

## 4/2 模型下目标给付型养老金计划的最优投资和给付策略

韩婧怡,常浩\*,陈祯

(天津工业大学数学科学学院,天津 300387)

**摘要:**4/2 随机波动率下的目标给付型养老金(target benefit pension, TBP)计划包含在职成员和退休成员,在职成员向养老金缴纳固定费用,退休成员从基金中领取相应养老金,退休成员的给付水平取决于基金的投资情况。假设养老金可以投资于一种无风险资产和一种股票,股票的价格过程遵循4/2 随机波动率模型。运用随机最优控制理论,得到最优投资和给付调整策略的显式解,应用数值算例分析各模型参数对最优投资和给付调整策略的影响。该研究为随机波动率模型下的其他复杂投资问题的解决提供方法论基础,也为基金管理者的资产配置和风险管理提供参考依据。

**关键词:**目标给付型养老金计划;4/2 随机波动率模型;偏差型目标函数;随机最优控制理论

**中图分类号:** O211.67;F830.48 **文献标志码:** A

**引用格式:**韩婧怡,常浩,陈祯. 4/2 模型下目标给付型养老金计划的最优投资和给付策略[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(3):49-59.

## Optimal investment and benefit payment adjustment strategy for target benefit pension plan under 4/2 stochastic volatility model

HAN Jingyi, CHANG Hao\*, CHEN Zhen

(School of Mathematical Sciences, Tiangong University, Tianjin 300387, China)

**Abstract:** The target benefit pension (TBP) plan under 4/2 stochastic volatility model contains both the active members and the retired members, where the active members pay predetermined contributions to the pension fund and the retired members receive a corresponding pension from the fund, and the benefit payment level of the retired members depends on the investment situation. It is assumed that the pension fund can be invested in a risk-free asset and a stock, and the stock price follows the 4/2 stochastic volatility model. Applying the stochastic optimal control theory, explicit solutions for the optimal investment and benefit payment adjustment strategy are derived, and a numerical example is given to illustrate the results obtained. Methodological and theoretical support for solving other complex investment problems in a stochastic volatility environment, and the reference basis for asset allocation and risk management of fund managers are provided.

**Key words:** target benefit pension plan; 4/2 stochastic volatility model; deviation-type objective function; stochastic optimal control theory

## 0 引言

健全的养老金保障体系在维护社会稳定和推动经济发展方面起着至关重要的作用。目前,基于养老金方面的研究主要集中在传统的确定收益型(defined benefit, DB)养老金计划和确定缴费型(defined contribution, DC)养老金计划。这方面的研究成果很丰富,有兴趣的读者可以参考文献[1-7]。这2种传统养老金计划都存在一定的局限性:DB型计划保证给付的稳定性,要求基金管理者承担全部风险;而在DC型计划里,退休后养老金的收益由基金投资情况决定,导致成员需要承担全部的投资风险,面临退休后给付水平的不稳定性。为了完善这2类养老金计划的不足,许多工业化国家推出目标给付型养老金计划(target bene-

收稿日期:2023-10-16;网络出版时间:2024-10-09 15:24:49

基金项目:国家社会科学基金后期资助项目(21FJYB042)

第一作者:韩婧怡(2000—),女,硕士研究生,研究方向为金融数学和保险精算. E-mail:1367769927@qq.com

\*通信作者:常浩(1979—),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为数理金融与保险精算. E-mail:ch8683897@126.com

fit pension, TBP) 计划,这是一种将 DB 型养老金计划和 DC 型养老金计划相结合的新型混合型养老金计划。TBP 计划具有固定的缴费,目标给付水平通常受工资影响,而实际给付取决于养老金的投资情况。Chen 等<sup>[8]</sup>利用最优控制方法推导出了 TBP 计划的最优周期策略,研究表明 TBP 计划最突出的优点是具备风险分担结构。Wang 等<sup>[9]</sup>、Wang 等<sup>[10]</sup>研究发现最优投资和给付调整策略能够根据基金投资情况和模型目标调整缴费以及退休给付策略,从而有效实现代际风险分担。Gollier<sup>[11]</sup>研究发现,好的风险分担结构并不会降低每一代人所承担的风险,相反,它增加了成员缴费的预期回报。Cui 等<sup>[12]</sup>引入多期的世代交叠模型,研究混合型养老金计划的代际风险分担功能。Rong 等<sup>[13]</sup>在偏差型目标函数下研究了受寿命延长和生育率下降影响的 TBP 计划。Liu 等<sup>[14]</sup>在 Rong 等<sup>[13]</sup>的基础上,加入一种与寿命挂钩的资产,研究如何借助风险分担结构和投资策略管理长寿风险。

在实际金融市场中,股票价格的波动率通常不再是一个常数,而是一个随机过程。Heston 随机波动率模型(Heston 模型)是经典的随机波动率(stochastic volatility, SV)模型,但是,在使用 Heston 模型校准真实数据时通常会违反 Feller 条件。此外,在市场压力时期,随着瞬时波动率上升,偏斜会趋于平缓,使得 Heston 模型无法产生具有高波动性的极端路径。为了克服上述局限性,Heston<sup>[15]</sup>进一步将 Heston 模型扩展到 3/2 随机波动率模型(3/2 模型),3/2 模型把瞬时波动率建模为 Cox-Ingersoll-Ross(CIR)过程的逆过程,允许存在瞬时波动性峰值的极端路径,但是,3/2 模型无法拟合资产价格的低波动特征。2017 年,Grasselli<sup>[16]</sup>针对 Heston 模型和 3/2 模型的局限性,首次提出 4/2 随机波动率模型(4/2 模型)。该模型包含 Heston 模型和 3/2 模型,可以更好地拟合隐含波动率曲面的动态过程,近年来在投资组合领域得到广泛应用。Cheng 等<sup>[17]</sup>在 4/2 模型下引入模型的不确定性,研究鲁棒最优投资组合问题。Cheng 等<sup>[18]</sup>探讨了在效用最大化准则和 4/2 模型下的最优投资策略。Lin 等<sup>[19]</sup>在 4/2 模型的基础上引入跳跃模型,研究衍生品定价问题。Wang 等<sup>[20]</sup>在均值-方差准则下,研究股票价格由 4/2 模型驱动的投资-再保险问题。Zhang<sup>[21]</sup>考虑随机利率和随机波动率,研究在均值-方差准则下的衍生品交易对资产-负债管理绩效的影响。Hata 等<sup>[22]</sup>研究在 4/2 模型下带有延迟的保险公司的最优投资和再保险策略。

本文考虑 TBP 计划的目标函数包含 3 个方面,分别是给付水平的充足性(实际给付达到或高于目标给付)、给付的稳定性以及代际公平性。基金管理者的目标是尽可能缩减给付与预设目标之间的累积平方和偏差,尽可能减少终端不连续性风险。本文在偏差型目标函数下,首次将 4/2 模型引入带有随机工资的 TBP 计划问题中,假设金融市场包含一种风险资产和一种无风险资产,应用随机最优控制原理,推导出最优投资和给付调整策略的显式解。最后,给出数值算例来说明不同参数对最优投资和给付调整策略的影响。

本文的主要贡献有:(i) 将 Wang 等<sup>[9]</sup>股票价格过程扩展到 4/2 模型,首次将 4/2 模型引入带有随机工资的 TBP 计划研究中;(ii) 在偏差型目标函数下得到了最优投资策略和最优给付调整策略的闭式解;(iii) 对 Heston 模型、3/2 模型和 4/2 模型下的最优策略进行比较,提供波动率参数对最优策略的敏感性分析。

## 1 模型设定

假设金融市场是无摩擦的,经济环境中的不确定性由定义在一个完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上独立的标准布朗运动刻画,表示为  $W(t) = (W_1(t), W_2(t))$ ,  $\mathcal{F}_t$  表示一个右连续的布朗域流,表示养老金计划发起人在  $t$  时刻可获得的信息。 $P$  表示定义在  $\Omega$  上的历史概率测度, $[0, T]$  表示有限投资期。

### 1.1 金融市场

假设金融市场包含一种无风险资产(银行账户)和一种风险资产(股票)。

无风险资产的价格过程  $S_0(t)$  满足如下微分方程:

$$dS_0(t) = S_0(t)rdt, \quad S_0(0) = s_0 = 1, \quad (1)$$

其中  $r > 0$  为无风险利率。

股票的价格过程  $S_1(t)$  由 4/2 模型驱动,表示为

$$\frac{dS_1(t)}{S_1(t)} = (r + \lambda(c_1 V(t) + c_2))dt + \left( c_1 \sqrt{V(t)} + \frac{c_2}{\sqrt{V(t)}} \right) dW_1(t), \quad S_1(0) = s_1 > 0, \quad (2)$$

$$dV(t) = k(\theta_v - V(t))dt + \sigma_v \sqrt{V(t)} dW_2(t), \quad V(0) = v_0 > 0, \quad (3)$$

其中,  $c_1, c_2$  和  $\lambda$  都是正常数,  $\lambda\sqrt{V(t)}$  为风险的市场价格。  $V(t)$  是一个平方根过程,  $k > 0$  表示均值回复率,  $\theta_v > 0$  表示长期均值回复水平。假设  $W_1(t)$  和  $W_2(t)$  的相关系数为  $\rho, \rho \in [-1, 1]$ 。

### 1.2 随机工资

假设  $t$  时刻退休成员的工资  $L(t)$  满足如下随机微分方程:

$$\frac{dL(t)}{L(t)} = [r_L + \sigma_L \lambda (c_1 V(t) + c_2)] dt + \sigma_L \left( c_1 \sqrt{V(t)} + \frac{c_2}{\sqrt{V(t)}} \right) dW_1(t), \quad (4)$$

其中, 边界条件为  $L(0) = l_0 > 0, r_L$  和  $\sigma_L$  是正常数。

### 1.3 TBP 计划

参考 Wang 等<sup>[9]</sup>所描述的 TBP 养老金计划, 该计划由在职成员和退休成员共同组成。在职成员的缴费存入养老基金的集体账户, 同时, 养老基金向退休成员支付养老金。假设成员加入 TBP 计划的年龄为  $a$ , 所有成员的最大年龄为  $\omega$ 。为了简单起见, 模型假设每个在职成员存活到退休年龄  $b$  的概率均为 1, 人类死亡率数据库 (human mortality database, HMD) 中的数据表明, 许多国家 65 岁之前的存活概率接近 1。用  $n(t)$  表示  $t$  时刻年龄为  $a$  的新加入成员的密度,  $s(t)$  表示生存函数, 那么,  $t$  时刻年龄为  $x$  的成员密度可以表示为

$$n(t - (x - a))s(x), \quad x > a, \quad (5)$$

其中,  $t - (x - a)$  表示新成员加入计划的时间, 当  $t \geq 0$  时,  $t - (x - a)$  可能为负, 说明在  $t$  时刻年龄为  $x$  的成员在  $x - a$  年前加入计划, 则  $t$  时刻在职成员总数可表示为

$$A(t) = \int_a^b n(t - x + a)s(x) dx. \quad (6)$$

同理,  $t$  时刻退休成员总数可以表示为

$$R(t) = \int_b^\omega n(t - x + a)s(x) dx.$$

TBP 计划为退休成员提供终身养老金, 从退休年龄  $b$  开始给付。对于  $t$  时刻退休且最终工资为  $L(t)$  的成员, 假设每年养老金的初始给付率是  $p(t)L(t)$ , 其中,  $p(t)$  是一个由基金管理者动态调整的控制变量, 表示  $t$  时刻新退休成员的瞬时替代率。

为了确定  $t$  时刻对  $x$  岁退休成员的给付率, 定义  $\tilde{L}(x, t)$  表示成员退休时的假定工资, 表示如下:

$$\tilde{L}(x, t) = L(t)e^{-r_L(x-b)}, \quad t \geq 0, x \geq b, \quad (7)$$

将  $t$  时刻退休的成员工资作为起点, 并使用指数增长率  $r_L$  进行预测。

此外, 本文还假设该计划以固定的年费率  $\xi$  进行生活费用调整, 用  $e^{\xi(x-b)}$  表示, 因此,  $t$  时刻年龄为  $x$  的于  $x - b$  年前退休的成员的养老金给付率可以表示为

$$B(x, t) = p(t)\tilde{L}(x, t)e^{\xi(x-b)} = p(t)L(t)e^{-(r_L - \xi)(x-b)}, \quad x \geq b. \quad (8)$$

假设  $B^*$  为该计划在时刻 0 预先设定的总给付目标, 表示向退休成员提供的初始给付率。这一目标在通货膨胀指数  $\beta$  下呈指数增长, 在时刻  $t > 0$  的总目标给付为  $B^*e^{\beta t}$ 。

$t$  时刻所有退休成员的实际总给付率  $B(t)$  可以根据式 (7) 给出的年龄  $b$  至年龄  $\omega$  之间所有年龄组的调整给付率计算, 表示如下:

$$B(t) = \int_b^\omega n(t - x + a)s(x)B(x, t) dx = \int_b^\omega n(t - x + a)s(x)p(x)L(t)e^{-(r_L - \xi)(x-b)} dx = I(t)p(t)L(t), \quad t \geq 0, \quad (9)$$

其中,  $I(t) > 0$  是关于  $t$  的函数, 它将初始给付率  $B(x, t)$  与总给付率  $B(t)$  联系起来, 定义如下:

$$I(t) = \int_b^\omega n(t - x + a)s(x)e^{-(r_L - \xi)(x-b)} dx, \quad (10)$$

当人口稳定时,  $I(t)$  是正常数。

用  $c_0$  表示每个在职成员在 0 时刻的瞬时缴费率, 假设成员缴费随着时间呈指数型增长, 且该指数增长率与工资指数增长率相同。该假设出于 3 个方面的考虑: (1) 虽然工资存在随机波动, 但实际上这些波动不会非常剧烈, 因此, 为了方便计算缴费而忽略它们是合理的; (2) 本文更多关注给付风险, 而不是缴费风险; (3) 以这种方式简化本文的模型能够保证推导出最优控制问题的显式解。综上,  $t$  时刻所有在职成员的总

瞬时缴费率由下式给出:

$$C(t) = \int_a^b n(t-x+a) s(x) c_0 e^{r't} dx = D(t) e^{r't}, \quad t \geq 0, \quad (11)$$

其中  $D(t) > 0$  是关于  $t$  的函数, 表示为

$$D(t) = c_0 \int_a^b n(t-x+a) s(x) dx = c_0 A(t),$$

其中  $A(t)$  由式(6)给出。当计划成员人数稳定, 即  $n(t-x+a)$  为常数时,  $D(t)$  是一个正常数, 因此, 总缴费率以每位成员缴费率相同的速率呈指数型增长。

#### 1.4 随机控制问题

假设基金管理者可将养老金分别投资于式(1)、(2)所描述的无风险资产和风险资产, 并使用基金向退休成员发放养老金。  $\pi(t)$  表示基金管理者在  $t$  时刻投资股票的数额,  $X(t)$  表示在采用投资策略  $\pi(t)$  后在  $t$  时刻的养老金财富水平, 表示如下:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \pi(t) \frac{dS_1(t)}{S_1(t)} + (X(t) - \pi(t)) \frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + (C(t) - B(t)) dt \\ &= [\pi(t) \lambda (c_1 V(t) + c_2) + X(t) r + D(t) e^{r't} - I(t) p(t) L(t)] dt \\ &\quad + \pi(t) \left( c_1 \sqrt{V(t)} + \frac{c_2}{\sqrt{V(t)}} \right) dW_1(t), \end{aligned} \quad (12)$$

其中, 基金的初始财富为  $X(0) = x_0$ , 定义  $(\pi(t), p(t))$  为基金管理者在 0 时刻到  $T$  时刻采取的策略。该策略包括投资策略  $\pi(t)$  和给付调整策略  $p(t)$ , 定义可容许策略如下:

**定义 1** (可容许策略)  $(\pi(t), p(t))$  被称作可容许策略, 如果它满足下列条件:

(i) 对于任意的  $t \in [0, T]$ ,  $p(t) \geq 0$ ,  $(\pi(t), p(t))$  关于  $\mathcal{F}_t$  是循序可测过程;

(ii)  $E \left[ \int_0^T \pi^2(t) (c_1 V(t) + c_2)^2 / V(t) dt \right] < \infty$ ;

(iii) 式(12)存在唯一解。

用  $\Pi$  表示所有可容许策略的集合。

本文的模型同时考虑养老金计划的 2 个目标: 一个是最小化贴现后的总给付  $B(t) = I(t) p(t) L(t)$  与总目标给付  $B^* e^{\beta t}$  之间的偏差, 其中,  $B^*$  表示由基金管理者设定的初始目标给付,  $\beta > 0$  表示目标给付的增长率; 另一个目标是最大限度地降低养老金计划的不连续性风险, 该风险由基金贴现后的实际终端财富水平  $X(T)$  与基金预期终端财富水平  $x_0 e^{rT}$  之间的平方差来衡量。为了实现这些目标, 基金管理者需要选择最优的给付调整策略和投资策略, 则  $t$  时刻的目标函数  $H(t, x, l, v)$  可以表示为

$$H(t, x, l, v) = E_{\pi, p} \left\{ \int_t^T [(B(s) - B^* e^{\beta s})^2 - \lambda_1 (B(s) - B^* e^{\beta s})] e^{-rs} ds + \lambda_2 (X(T) - x_0 e^{rT})^2 e^{-rT} \right\}, \quad (13)$$

其中, 边界条件为  $H(T, x, l, v) = \lambda_2 (X(T) - x_0 e^{rT})^2 e^{-rT}$ ;  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是非负常数, 分别表示养老金计划 2 个目标的惩罚权重。权重的选择反映了给付稳定性、给付充足性和代际公平性之间的平衡。

然后, 定义值函数  $J(t, x, l, v)$  表示如下:

$$J(t, x, l, v) := \min_{(\pi, p) \in \Pi} H(t, x, l, v). \quad (14)$$

## 2 优化问题求解

本章主要研究 TBP 计划的最优策略。应用随机控制理论推导出优化问题(14)满足的哈密顿-雅可比-贝尔曼 (Hamilton-Jacobi-Bellman, HJB) 方程如下:

$$\min_{(\pi, p) \in \Pi} \{ \mathcal{A}^{(\pi, p)} J(t, x, l, v) \} = 0, \quad (15)$$

其中,

$$\mathcal{A}^{(\pi, p)} J(t, x, l, v) = J_t + [\pi \lambda (c_1 v + c_2) + rx + D(t) e^{r't} - p I(t) l] J_x$$

$$\begin{aligned}
 & + [r_L + \lambda \sigma_L (c_1 v + c_2)] l J_l + k (\theta_v - v) J_v + \frac{1}{2} \pi^2 \left( c_1 \sqrt{v} + \frac{c_2}{\sqrt{v}} \right)^2 J_{xx} \\
 & + \frac{1}{2} \sigma_L^2 \left( c_1 \sqrt{v} + \frac{c_2}{\sqrt{v}} \right)^2 l^2 J_{ll} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v J_{vv} + \pi \sigma_L \left( c_1 \sqrt{v} + \frac{c_2}{\sqrt{v}} \right)^2 l J_{xl} \\
 & + \pi \rho \sigma_v (c_1 v + c_2) J_{xv} + \rho \sigma_v \sigma_L (c_1 v + c_2) l J_{lv} \\
 & + [ (pI(t) l - B^* e^{\beta t})^2 - \lambda_1 (pI(t) l - B^* e^{\beta t}) ] e^{-rt},
 \end{aligned} \tag{16}$$

为了简化,将  $\pi(t)$  和  $p(t)$  缩写为  $\pi$  和  $p$ , 边界条件为

$$J(T, x, l, v) = \lambda_2 (x - x_0 e^{rT})^2 e^{-rT}, \tag{17}$$

其中,  $J_t, J_x, J_l, J_v, J_{xx}, J_{ll}, J_{vv}, J_{xl}, J_{xv}$  和  $J_{lv}$  为  $J(t, x, l, v)$  对相应变量的偏导数。

**定理 1** (验证定理) 若存在一个函数  $V(t, x, l, v) \in \mathcal{C}^{1,2,2,2}([0, T] \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+)$  满足式(15)、(16), 则  $V(t, x, l, v) \geq J(t, x, l, v)$ ; 若存在一个控制  $(\pi^*, p^*)$ , 使得  $\forall t \in [0, T]$ , 满足

$$(\pi^*, p^*) \in \arg \min_{(\pi, p) \in \Pi} \mathcal{L}^{(\pi, p)} V(t, x, l, v),$$

则  $V(t, x, l, v) = J(t, x, l, v)$ , 且  $(\pi^*, p^*)$  是最优投资和给付调整策略。

定理 1 的证明过程可以参考文献[17]。

经过求解方程(15), 可得如下结论。

**定理 2** 最优控制问题(14)的最优投资和给付调整策略分别表示为

$$\pi^*(t) = -\frac{v(x-g(t))}{c_1 v + c_2} \left( \lambda + \rho \sigma_v \frac{f_v(t, v)}{f(t, v)} \right), \tag{18}$$

$$p^*(t) = \frac{1}{l \cdot I(t)} \left( \lambda_2 f(t, v) (x-g(t)) + B^* e^{\beta t} + \frac{\lambda_1}{2} \right), \tag{19}$$

且相应的值函数可以表示为

$$J(t, x, l, v) = \lambda_2 e^{-rt} f(t, v) (x-g(t))^2 + u(t), \tag{20}$$

其中,  $f(t, v)$ 、 $g(t)$  和  $u(t)$  分别由式(A26)–(A28)给出。

证明: 见附录 A。

注 1 式(18)给出的最优资产配置策略  $\pi^*(t)$  表明,  $\pi^*(t)$  与  $t$  时刻的工资水平  $l$  无关。根据式(9)、(19), 对于  $t$  时刻所有退休成员的最优总给付, 即调整后的实际总给付可以表示为

$$B^*(t) = I(t) p^*(t) \cdot l = \lambda_2 f(t, v) (x-g(t)) + B^* e^{\beta t} + \frac{\lambda_1}{2}, \tag{21}$$

由式(21)可以看出  $t$  时刻总给付水平与工资水平  $l$  也无关。式(20)中的值函数也独立于  $t$  时刻的工资水平  $l$ , 表明工资的波动实际上被最优给付调整因子  $p^*(t)$  对冲, 因此退休成员的工资模型对  $\pi^*(t)$ 、 $B^*(t)$  和值函数没有影响。

注 2 式(19)两边同时乘  $I(t)$  可以发现,  $t$  时刻最优给付支出率由 3 个部分组成: 第一部分  $B^* e^{\beta t}$  为计划规定的给付目标; 第二部分  $\frac{\lambda_1}{2}$  为基于成员风险厌恶程度的静态调整; 第三部分  $\lambda_2 f(t, v) (x-g(t))$  为将当前计划总资产相对于计划期望的盈余(亏损)分摊到剩余年限的动态调整, 并在期末按比例将剩余部分作为遗产基金的一部分。

注 3 根据定理 2, 得到常数工资情形的特例情况, 当  $\sigma_L = 0$  时, 随机工资模型退化为常数工资模型。当工资以速率  $r_L$  呈指数型增长而不考虑随机波动时,  $t$  时刻的工资可以表示为

$$L(t) = l_0 e^{r_L t}, \quad t \geq 0, \tag{22}$$

其中,  $l_0$  表示  $t=0$  时的初始工资, 则财富过程(12)退化为

$$\begin{aligned}
 dX_1(t) & = [\pi(t) \lambda (c_1 V(t) + c_2) + X_1(t) r + e^{r_L t} (D(t) - p(t) l_0 \cdot I(t))] dt \\
 & + \pi(t) \left( c_1 \sqrt{V(t)} + \frac{c_2}{\sqrt{V(t)}} \right) dW_1(t), \quad X_1(0) = x_0.
 \end{aligned}$$

经过类似定理2的求解过程,可得如下推论。

**推论1** 对于工资过程遵循式(22)的最优控制问题(14),最优资产配置策略和最优给付调整策略可以表示为

$$\pi_1^*(t) = -\frac{v(x-g(t))}{c_1v+c_2} \left( \lambda + \rho\sigma_v \frac{f_v(t,v)}{f(t,v)} \right),$$

$$p_1^*(t) = \frac{1}{l_0 \cdot I(t)} \left( \lambda_2 f(t,v)(x-g(t)) + B^* e^{\beta t} + \frac{\lambda_1}{2} \right),$$

相应的值函数表示为

$$J_1(t,x,v) = f(t,v) \lambda_2 e^{-rt} (x-g(t))^2 + u(t),$$

其中, $f(t,v)$ 、 $g(t)$ 和 $u(t)$ 分别由式(A26)–(A28)给出。

### 3 数值算例

本章将应用数值算例分析最优策略对特定参数值变化的敏感性。

假设 $A(x)$ 遵循冈珀茨-麦克哈姆法则(Gompertz-Makeham's law),成员在年龄为 $x$ 时的死亡率表示为 $\mu(x) = A+Bc^x$ ,生存函数表示为

$$s(x) = e^{-\int_0^{x-a} \mu(a+s) ds} = e^{-A(x-a) - \frac{B}{\ln c}(c^x - c^a)}, \quad a \leq x \leq \omega,$$

满足 $s(a) = 1$ ,且当 $x > \omega$ 时, $s(x) = 0$ 。

参考文献[9],假设 $A = 0.00022$ , $B = 2.7 \times 10^{-6}$ , $c = 1.124$ , $a = 30$ 。其他参数值参考Wang<sup>[9]</sup>和Grasselli<sup>[16]</sup>,将金融市场模型参数值假设为: $r = 0.04$ , $s_0 = 1$ , $\lambda = 2$ , $c_1 = 0.9051$ , $c_2 = 0.0023$ , $k = 1.8$ , $\theta_v = 0.04$ , $\sigma_v = 0.04$ , $v_0 = 0.003$ , $\rho = -0.7$ , $s_1 = 67$ 。随机工资模型参数值假设为: $r_L = 0.06$ , $\sigma_L = 0.03$ , $l_0 = 5.5$ 。TBP计划其他参数值假设为: $T = 10$ , $r = 65$ , $\omega = 100$ , $n(t) = 100$ , $A(t) \approx 345$ , $R(t) \approx 214$ , $B^* = 500$ , $\beta = 0.02$ , $\xi = 0.02$ , $\lambda_1 = 5$ , $\lambda_2 = 0.3$ , $x_0 = 4000$ , $c_0 = 0.015$ 。

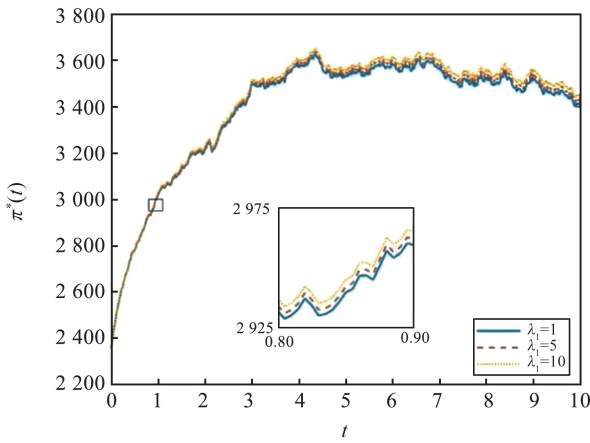
#### 3.1 惩罚因子对最优投资和给付调整策略的影响

本节将探讨 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 对最优投资策略和最优给付调整策略的影响, $\lambda_1$ 是实际给付与目标给付负偏差的惩罚权重, $\lambda_2$ 是终端不连续性风险的权重。若 $\lambda_1 = 0$ ,则目标函数退化为实际给付与预设目标之间的期望的最小值。

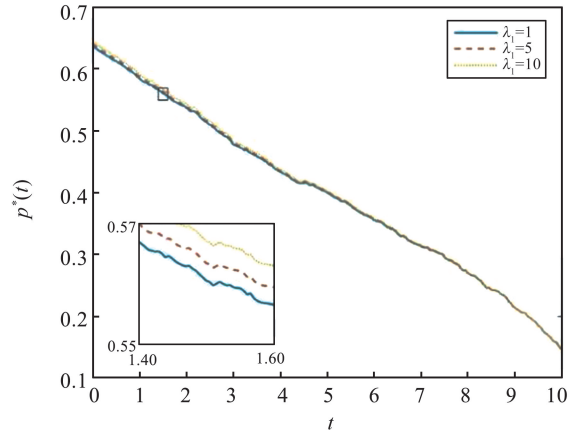
根据式(13)中定义的目标函数,权重 $\lambda_1$ 可以理解为计划成员的风险厌恶水平, $\lambda_1$ 越大说明计划成员的风险厌恶程度越高。权重 $\lambda_2$ 可以理解为计划成员对终端未给付的大量代际补贴的厌恶程度,当 $\lambda_2$ 较低时,说明成员愿意接受高额的代际补贴,倾向和后代分担更多的盈余(亏损)。

图1展示了参数 $\lambda_1$ 对最优投资策略 $\pi^*(t)$ 和最优给付调整策略 $p^*(t)$ 的影响。 $\pi^*(t)$ 随着 $\lambda_1$ 的增大而增大, $\lambda_1$ 越大说明计划成员希望获得超过目标给付的收益,因此基金管理者会增加股票的投资来提高回报率。该结论与传统的凸效用优化框架下的结果不一致,成员的风险厌恶程度越高,个人承担的风险就越少,然而,考虑到本文模型中与参数 $\lambda_1$ 相关的线性惩罚,计划可以通过减少目标给付的短缺来中和较高的 $\lambda_1$ 值,即基金管理者可以通过在股票上投入更多资金来获得更高的风险溢价。此外,基金管理者在早期为了促进财富的快速积累,对股票的配置采取较为激进的投资策略。随着时间推移,资产在剩余期限内可以稳定维持在目标给付水平附近并在期末达到目标给付水平,所以基金管理者在后期会逐渐缩减股票的投资比例。 $p^*(t)$ 和 $\lambda_1$ 呈正相关关系,说明当计划成员的风险厌恶水平较高时,计划成员获得的收益大于目标给付。

图2刻画了参数 $\lambda_2$ 对 $\pi^*(t)$ 和 $p^*(t)$ 的影响,可以看出 $\pi^*(t)$ 和 $\lambda_2$ 呈负相关关系,与Gollier<sup>[11]</sup>的研究结果相同,对代际风险分担的偏好导致更多的风险分担。 $\lambda_2$ 决定盈余(亏损)部分分摊到跨期支付中或保留在遗产基金中的比例。 $\lambda_2$ 越大(即对代际风险分担的厌恶程度越高),说明成员的风险分担意愿越低,计划成员不希望从后代借入/借出太多收益,盈余(亏损)部分分摊到对当前退休成员的给付中的比例就越小,而留给后代的比例越大,所以 $p^*(t)$ 与 $\lambda_2$ 呈负相关关系。当计划有盈余时出现反例,此时计划成员倾向于后代分享盈余,风险分担厌恶水平降低( $\lambda_2$ 降低),基金管理者会减少当前退休成员的收益( $p^*(t)$ 减小)。



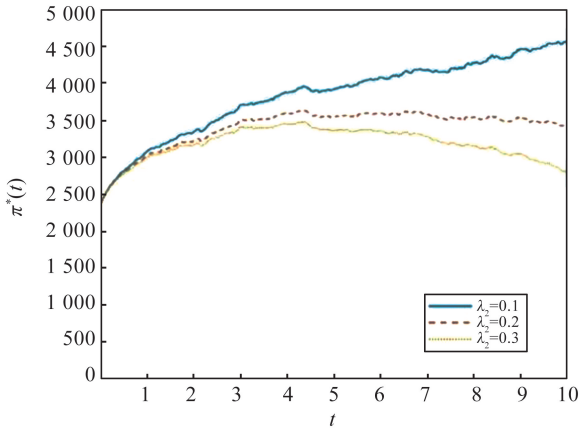
(a) 参数 $\lambda_1$ 对 $\pi^*(t)$ 的影响



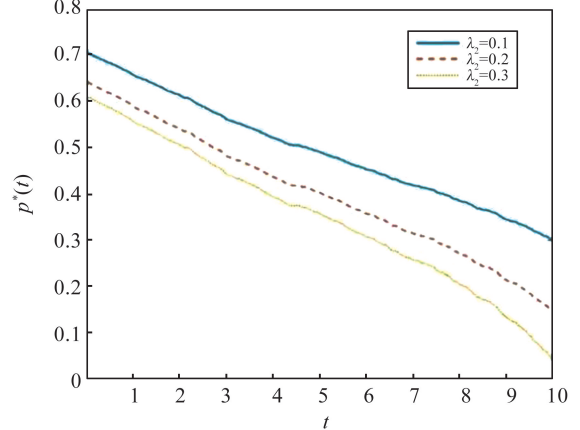
(b) 参数 $\lambda_1$ 对 $p^*(t)$ 的影响

图1 参数 $\lambda_1$ 对 $\pi^*(t)$ 和 $p^*(t)$ 的影响

Fig.1 The effect of parameter  $\lambda_1$  on  $\pi^*(t)$  and  $p^*(t)$



(a) 参数 $\lambda_2$ 对 $\pi^*(t)$ 的影响



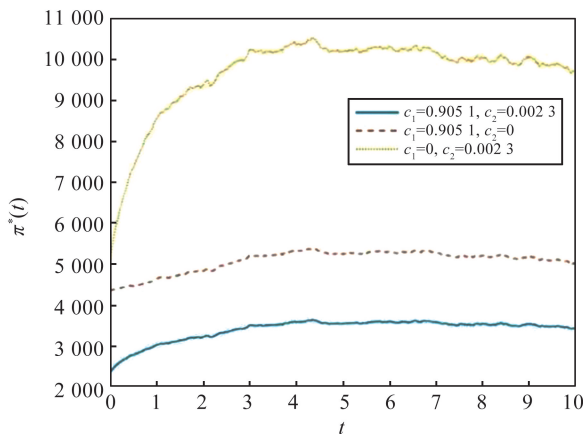
(b) 参数 $\lambda_2$ 对 $p^*(t)$ 的影响

图2 参数 $\lambda_2$ 对 $\pi^*(t)$ 和 $p^*(t)$ 的影响

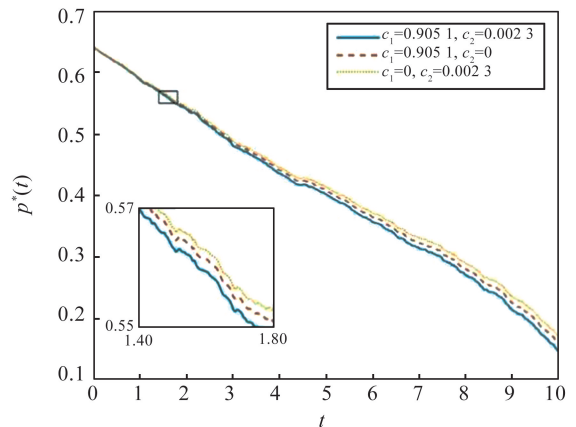
Fig.2 The effect of parameter  $\lambda_2$  on  $\pi^*(t)$  and  $p^*(t)$

### 3.2 Heston 模型、3/2 模型和 4/2 模型下最优投资策略和最优给付调整策略比较

图3 对比了 Heston 模型、3/2 模型和 4/2 模型下的最优投资策略和最优给付调整策略。当  $c_1=0.905 1$ ,  $c_2=0$  时, 4/2 模型退化为 Heston 模型; 当  $c_1=0$ ,  $c_2=0.002 3$  时, 4/2 模型退化为 3/2 模型。数值分析表明, 当股票过程遵循 4/2 模型时, 股票的投资比例和给付最少。由式(18)可知,  $c_1 V(t)+c_2$  与股票的最优投资金额成反比。相反, 3/2 模型对应的最优投资策略中, 股票的投资金额显著较大。



(a) 参数 $c_1$ 和 $c_2$ 对 $\pi^*(t)$ 的影响



(b) 参数 $c_1$ 和 $c_2$ 对 $p^*(t)$ 的影响

图3 参数 $c_1$ 和 $c_2$ 对 $\pi^*(t)$ 和 $p^*(t)$ 的影响

Fig.3 The effect of parameters  $c_1$  and  $c_2$  on  $\pi^*(t)$  and  $p^*(t)$

## 4 结论

本文考虑了带有随机工资的最优投资选择策略和最优给付调整策略问题,养老金支付取决于计划的财务状况,不同代际间进行风险分担。本文在 Wang<sup>[9]</sup>的基础上引入随机波动,假设股票的价格过程由 4/2 模型所驱动,同时考虑了给付充足性、给付稳定性和代际公平性这 3 个目标,利用随机控制理论构建相应的 HJB 方程,推导出最优投资和给付调整策略的闭式解。最后,运用数值算例说明对于合理的初始财富水平和缴费水平,本文所得到的最优策略可以有效地实现上述目标,使得养老金计划维持稳定和充足的给付水平。研究表明:(i) 最优投资策略  $\pi^*(t)$  和最优给付调整策略  $p^*(t)$  与惩罚权重  $\lambda_1$  呈正相关关系,与惩罚权重  $\lambda_2$  呈负相关关系;(ii) 与 3/2 模型和 Heston 模型对比,4/2 模型下的股票投资金额最少,基金管理者对退休成员的给付也最少。

### 参考文献:

- [1] HABERMAN S, SUNG J H. Dynamic approaches to pension funding[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1994, 15(2):151-162.
- [2] NGWIRA B, GERRARD R. Stochastic pension fund control in the presence of Poisson jumps[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2007, 40(2):283-292.
- [3] BATTOCCHIO P, MENONCIN F. Optimal pension management in a stochastic framework[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2004, 34(1):79-95.
- [4] ZHANG Ling, LI Danping, LAI Yongzeng. Equilibrium investment strategy for a defined contribution pension plan under stochastic interest rate and stochastic volatility[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 368:112536.
- [5] GERRARD R, HABERMAN S, VIGNA E. Optimal investment choices post-retirement in a defined contribution pension scheme[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2004, 35(2):321-342.
- [6] CHANG Hao, WANG Chunfeng, FANG Zhenming, et al. Defined contribution pension planning with a stochastic interest rate and mean-reverting returns under the hyperbolic absolute risk aversion preference[J]. IMA Journal of Management Mathematics, 2020, 31(2):167-189.
- [7] CHANG Hao, LI Jiaao. Robust equilibrium strategy for DC pension plan with the return of premiums clauses in a jump-diffusion model[J]. Optimization, 2023, 72(2):463-492.
- [8] CHEN Lv, LI Danping, WANG Yumin, et al. The optimal cyclical design for a target benefit pension plan[J]. Journal of Pension Economics and Finance, 2023, 22(3):284-303.
- [9] WANG Suxin, LU Yi, SANDERS B. Optimal investment strategies and intergenerational risk sharing for target benefit pension plans[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2018, 80:1-14.
- [10] WANG Suxin, LU Yi. Optimal investment strategies and risk-sharing arrangements for a hybrid pension plan[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2019, 89:46-62.
- [11] GOLLIER C. Intergenerational risk-sharing and risk-taking of a pension fund[J]. Journal of Public Economics, 2008, 92(5/6):1463-1485.
- [12] CUI Jiajia, JONG D F, PONDS E. Intergenerational risk sharing within funded pension schemes[J]. Journal of Pension Economics and Finance, 2011, 10(1):1-29.
- [13] RONG Ximin, CHENG Tao, ZHAO Hui. Target benefit pension plan with longevity risk and intergenerational equity[J]. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 2023, 53(1):84-103.
- [14] LIU Zilan, ZHANG Huanying, HE Lei. Optimal assets allocation and benefit adjustment strategy with longevity risk for target benefit pension plans[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2023, 19(6):3931-3951.
- [15] HESTON S L. A simple new formula for options with stochastic volatility[EB/OL]. (1997-09-19)[2023-10-16]. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:150914514>.
- [16] GRASSELLI M. The 4/2 stochastic volatility model: a unified approach for the Heston and the 3/2 model[J]. Mathematical Finance, 2017, 27(4):1013-1034.
- [17] CHENG Y Y, ESCOBAR A M. Robust portfolio choice under the 4/2 stochastic volatility model[J]. IMA Journal of

Management Mathematics, 2022, 34(1):221-256.

- [18] CHENG Y Y, ESCOBAR A M. Optimal investment strategy in the family of 4/2 stochastic volatility models[J]. Quantitative Finance, 2021, 21(10):1723-1751.
- [19] LIN Wei, LI Shenghong, LUO Xingguo, et al. Consistent pricing of VIX and equity derivatives with the 4/2 stochastic volatility plus jumps model[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 447(2):778-797.
- [20] WANG W Y, MURAVEY D, SHEN Y, et al. Optimal investment and reinsurance strategies under 4/2 stochastic volatility model[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2023, 2023(5):413-449.
- [21] ZHANG Yumo. Mean-variance asset-liability management under CIR interest rate and the family of 4/2 stochastic volatility models with derivative trading[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2023, 19(6):4022-4063.
- [22] HATA H, YASUDA K. Expected power utility maximization with delay for insurers under the 4/2 stochastic volatility model [J]. Mathematical Control and Related Fields, 2024, 14(1):16-50.

(编辑:李艺)

附录 A

定理 2 的证明 根据一阶条件,可以得到

$$\pi^* = -\left(\frac{\lambda v}{c_1 v + c_2} \cdot \frac{J_x}{J_{xx}} + \sigma_L l \frac{J_{xl}}{J_{xx}} + \frac{\rho \sigma_v v}{c_1 v + c_2} \cdot \frac{J_{xv}}{J_{xx}}\right), \tag{A1}$$

$$p^* = \frac{1}{H(t)} \left( \frac{1}{2} e^{rt} J_x + B^* e^{\beta t} + \frac{\lambda_1}{2} \right). \tag{A2}$$

将式(A1)、(A2)代入式(15),得到

$$\begin{aligned} & J_t + \left( rx + D(t) e^{rt} - B^* e^{\beta t} - \frac{\lambda_1}{2} \right) J_x - \frac{1}{4} e^{rt} J_x^2 + (r_L + \sigma_L \lambda (c_1 v + c_2)) l J_l \\ & + k(\theta_v - v) J_v + \frac{1}{2} \sigma_L^2 \left( c_1 \sqrt{v} + \frac{c_2}{\sqrt{v}} \right)^2 l^2 J_{ll} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v J_{vv} + \rho \sigma_v \sigma_L (c_1 v + c_2) l J_{lv} \\ & - \frac{1}{2} \frac{(c_1 v + c_2)^2}{v} \left( \frac{\lambda v}{c_1 v + c_2} \cdot \frac{J_x}{J_{xx}} + \sigma_L l \frac{J_{xl}}{J_{xx}} + \frac{\rho \sigma_v v}{c_1 v + c_2} \cdot \frac{J_{xv}}{J_{xx}} \right)^2 J_{xx} - \frac{1}{4} e^{-rt} \lambda_1^2 = 0. \end{aligned} \tag{A3}$$

然后,根据边界条件式(17),假设式(A3)解的形式为

$$J(t, x, l, v) = \lambda_2 e^{-rt} f(t, v) (x - g(t) - h(t)l)^2 + u(t), \tag{A4}$$

其中,边界条件为

$$f(T, v) = 1, \quad g(T) = x_0 e^{rT}, \quad h(T) = 0, \quad u(T) = 0. \tag{A5}$$

将式(A4)代入式(A3),并按照  $(x - g - hl)^2$  和  $2f(x - g - hl)$  进行分离变量后,得到如下微分方程组:

$$f_t + (r - \lambda^2 v) f - \lambda_2 f^2 + (k(\theta_v - v) - 2\rho \lambda \sigma_v v) f_v - \rho^2 \sigma_v^2 v \frac{f_v^2}{f} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v f_{vv} = 0, \quad f(T, v) = 1, \tag{A6}$$

$$g_t - rg - D(t) e^{rt} + B^* e^{\beta t} + \frac{\lambda_1}{2} = 0, \quad g(T) = x_0 e^{rT}, \tag{A7}$$

$$h_t + (r_L - r) h = 0, \quad h(T) = 0, \tag{A8}$$

$$u_t - \frac{1}{4} e^{-rt} \lambda_1^2 = 0, \quad u(T) = 0. \tag{A9}$$

首先求解式(A6),假设  $F(t, v) = \frac{1}{f(t, v)}$ ,得到如下偏导数:

$$F_t = -\frac{f_t}{f^2}, \quad F_v = -\frac{f_v}{f^2}, \quad F_{vv} = 2 \frac{f_v^2}{f^3} - \frac{f_{vv}}{f^2}. \tag{A10}$$

将式(A10)代入式(A6),式(A6)可重写为以下形式:

$$F_t - (r - \lambda^2 v) F - [2\rho \lambda \sigma_v - k(\theta_v - v)] F_v - v \sigma_v^2 (1 - \rho^2) \frac{F_v^2}{F} + \frac{1}{2} v \sigma_v^2 F_{vv} + \lambda_2 = 0, \tag{A11}$$

其中,边界条件为  $F(T, v) = 1$ 。

假设方程(A11)的解的形式可以表示为

$$F(t, v) = \lambda_2 \int_t^T \tilde{F}(u, v) du + \tilde{F}(t, v), \quad (\text{A12})$$

其中,  $\tilde{F}(t, v)$  满足如下方程

$$\tilde{F}_t - (r - \lambda^2 v) \tilde{F} - [2\rho\lambda\sigma_v - k(\theta_v - v)] \tilde{F}_v - v\sigma_v^2(1 - \rho^2) \frac{\tilde{F}_v^2}{\tilde{F}} + \frac{1}{2} v\sigma_v^2 \tilde{F}_{vv} = 0, \quad (\text{A13})$$

其中,边界条件

$$\tilde{F}(T, v) = 1。$$

当  $t=T$  时,有  $F(T, v) = \lambda_2 \int_T^T \tilde{F}(u, v) du + \tilde{F}(T, v) = 1$ , 因此,式(31)的边界条件成立。

对于任意函数  $\tilde{F}(u, v)$ , 定义如下变分算子  $\nabla$ :

$$\nabla \tilde{F}(u, v) = -(r - \lambda^2 v) \tilde{F} - [2\rho\lambda\sigma_v - k(\theta_v - v)] \tilde{F}_v - v\sigma_v^2(1 - \rho^2) \frac{\tilde{F}_v^2}{\tilde{F}} + \frac{1}{2} v\sigma_v^2 \tilde{F}_{vv}。 \quad (\text{A14})$$

式(A13)可重写为

$$\frac{\partial \tilde{F}(t, v)}{\partial t} + \nabla \tilde{F}(t, v) = 0, \quad \tilde{F}(T, v) = 1。 \quad (\text{A15})$$

然后,有

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, v)}{\partial t} &= -\lambda_2 \tilde{F}(t, v) + \frac{\partial \tilde{F}(t, v)}{\partial t} \\ &= \lambda_2 \left( \int_t^T \frac{\partial \tilde{F}(u, v)}{\partial u} du - \tilde{F}(T, v) \right) + \frac{\partial \tilde{F}(t, v)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

$$F_v(t, v) = \lambda_2 \int_t^T \tilde{F}_v(u, v) du + \tilde{F}_v(t, v), \quad (\text{A17})$$

$$F_{vv}(t, v) = \lambda_2 \int_t^T \tilde{F}_{vv}(u, v) du + \tilde{F}_{vv}(t, v)。 \quad (\text{A18})$$

根据式(A17)、(A18),可以得到

$$\nabla F(t, v) = \lambda_2 \int_t^T \nabla \tilde{F}(u, v) du + \nabla \tilde{F}(t, v)。 \quad (\text{A19})$$

根据式(A16)、(A19),式(A11)左侧可以化简为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F(t, v)}{\partial t} + \nabla F(t, v) + \lambda_2 \\ &= \lambda_2 \left[ \int_t^T \left( \frac{\partial \tilde{F}(u, v)}{\partial u} + \nabla \tilde{F}(u, v) \right) du - \tilde{F}(T, v) + 1 \right] \\ &\quad + \left( \frac{\partial \tilde{F}(t, v)}{\partial t} + \nabla \tilde{F}(t, v) \right) = 0, \end{aligned}$$

因此,式(A12)满足方程(A11)。

假设式(A13)解的形式为  $\tilde{F}(T, v) = e^{A_1(t)v + A_2(t)}$ , 边界条件为  $A_1(T) = 0$  和  $A_2(T) = 0$ , 将  $\tilde{F}(T, v) = e^{A_1(t)v + A_2(t)}$  代入式(A13), 消除对  $v$  的影响, 得到如下2个方程:

$$A_1'(t) = \frac{1}{2} \sigma_v^2 (1 - 2\rho^2) A_1^2(t) + kA_1(t) - \lambda^2, \quad (\text{A20})$$

$$A_2'(t) = (2\rho\lambda\sigma_v - k\theta_v) A_1(t) + r。 \quad (\text{A21})$$

求解式(A20)、(A21), 得到

$$A_1(t) = \begin{cases} \frac{m_1 m_2 (1 - e^{-\sqrt{\Delta_{A_1}}(T-t)})}{m_1 - m_2 e^{-\sqrt{\Delta_{A_1}}(T-t)}}, & \Delta_{A_1} > 0, \\ \frac{2\sigma_v^2(1-2\rho^2)m_3^2(T-t)}{2\sigma_v^2(1-2\rho^2)m_3(T-t) - 1}, & \Delta_{A_1} = 0, \\ \frac{\sqrt{-\Delta_{A_1}}}{\sigma_v^2(1-2\rho^2)} \tan\left(\arctan\frac{2\sigma_v^2(2\rho^2-1)m_3}{\sqrt{-\Delta_{A_1}}} - \frac{\sqrt{-\Delta_{A_1}}}{2}(T-t)\right) + m_3, & \Delta_{A_1} < 0, \end{cases} \quad (A22)$$

$$A_2(t) = (2\rho\lambda\sigma_v - k\theta_v) \int_t^T A_1(s) ds + r(T-t), \quad (A23)$$

其中,

$$\Delta_{A_1} = k^2 + 2\sigma_v^2(1-2\rho^2)\lambda^2, \quad m_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{\Delta_{A_1}}}{\sigma_v^2(1-2\rho^2)}, \quad m_3 = \frac{k}{\sigma_v^2(2\rho^2-1)}. \quad (A24)$$

根据式 (A12), 有

$$F(t, v) = \lambda_2 \int_t^T e^{A_1(u)v + A_2(u)} du + e^{A_1(t)v + A_2(t)}, \quad (A25)$$

进而, 可以得到

$$f(t, v) = \frac{1}{F(t, v)} = \frac{1}{\lambda_2 \int_t^T e^{A_1(u)v + A_2(u)} du + e^{A_1(t)v + A_2(t)}}. \quad (A26)$$

求解式 (A7) — (A9), 得到

$$g(t) = e^{-r(s-T)} \int_t^T \left[ (D(s)e^{rLs} - B^* e^{\beta s}) - \frac{\lambda_1}{2} \right] ds + x_0 e^{r(2T-t)}, \quad (A27)$$

$$h(t) = 0, \quad u(t) = -\frac{\lambda_1^2}{4r} (e^{-rT} - e^{-rt}). \quad (A28)$$

将式 (A26) — (A28) 代入式 (A1) 和 (A2), 即得到定理 2 的结论。证毕。