_N^{2,l}p(z)-p(z))\|\lesssim N^{2-s}(\|\partial_z^s p(z)\|_{\omega^{-2+s,-2+s}}+\|\partial_z^2 p(z)\|)。\tag{26}$$

下面给出全离散格式的误差估计。

定理 4　对$\forall u_l(z,t_k)\in H_{\omega^{-2,-2},l}^s(I)$, $s\geqslant2$ 时,全离散格式(19)满足能量估计式

$$E(u_{lN}^{n+1})\leqslant E(\varphi_{lN})+\frac{T}{2}\max_{t\in(0,T]}\|q_{lN}\|_\omega^2$$

及误差估计式

$$\|u_l(z,t_k)-u_{lN}^k\|_\omega\lesssim(\tau+N^{2-s})\left[\left(\int_0^T\|\partial_t^2 u_l\|_{2,\omega,l}^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{T}\max_{t\in(0,T]}(\|\partial_z^s u_l\|_{\omega^{-2+s,-2+s}}+\|\partial_z^2 u_l\|)\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^T(\|\partial_z^s(\partial_t u_l)\|_{\omega^{-2+s,-2+s}}+\|\partial_z^2(\partial_t u_l)\|)^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\right]\exp\left(\frac{2T+2\tau}{1-2\tau}\right),\tag{27}$$

$$\left(\tau\sum_{k=0}^{M}\|u_l(z,t_k)-u_{lN}^k\|_\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lesssim(\tau+N^{2-s})\left[\sqrt{T}\left(\int_0^T\|\partial_t^2u_l\|_{2,\omega,l}^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}+T\max_{t\in(0,T]}(\|\partial_z^su_l\|_{\omega^{-2+s,-2+s}}+\|\partial_z^2u_l\|)\right.$$

$$\left.+\sqrt{T}\left(\int_0^T(\|\partial_z^s(\partial_tu_l)\|_{\omega^{-2+s,-2+s}}+\|\partial_z^2(\partial_tu_l)\|)^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\right]\exp\left(\frac{2T+2\tau}{1-2\tau}\right)。\tag{28}$$

证明 显然。由于定理 2 的证明对于全离散格式(19)也是有效的,因此仅对式(27)、(28)给出证明。记

$$\begin{aligned}
&\hat{e}_N^{n+1}=u_l(z,t_{n+1})-\Pi_N^{2,l}u_l(z,t_{n+1}),\\
&\tilde{e}_N^{n+1}=\Pi_N^{2,l}u_l(z,t_{n+1})-u_{lN}^{n+1}(z),\\
&e_N^{n+1}=u_l(z,t_{n+1})-u_{lN}^{n+1}(z),\\
&R^{n+1}=\frac{u_l(z,t_{n+1})-u_l(z,t_n)}{\tau}-\partial_tu_l(z,t_{n+1})。
\end{aligned}\tag{29}$$

由式(22)和 Cauchy-Schwarz 不等式,得

$$\begin{aligned}
\|R^{n+1}\|_\omega^2&=\int_I(z+1)^2\frac{1}{\tau^2}\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}}(t-t_n)\partial_t^2u_l\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}z\\
&\leqslant\frac{1}{\tau^2}\int_I(z+1)^2\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}}(t-t_n)^2\mathrm{d}t\int_{t_n}^{t_{n+1}}(\partial_t^2u_l)^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}z\\
&\leqslant\frac{\tau}{3}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_I(z+1)^2(\partial_t^2u_l)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\leqslant\frac{2\tau}{9}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_I(z+1)^2(\partial_zu_l)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}t\\
&\leqslant\frac{2\tau}{9}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\partial_z\partial_t^2u_l\|_{2,\omega,l}^2\mathrm{d}t。
\end{aligned}$$

将式(12)两边乘以$(z+1)^2\psi_{lN}$,并对 z 积分得

$$\begin{aligned}
&(\partial_tu_l(z,t_{n+1}),\psi_{lN})_\omega+\frac{16}{R^4}(\mathscr{L}_lu_l(z,t_{n+1}),\mathscr{L}_1\Psi_{lN})_\omega-\alpha\frac{4}{R^2}(\mathscr{L}_lu_l(z,t_{n+1}),\psi_{lN})_\omega\\
&+\beta(u_l(z,t_{n+1},\psi_{lN})_\omega-(q_l^{n+1},\psi_{lN})_\omega=0,\qquad\forall\psi_{lN}\in X_N(l)。
\end{aligned}\tag{30}$$

取式(19)中 $v_{lN}=\psi_{lN}$,得

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{u_{lN}^{n+1}-u_{lN}^n}{\tau},\psi_{lN}\right)_\omega+\frac{16}{R^4}(\mathscr{L}_lu_{lN}^{n+1},\mathscr{L}_l\psi_{lN})_\omega-\alpha\frac{4}{R^2}(\mathscr{L}_lu_{lN}^{n+1},\psi_{lN})_\omega\\
&+\beta(u_{lN}^{n+1},\psi_{lN})_\omega-(q_{lN}^{n+1},\psi_{lN})_\omega=0,\qquad\forall\psi_{lN}\in X_N(l)。
\end{aligned}\tag{31}$$

由式(30)—(31)得

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_tu_l(z,t_{n+1})-\frac{u_{lN}^{n+1}-u_{lN}^n}{\tau},\psi_{lN}\right)_\omega+\frac{16}{R^4}(\mathscr{L}_l(u_l(z,t_{n+1})-u_{lN}^{n+1}),\mathscr{L}_l\psi_{lN})_\omega\\
&+\alpha\frac{4}{R^2}(\partial_z(u_l(z,t_{n+1})-u_{n+1\,lN}),\partial_z\psi_{lN})_\omega+\alpha\frac{4l(l+1)}{R^2}(u_l(z,t_{n+1})-u_{lN}^{n+1},\psi_{lN})\\
&+\beta(u_l(z,t_{n+1})-u_{lN}^{n+1},\psi_{lN})_\omega=0,\qquad\forall\psi_{lN}\in X_N(l)。
\end{aligned}$$

由式(29)得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}(\tilde{e}_N^{n+1}-\tilde{e}_N^n,\psi_{lN})_\omega+\frac{16}{R^4}(\mathscr{L}_l(\tilde{e}_N^{n+1}+\hat{e}_N^{n+1}),\mathscr{L}_1\psi_{lN})_\omega+\frac{4\alpha}{R^2}(\partial_z\tilde{e}_N^{n+1}+\partial_z\hat{e}_N^{n+1},\partial_z\psi_{lN})_\omega\\
&+\frac{4\alpha l(l+1)}{R^2}(\tilde{e}_N^{n+1}+\hat{e}_N^{n+1},\psi_{lN})+\beta(\tilde{e}_N^{n+1}+\hat{e}_N^{n+1},\psi_{lN})_\omega\\
&=(R^{n+1},\psi_{lN})_\omega+\frac{1}{\tau}((\Pi_N^{2,l}-I)(u_l(z,t_{n+1})-u_l(z,t_n)),\psi_{lN})_\omega。
\end{aligned}$$

取 $\psi_{lN}=2\tau\tilde{e}_N^{n+1}$,由式(24)得

$$\|\tilde{e}_N^{n+1}\|_\omega^2-\|\tilde{e}_N^n\|_\omega^2+\frac{16\tau}{R^4}(\|\mathscr{L}_l\tilde{e}_N^{n+1}\|_\omega^2-\|\mathscr{L}_l\hat{e}_N^{n+1}\|_\omega^2+\|\mathscr{L}_l(\tilde{e}_N^{n+1}+\hat{e}_N^{n+1})\|_\omega^2)$$

$$+\frac{4\alpha\tau}{R^2}(\|\partial_z\tilde{e}_N^{n+1}\|_\omega^2-\|\partial_z\hat{e}_N^{n+1}\|_\omega^2+\|\partial_z\tilde{e}_N^{n+1}+\partial_z\hat{e}_N^{n+1}\|_\omega^2)$$

$$+\frac{4\alpha\tau l(l+1)}{R^2}(\|\tilde{e}_N^{n+1}\|^2-\|\hat{e}_N^{n+1}\|^2+\|\tilde{e}_N^{n+1}+\hat{e}_N^{n+1}\|^2)$$

$$+\tau\beta(\|\tilde{e}_N^{n+1}\|_\omega^2-\|\hat{e}_N^{n+1}\|_\omega^2+\|\tilde{e}_N^{n+1}+\hat{e}_N^{n+1}\|_\omega^2)+\|\tilde{e}_N^{n+1}-\tilde{e}_N^n\|_\omega^2$$

$$=2\tau(R^{n+1},\tilde{e}_N^{n+1})_\omega+2((\Pi_N^{2,l}-I)(u_l(z,t_{n+1})-u_l(z,t_n)),\tilde{e}_N^{n+1})_\omega。$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式及 Young 不等式,有

$$\|\tilde{e}_N^{n+1}\|_\omega^2-\|\tilde{e}_N^n\|_\omega^2+\frac{16\tau}{R^4}\|\mathscr{L}_l\tilde{e}_N^{n+1}\|_\omega^2+\frac{4\tau\alpha}{R^2}\|\partial_z\tilde{e}_N^{n+1}\|_\omega^2+\frac{4\alpha\tau l(l+1)}{R^2}\|\tilde{e}_N^{n+1}\|^2+\tau\beta\|\tilde{e}_N^{n+1}\|_\omega^2$$

$$\leqslant\tau\|R^{n+1}\|_\omega^2+2\tau\|\tilde{e}_N^{n+1}\|_\omega^2+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|(\Pi_N^{2,l}-I)\partial_t u_l\|_\omega^2\mathrm{d}t$$

$$+\frac{16\tau}{R^4}\|\mathscr{L}_l\hat{e}_N^{n+1}\|_\omega^2+\frac{4\tau\alpha}{R^2}\|\partial_z\hat{e}_N^{n+1}\|_\omega^2+\frac{4\alpha\tau l(l+1)}{R^2}\|\hat{e}_N^{n+1}\|^2+\tau\beta\|\hat{e}_N^{n+1}\|_\omega^2。\tag{32}$$

由引理 1 及 Hardy 不等式(参见文献[23]中的 B8.8)得

$$\|\mathscr{L}_l\hat{e}_N^{n+1}\|_\omega^2\lesssim\|\partial_z^2\hat{e}_N^{n+1}\|_\omega^2+\|\partial_z^2\hat{e}_N^{n+1}\|_\omega^2+\|\hat{e}_N^{n+1}\|_{\omega^{-1}}^2,$$
$$\|\hat{e}_N^{n+1}\|_\omega^2\lesssim\|\partial_z\hat{e}_N^{n+1}\|_\omega^2\lesssim\|\partial_z\hat{e}_N^{n+1}\|^2\lesssim\|\partial_z^2\hat{e}_N^{n+1}\|^2,$$
$$\|\hat{e}_N^{n+1}\|_{\omega^{-1}}^2\lesssim\|\partial_z\hat{e}_N^{n+1}\|^2,\quad\|\hat{e}_N^{n+1}\|^2\lesssim\|\partial_z\hat{e}_N^{n+1}\|^2。\tag{33}$$

将式(33)代入式(32),得

$$\|\tilde{e}_N^{n+1}\|_\omega^2-\|\tilde{e}_N^n\|_\omega^2+\frac{16\tau}{R^4}\|\mathscr{L}_l\tilde{e}_N^{n+1}\|_\omega^2+\frac{4\tau\alpha}{R^2}\|\partial_z\tilde{e}_N^{n+1}\|_\omega^2+\frac{4\alpha\tau l(l+1)}{R^2}\|\tilde{e}_N^{n+1}\|^2$$

$$\lesssim\tau\|R^{n+1}\|_\omega^2+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\partial_z^2[(\Pi_N^{2,l}-I)\partial_t u_l]\|_\omega^2\mathrm{d}t+2\tau\|\tilde{e}_N^{n+1}\|_\omega^2+\tau\|\partial_z^2\hat{e}_N^{n+1}\|^2,$$

则有

$$\|\tilde{e}_N^{n+1}\|_\omega^2-\|\tilde{e}_N^n\|_\omega^2+\frac{16\tau}{R^4}\|\mathscr{L}_l\tilde{e}_N^{n+1}\|_\omega^2$$

$$\lesssim\tau\|R^{n+1}\|_\omega^2+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\partial_z^2[(\Pi_N^{2,l}-I)\partial_t u_l]\|_\omega^2\mathrm{d}t+2\tau\|\tilde{e}_N^{n+1}\|_\omega^2+\tau\|\partial_z^2\hat{e}_N^{n+1}\|^2。\tag{34}$$

将式(34)中的 n 从 $0\sim k-1(k\leqslant T/\tau)$ 累加,得

$$\|\tilde{e}_N^k\|_\omega^2+\frac{16\tau}{R^4}\sum_{n=0}^k\|\mathscr{L}_l\tilde{e}_N^n\|_\omega^2$$

$$\lesssim\tau^2\int_0^T\|\partial_z(\partial_t^2u_l)\|_{2,\omega,l}^2\mathrm{d}t+\int_0^T\|\partial_z^2[(\Pi_N^{2,l}-I)\partial_t u_l]\|_\omega^2\mathrm{d}t+\|\tilde{e}_N^0\|_\omega^2$$

$$+\frac{16\tau}{R^4}\|\mathscr{L}_l\tilde{e}_N^0\|_\omega^2+\tau\sum_{n=0}^k\|\partial_z^2\hat{e}_N^n\|^2+2\tau\sum_{n=0}^k\|\tilde{e}_N^n\|_\omega^2。$$

取 $u_{lN}^0=\Pi_N^{2,l}\varphi_l$,则有 $\|\tilde{e}_N^0\|_\omega^2=0$,利用离散的 Gronwall 引理得

$$\|\tilde{e}_N^k\|_\omega^2\lesssim\left[\tau^2\int_0^T\|\partial_t^2u_l\|_{2,\omega,l}^2\mathrm{d}t+\int_0^T\|\partial_z^2[(\Pi_N^{2,l}-I)\partial_t u_l]\|_\omega^2\mathrm{d}t+\tau\sum_{n=0}^k\|\partial_z^2\hat{e}_N^n\|_\omega^2\right]\exp\left(\frac{2T+2\tau}{1-2\tau}\right)。$$

由三角不等式 $\|u_l(z,t_n)-u_{lN}^n(z)\|_\omega\leqslant\|\tilde{e}_N^n\|_\omega+\|\hat{e}_N^n\|_\omega$ 和引理 5 可得式(27)、(28)。

4　离散格式的有效实现

下面建立离散格式(19)等价的矩阵形式,$L_k(z)$ 表示 k 次 Legendre 多项式,构造逼近空间 $X_N(l)$ 中的一组基函数:

$$\varphi_k(z)=(1-z^2)[L_k(z)-L_{k+2}(z)],\quad k=0,1,\cdots,N-4,$$

$$\varphi_{N-3}(z)=\frac{1}{4}(1-z^2)(1-z),\quad \varphi_{N-2}(z)=\frac{1}{4}(1-z)^2,$$

则逼近空间为

$$X_N(l)=\mathrm{span}\{\varphi_0(z),\varphi_1(z),\cdots,\varphi_{N-2-\mathrm{sgn}(l)}(z)\}。\tag{35}$$

记

$$a_{ij}^l=\int_I(z+1)^2\varphi_j''\varphi_i''\mathrm{d}z,\quad b_{ij}^l=\int_I\varphi_j'\varphi_i'\mathrm{d}z,\quad c_{ij}^l=\int_I(z+1)^2\varphi_j'\varphi_i'\mathrm{d}z,$$

$$d_{ij}^l=\int_I(z+1)^2\varphi_i\varphi_j\mathrm{d}z,\quad g_{ij}^l=\int_I\frac{1}{(z+1)^2}\varphi_j\varphi_i\mathrm{d}z,\quad h_{ij}^l=\int_I\varphi_j\varphi_i\mathrm{d}z,$$

$$f_i^l=\int_I(z+1)^2(u_{lN}^n+\tau q_l^{n+1})\varphi_i\mathrm{d}z,\ (i,j=0,1,\cdots,N-2-\mathrm{sgn}(l)),$$

将 u_{lN}^{n+1} 展开为

$$u_{lN}^{n+1}=\sum_{i=0}^{N-2-\mathrm{sgn}(l)}u_{il}^{n+1}\varphi_i(z)。\tag{36}$$

将式(36)代入式(19),让 v_{lN} 取遍 $X_N(l)$ 中的一组基函数,可得线性系统

$$\left\{\frac{16\tau}{R^4}[\boldsymbol{A}_l+2(l^2+l+1)\boldsymbol{B}_l+l(l+1)(l^2+l-2)\boldsymbol{G}_l]+\frac{4\tau\alpha}{R^2}[\boldsymbol{C}_l+l(l+1)\boldsymbol{H}_l]+(1+\tau\beta)\boldsymbol{D}_l\right\}\boldsymbol{U}_l^{n+1}=\boldsymbol{F}_l^{n+1},\tag{37}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_l=(a_{ij}^l),\quad \boldsymbol{B}_l=(b_{ij}^l),\quad \boldsymbol{C}_l=(c_{ij}^l),\quad \boldsymbol{D}_l=(d_{ij}^l),\quad \boldsymbol{G}_l=(g_{ij}^l),\quad \boldsymbol{H}_l=(h_{ij}^l),$$

$$\boldsymbol{U}_l^{n+1}=(u_{0l}^{n+1},u_{1l}^{n+1},\cdots,u_{N-2-\mathrm{sgn}(l),l}^{n+1})^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{F}_l^{n+1}=(f_{0l}^{n+1},f_{1l}^{n+1}\cdots,f_{N-2-\mathrm{sgn}(l),l}^{n+1})^{\mathrm{T}}。$$

由 Legendre 多项式的正交性可知式(37)中的系数矩阵 $\boldsymbol{A}_l$、$\boldsymbol{B}_l$、$\boldsymbol{C}_l$、$\boldsymbol{D}_l$、$\boldsymbol{G}_l$、$\boldsymbol{H}_l$ 都是带状的稀疏矩阵。

5 数值实验

为了表明差分谱逼近算法的稳定性与收敛性,本文在 Matlab R2018b 平台上进行一系列的数值测试。设 $u_{lN}^{n+1}(\boldsymbol{x})$ 为精确解 $u(\boldsymbol{x},t)$ 在 $t=t_{n+1}$ 时刻的逼近解,由变量替换

$$x_1=\frac{z+1}{2}R\sin\theta\cos\phi,\quad x_2=\frac{z+1}{2}R\sin\theta\sin\phi,\quad x_3=\frac{z+1}{2}R\cos\theta$$

及球谐函数展开有

$$u(\boldsymbol{x},t_{n+1})=\psi(z,\theta,\phi,t_{n+1})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{|m|=0}^{l}u_l(z,t_{n+1})Y_l^m(\theta,\phi),$$

$$u_{LN}^{n+1}(\boldsymbol{x})=\psi_{LN}^{n+1}(z,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{L}\sum_{|m|=0}^{l}u_{lN}^{n+1}(z)Y_l^m(\theta,\phi)。$$

定义 $u(\boldsymbol{x},t_{n+1})$ 与 $u_{LN}^{n+1}(\boldsymbol{x})$ 在 L^∞ 范数下的误差为

$$e(u(\boldsymbol{x},t_{n+1}),u_{LN}^{n+1}(\boldsymbol{x}))=\|u(\boldsymbol{x},t_{n+1})-u_{LN}^{n+1}(\boldsymbol{x})\|_{L^\infty(\Omega)}=\|\psi(r,\theta,\phi,t_{n+1})-\psi_{LN}^{n+1}(r,\theta,\phi)\|_{L^\infty(D)}。$$

例 1 取 $R=1$, $\alpha=\beta=3$,构造一个满足初边值条件的精确解 $u(\boldsymbol{x},t)=(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)^2\mathrm{e}^{x_1+x_2+x_3+t}$, $u(\boldsymbol{x},t)$ 代入式(1)得到 g。当 $\tau=0.001$ 时,对不同的 L 和 N,L 表示球谐函数的 1 个截断,在表 1、2 中分别列出了 $t=1$ 和 $t=2$ 时逼近解与精确解之间的误差。为了进一步表明算法的稳定性和收敛性,在图 1—4 中给出了精确解和逼近解在 $\theta=\pi/2$ 时的图像及它们之间的误差图像。

表 1 当 $\tau=0.001$、$t=1$ 时例 1 精确解与逼近解的误差

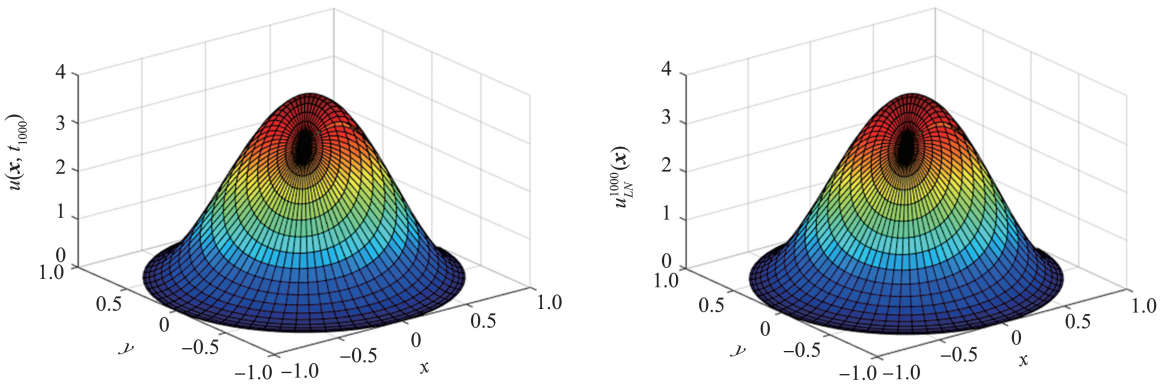
Table 1 When $\tau=0.001$ and $t=1$, the error between the exact solution and the approximate solution for example 1

N	$L=4$	$L=6$	$L=8$	$L=10$	$L=12$
10	0.001 053 200 0	0.002 404 600 0	0.032 402 000 0	0.107 030 000 0	0.121 920 000 0
15	0.000 989 970 0	0.000 009 155 8	0.000 005 997 0	0.000 124 640 0	0.002 939 100 0
20	0.000 988 790 0	0.000 009 275 8	0.000 005 999 4	0.000 005 999 4	0.000 005 999 4
25	0.001 000 700 0	0.000 009 193 3	0.000 006 000 2	0.000 006 000 2	0.000 006 000 2

表 2　当 $\tau=0.001$、$t=2$ 时例 1 精确解与逼近解的误差

Table 2　When $\tau=0.001$ and $t=2$, the error between the exact solution and the approximate solution for example 1

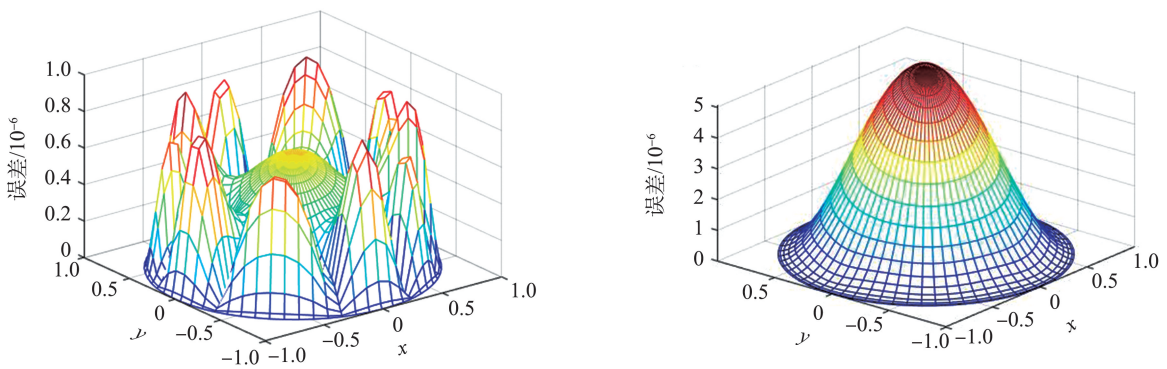
N	$L=4$	$L=6$	$L=8$	$L=10$	$L=12$
10	0.002 862 900 0	0.006 536 400 0	0.088 078 000 0	0.290 940 000 0	0.331 400 000 0
15	0.002 691 000 0	0.000 024 888 0	0.000 016 302 0	0.000 338 810 0	0.007 989 200 0
20	0.002 687 800 0	0.000 025 214 0	0.000 016 308 0	0.000 016 308 0	0.000 016 308 0
25	0.002 720 300 0	0.000 024 990 0	0.000 016 310 0	0.000 016 310 0	0.000 016 310 0



(a) 精确解　　(b) 逼近解

图 1　当 $N=20$、$L=8$ 时例 1 精确解 $u(\boldsymbol{x},t_{1000})$ 与逼近解 $u_{LN}^{1000}(\boldsymbol{x})$

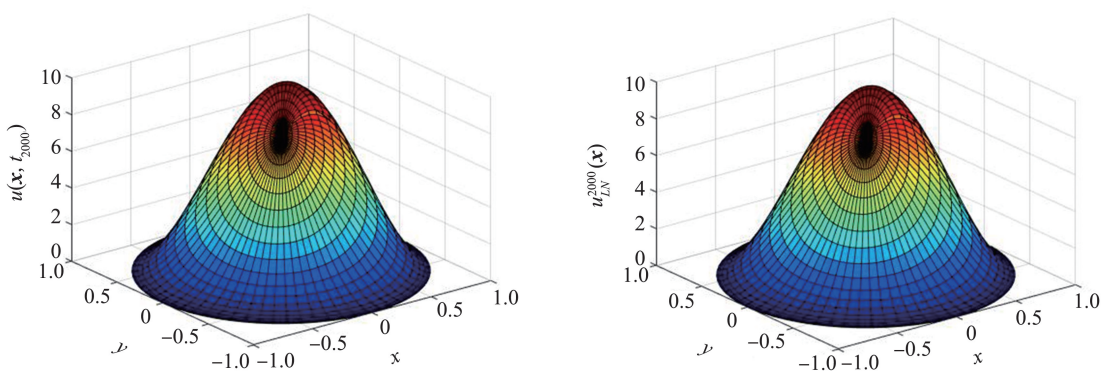
Fig.1　When $N=20$ and $L=8$, the exact solution $u(\boldsymbol{x},t_{1000})$ and the approximate solution $u_{LN}^{1000}(\boldsymbol{x})$ for example 1



(a) N=20、L=6时精确解与逼近解的误差　　(b) N=20、L=8时精确解与逼近解的误差

图 2　例 1 中不同条件的精确解 $u(\boldsymbol{x},t_{1000})$ 与逼近解 $u_{LN}^{1000}(\boldsymbol{x})$ 的误差图像

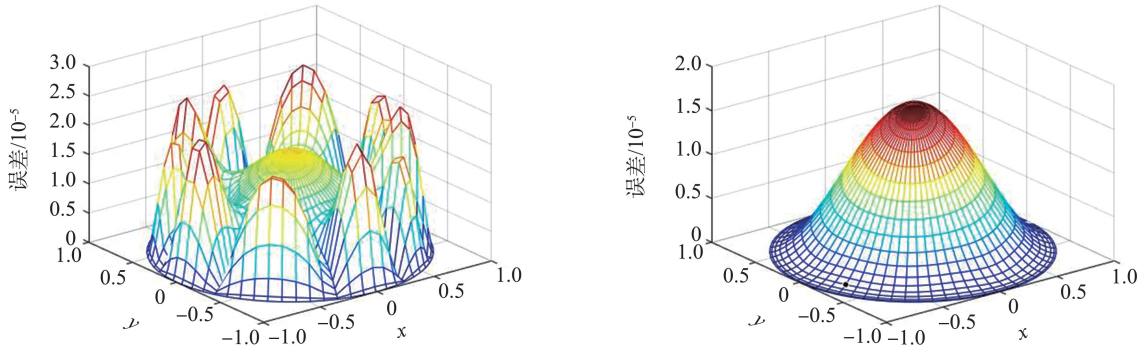
Fig.2　Error images between the exact solution $u(\boldsymbol{x},t_{1000})$ and the approximate solution $u_{LN}^{1000}(\boldsymbol{x})$



(a) 精确解　　(b) 逼近解

图 3　当 $N=20$、$L=8$ 时例 1 精确解 $u(\boldsymbol{x},t_{2000})$ 与逼近解 $u_{LN}^{2000}(\boldsymbol{x})$

Fig.3　When $N=20$ and $L=8$, the exact solution $u(\boldsymbol{x},t_{2000})$ and the approximate solution $u_{LN}^{2000}(\boldsymbol{x})$ for example 1



(a) N=20、L=6时精确解与逼近解的误差 (b) N=20、L=8时精确解与逼近解的误差

图 4 例 1 中不同条件的精确解 $u(\boldsymbol{x},t_{2000})$ 与逼近解 $u_{LN}^{2000}(\boldsymbol{x})$ 的误差图像

Fig.4 Error images between the exact solution $u(\boldsymbol{x},t_{2000})$ and the approximate solution $u_{LN}^{2000}(\boldsymbol{x})$ under different conditions for example 1

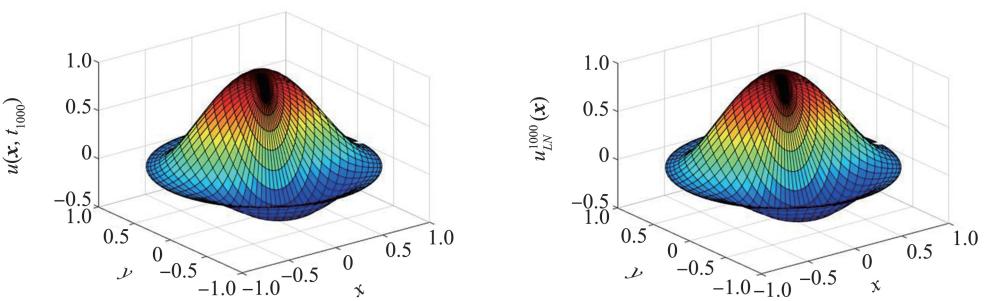
从表 1、2 可知,$\tau=0.001$、$N\geqslant 20$、$L\geqslant 6$ 时,精确解与逼近解的误差达到了10^{-5}左右的精度。由图 1—4 可知,差分谱逼近算法是稳定的和收敛的。

例 2 取 $R=1$, $\alpha=\beta=3$ 构造一个精确解,$\tau=0.001$,对不同的 L 和 N,分别在表 3—4 列出了 $t=1$ 和 $t=2$ 时逼近解与精确解之间的误差,在图 5-8 中给出了精确解和逼近解在 $\theta=\pi/2$ 的图像及它们之间的误差图像。

表 3 当 $\tau=0.001$、$t=1$ 时,例 2 精确解与逼近解的误差

Table 3 When $\tau=0.001$ and $t=1$, the error between the exact solution and the approximate solution for example 2

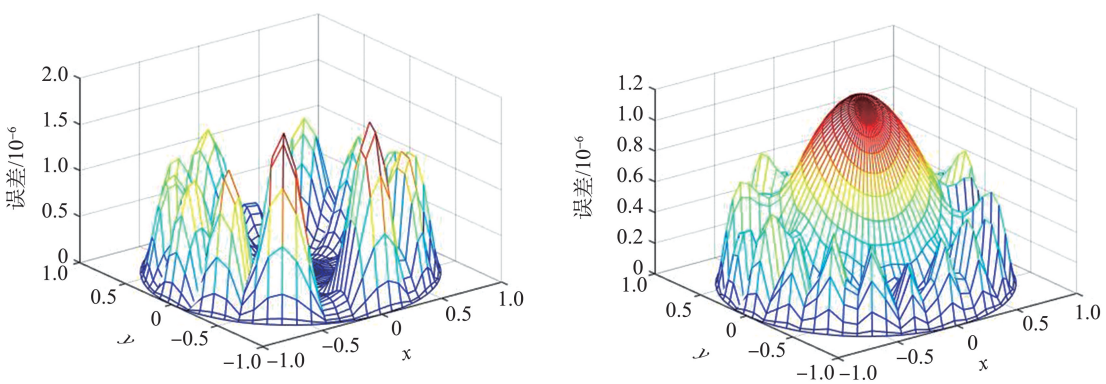
N	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$	$L=10$
10	0.091 664 300 0	0.004 657 300 0	0.013 152 000 0	0.026 223 000 0	0.023 520 000 0
15	0.091 764 600 0	0.004 420 800 0	0.000 191 910 0	0.000 124 940 0	0.001 151 700 0
20	0.091 716 400 0	0.004 374 700 0	0.000 196 140 0	0.000 005 519 5	0.000 001 192 9
25	0.091 674 500 0	0.004 399 300 0	0.000 197 080 0	0.000 005 420 2	0.000 001 192 9



(a) 精确解 (b) 逼近解

图 5 当 $N=20$、$L=8$ 时例 2 精确解 $u(\boldsymbol{x},t_{1000})$ 与逼近解 $u_{LN}^{1000}(\boldsymbol{x})$

Fig.5 When $N=20$ and $L=8$, the exact solution $u(\boldsymbol{x},t_{1000})$ and the approximate solution $u_{LN}^{1000}(\boldsymbol{x})$ for example 2



(a) N=20、L=6时精确解与逼近解的误差 (b) N=20、L=10时精确解与逼近解的误差

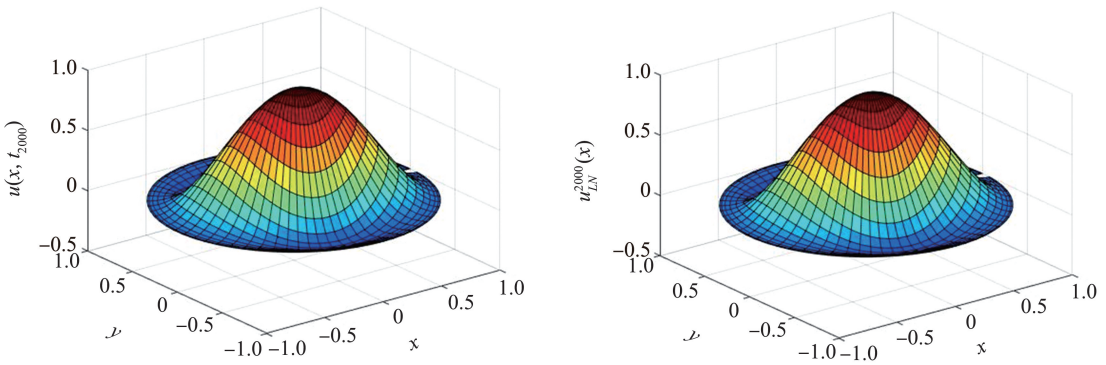
图 6 例 2 中不同条件的精确解 $u(\boldsymbol{x},\ t_{1000})$ 与逼近解 $u_{LN}^{1000}(\boldsymbol{x})$ 的误差图像

Fig.6 Error image between the exact solution $u(\boldsymbol{x},t_{1000})$ and the approximate solution $u_{LN}^{1000}(\boldsymbol{x})$ under different conditions for example 2

表 4　当 $\tau=0.001$、$t=2$ 时例 2 精确解与逼近解的误差

Table 4　When $\tau=0.001$ and $t=2$, the error between the exact solution and the approximate solution for example 2

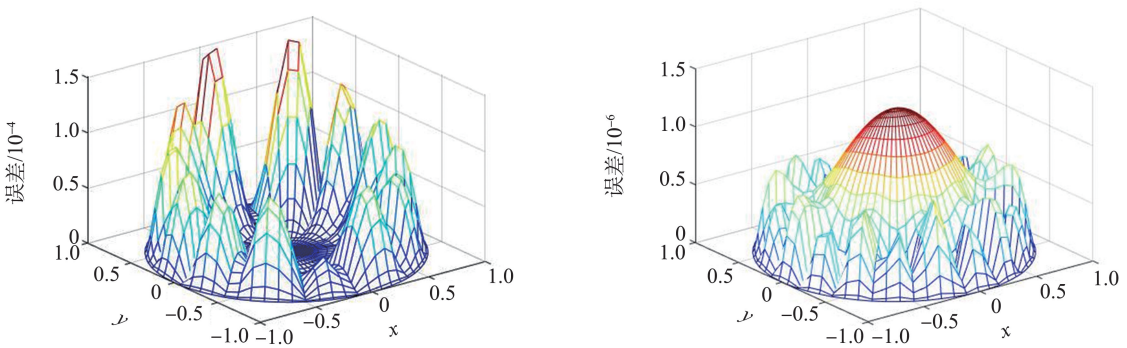
N	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$	$L=10$
10	0.077 887 500 00	0.004 034 500 00	0.013 513 000 00	0.026 477 000 00	0.024 088 000 00
15	0.078 069 800 00	0.003 626 200 00	0.000 160 820 00	0.000 102 720 00	0.001 031 800 00
20	0.078 062 200 00	0.003 583 500 00	0.000 157 630 00	0.000 004 672 50	0.000 001 266 89
25	0.078 047 100 00	0.003 615 480 00	0.000 158 853 00	0.000 004 593 43	0.000 001 267 13



(a) 精确解　　(b) 逼近解

图 7　当 $N=20$、$L=8$ 时例 2 精确解 $u(\boldsymbol{x},t_{2000})$ 与逼近解 $u_{LN}^{2000}(\boldsymbol{x})$

Fig.7　When $N=20$ and $L=8$, the exact solution $u(\boldsymbol{x},t_{2000})$ and the approximate solution $u_{LN}^{2000}(\boldsymbol{x})$ for example 2



(a) N=20、L=6时精确解与逼近解的误差　　(b) N=20、L=10时精确解与逼近解的误差

图 8　例 2 中不同条件的精确解 $u(\boldsymbol{x},t_{2000})$ 与逼近解 $u_{LN}^{2000}(\boldsymbol{x})$ 的误差图像

Fig.8　Error images between the exact solution $u(\boldsymbol{x},t_{2000})$ and the approximate solution $u_{LN}^{2000}(\boldsymbol{x})$ under different conditions for example 2

从表 3、4 可知,当 $\tau=0.001$、$N\geqslant 20$、$L\geqslant 8$ 时,精确解与逼近解的误差达到了10^{-6}的精度。从图 5—8 可知,差分谱逼近算法是稳定的和收敛的。

6　结语

本文提出了球域上四阶抛物问题基于降维格式的一种差分谱逼近。该方法的主要思想是利用球谐函数展开将原问题分解为一系列解耦的一维四阶抛物问题。对每个一维四阶抛物问题,证明了离散格式的能量稳定性和逼近解的误差估计。该方法将一个三维四阶问题化为一系列解耦的一维四阶问题,不仅大大地减少了自由度,还节约了大量的计算时间和内存容量。本文提出的差分谱逼近算法还可应用到一些复杂的非线性四阶抛物问题,这是将来研究的目标。

参考文献:

[1] MYERS T G. Thin films with high surface tension[J]. SIAM Review, 1998, 40(3):441-462.

[2] XU Meng, ZHOU Shulin. Existence and uniqueness of weak solutions for a generalized thin film equation[J]. Nonlinear

Analysis(Theory, Methods and Applications), 2005, 60(4):755-774.

[3] DRAZIN P G, JOHNSON R S. Solitons: an introduction[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[4] SASSAMANR, BISWAS A. Soliton perturbation theory for phi-four model and nonlinear Klein-Gordon equations[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(8):3239-3249.

[5] WAZWAZ A M. New travelling wave solutions to the Boussinesq and the Klein-Gordon equations[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008, 13(5):889-901.

[6] SHEN Jie, YANG Xiaofeng. Numerical approximations of Allen-Cahn and Cahn-Hilliard equations[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2010, 28(4):1669-1691.

[7] OMRANI K. Convergence of Galerkin approximations for the Kuramoto-Tsuzuki equation[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2005, 21(5):961-975.

[8] WANG Shanshan, WANG Tingchun, ZHANG Luming, et al. Convergence of a nonlinear finite difference scheme for the Kuramoto-Tsuzuki equation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(6):2620-2627.

[9] ZHAO Xuan, SUN Zhizhong, HAO Zhaopeng. A fourth-order compact ADI scheme for two-dimensional nonlinear space fractional Schrodinger equation[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2014, 36(6):A2865-A2886.

[10] SHEN Jie, XU Jie, YANG Jiang. The scalar auxiliary variable (SAV) approach for gradient flows[J]. Journal of Computational Physics, 2018, 353:407-416.

[11] SHEN Jie, XU Jie, YANG Jiang. A new class of efficient and robust energy stable schemes for gradient flows[J]. SIAM Review, 2019, 61(3):474-506.

[12] ROSSI R. On two classes of generalized viscous Cahn-Hilliard equations[J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2005, 4(2):405-430.

[13] SHEN Jie, YANG Xiaofeng. Numerical approximations of Allen-Cahn and Cahn-Hilliard equations[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2010, 28(4):1669-1691.

[14] 安静,江剑韬. 4阶 Steklov 特征值问题基于降维格式的一种有效的有限元法[J].贵州师范大学学报(自然科学版), 2021,39(4):1-9.
AN Jing, JIANG Jiantao. An efficient finite element method based on a dimensionality reduction format for the fourth-order Steklov eigenvalue problem[J]. Journal of Guizhou Normal University(Natural Science Edition), 2021, 39(4): 1-9.

[15] 刘忠敏,安静,陈悦. 圆域上变系数二阶椭圆方程有效的谱方法及其在奇异非线性问题中的应用[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2023, 51(1):30-37.
LIU Zhongmin, AN Jing, CHEN Yue. An efficient spectral method for second-order elliptic equations with variable coefficients and its application in singular nonlinear problems in circular domains [J]. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2023, 51(1):30-37.

[16] 陈悦,安静,刘忠敏. 圆域上 Schrodinger 方程特征值问题有效的谱 Galerkin 逼近及误差估计[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2022, 40(6):23-32.
CHEN Yue, AN Jing, LIU Zhongmin. Spectral Galerkin approximation and error estimation for Eigenvalue problem of Schrodinger equation on circular domain[J]. Journal of Guizhou Normal University (Natural Science Edition), 2022, 40(6):23-32.

[17] JIANG Jiantao, AN Jing. Numerical approximation based on a decoupled dimensionality reduction scheme for Maxwell eigenvalue problem[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2023, 46(16):17367-17387.

[18] WANG Lilian. A review of prolate spheroidal wave functions from the perspective of spectral methods[J]. Journal of Mathematical Study, 2017, 50(2):101-143.

[19] HAYDAR A, SHEN Jie. Highly efficient and accurate spectral approximation of the angular Mathieu equation for any parameter values q[J]. Journal of Mathematical Study, 2018, 51(2):131-149.

[20] MA Lina, SHEN Jie, WANG Lilian. Spectral approximation of time-harmonic Maxwell equations in three-dimensional exterior domains[J]. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 2015, 12(2):366-383.

[21] LI Lan, AN Jing. An efficient spectral method and rigorous error analysis based on dimension reduction scheme for fourth order problems[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2021, 37(1):152-171.

[22] SHEN Jie,TANG Tao. Spectral and high-order methods with applications[M]. Beijing: Science Press, 2006.

[23] SHEN Jie, TANG Tao, WANG Lilian. Spectral methods: algorithms, analysis and applications[M]. Springer: Springer Science and Business Media, 2011.

(编辑:陈丽萍)