**文章编号**:1671-9352(2025)11-0020-07 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.258

# 单群 $A_5$ 和 PSL(2,7)的一个新刻画

邝美群,卢家宽,李玉,张博儒*
(广西师范大学数学与统计学院, 广西 桂林 541006)

**摘要**:设 $G$ 是有限群,记 $m(G)=\sum_{g\in G}\frac{1}{o(g)}$,其中 $o(g)$ 表示 $g$ 的阶,而用 $h(G)$ 表示 $G$ 中元素的最高阶。本文给出 5 次交错群 $A_5$ 和单群 PSL(2,7)的一个新刻画,即 $G\cong A_5$ 当且仅当 $m(G)=m(A_5)$ 且 $h(G)=h(A_5)$; $G\cong \mathrm{PSL}(2,7)$ 当且仅当 $m(G)=m(\mathrm{PSL}(2,7))$ 且 $h(G)=h(\mathrm{PSL}(2,7))$。

**关键词**:元素的阶;交错群;单群;sylow 子群;有限群
**中图分类号**:O152.1 **文献标志码**:A
**引用格式**:邝美群,卢家宽,李玉,等.单群 $A_5$ 和 PSL(2,7)的一个新刻画[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):20-26.

# A new characterization of $A_5$ and PSL(2,7)

KUANG Meiqun, LU Jiakuan, LI Yu, ZHANH Boru*
(School of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin 541006, Guangxi, China)

**Abstract**: Let $G$ be a finite group, and let $m(G)=\sum_{g\in G}\frac{1}{o(g)}$, where $o(g)$ denotes the order of $g\in G$, and $h(G)$ is the maximal order of the elements in $G$. We give a new characterization of $A_5$ and PSL(2,7), that is, $G\cong A_5$ if and only if $m(G)=m(A_5)$ and $h(G)=h(A_5)$. $G\cong$ PSL(2,7) if and only if $m(G)=m(\mathrm{PSL}(2,7))$ and $h(G)=h(\mathrm{PSL}(2,7))$.

**Key words**: the order of elements; alternating group; simple group; sylow subgroup; finite group

## 0 引言

本文涉及的群都是有限群。众所周知,$A_5$ 是最小阶非交换单群,PSL(2,7)是阶次小的非交换单群。目前,对 $A_5$ 和 PSL(2,7)有许多刻画,例如,文献[1]使用元素阶的集合刻画了 $A_5$;文献[2]通过同阶元的个数组成的集合刻画了 PSL(2,7);文献[3]通过元素阶之和及群的阶刻画了 $A_5$ 和 PSL(2,7);而文献[4]则通过元素阶之和以及元素的最高阶刻画了 $A_5$ 和 PSL(2,7)。

设 $G$ 是群,记 $\psi(G)=\sum_{g\in G}o(g)$, $m(G)=\sum_{g\in G}\frac{1}{o(g)}$,其中 $o(g)$ 表示 $g\in G$ 的阶。自从文献[5]引入 $\psi(G)$ 的概念后,人们进一步对元素阶的和 $\psi(G)$ 的算术条件与有限群 $G$ 的结构之间的关系进行了研究并且得到大量有趣的结果[6-9]。文献[10]给出了一个有趣的猜想:设 $S$ 是单群,若 $G$ 是阶为 $|S|$ 的非单群,则 $\psi(S)<\psi(G)$。在猜想中,如果通过 $\psi(G)$ 刻画有限单群,显然是非常困难的。因此在本文中,希望通过元素阶的最高阶以及 $m(G)$ 的数量刻画单群 $A_5$ 和 PSL(2,7)。

$\pi(G)$、$h(G)$、$n_p(G)$、$i_k(G)$ 分别表示群 $G$ 中元素阶的集合、元素的最高阶、Sylow $p$-子群的个数、阶为 $k$

**收稿日期**:2023-12-20; **网络出版时间**:2024-05-30 09:00:34
**基金项目**:广西自然科学基金资助项目(2024GXNSFAA010514, 2022GXNSFBA035572);国家自然科学基金资助项目(12301022);广西研究生教育创新计划资助项目(YCSW2023175)
**第一作者**:邝美群(1997— ),女,硕士研究生,研究方向为有限群及其表示. E-mail:kuangmq97@163.com
* **通信作者**:张博儒(1990— ),男,讲师,硕士生导师,博士,研究方向为有限群及其表示. E-mail:brzhangyq@163.com

的元素的个数,在不混淆的情况下,分别简记为 $\pi$、$h$、$n_p$、$i_k$。其他未加说明的术语和符号均是标准的,可参考文献[11]。

## 1　主要引理

本章给出本文中会用到的一些基本引理。

$A_5$ 有 15 个 2 阶元、20 个 3 阶元、24 个 5 阶元,因此 $h(A_5)=5$, $m(A_5)=\frac{599}{30}$。

**引理 1**　设有限群 $G$ 满足 $m(G)=m(A_5)$ 且 $h(G)=h(A_5)$,则 $|G|=60$。

**证明**　由 $h(G)=5$,可设 $|G|=2^a\times3^b\times5^c$,其中 $a,b,c$ 是非负整数且 $c\geqslant1$。由 $|G|=1+i_2+i_3+i_4+i_5$ 知

$$1+\frac{|G|-1}{5}\leqslant1+\frac{i_2}{2}+\frac{i_3}{3}+\frac{i_4}{4}+\frac{i_5}{5}=m(G)=\frac{599}{30},$$

从而 $|G|\leqslant95$。下对 $|\pi(G)|$ 进行讨论。

**情形 1**　设 $|\pi(G)|=2$,则 $|G|=5^c$,由

$$m(G)=1+\frac{i_5}{5}=1+\frac{5^c-1}{5}=\frac{599}{30},$$

知 $5^{c-1}=\frac{115}{6}$,矛盾。

**情形 2**　设 $|\pi(G)|=3$,则 $|G|=3^b\times5^c$ 或 $|G|=2^a\times5^c$,其中 $a,b,c$ 均为大于或等于 1 的整数,下面对 $|G|$ 进行讨论:

假设 $|G|=3^b\times5^c$,由 $|G|\leqslant95$ 知 $|G|\in\{15,45,75\}$。若 $|G|=15$,则 $G\cong C_{15}$,从而 $G$ 中存在 15 阶元,这与 $h(G)=5$ 矛盾;若 $|G|=45=3^2\times5$,由 Sylow 定理知 $n_3=n_5=1$,从而 $i_3=8$, $i_5=4$,因此 $|G|=1+i_3+i_5=1+8+4=13$,这与 $|G|=45$ 矛盾;若 $|G|=75=3\times5^2$,由 Sylow 定理知 $n_5=1$,从而 $i_5=24$,于是 $i_3=|G|-1-i_5=75-1-24=50$,因此

$$\frac{599}{30}=m(G)=1+\frac{i_3}{3}+\frac{i_5}{5}=1+\frac{50}{3}+\frac{24}{5}=\frac{337}{15},$$

矛盾。

假设 $|G|=2^a\times5^c$,由 $|G|=2^a\times5^c\leqslant95$ 知 $c\leqslant2$。当 $c=2$ 时,由 $|G|=2^a\times5^2\leqslant95$ 知 $a=1$,从而 $|G|=2\times5^2=50$。再由 Sylow 定理知 $n_5=1$,从而 $i_5=24$, $i_2=|G|-1-i_5=50-1-24=25$,因此

$$\frac{599}{30}=m(G)=1+\frac{i_2}{2}+\frac{i_5}{5}=1+\frac{25}{2}+\frac{24}{5}=\frac{183}{10},$$

矛盾。当 $c=1$ 时,由 $|G|=2^a\times5\leqslant95$ 知 $a\leqslant4$。若 $a\leqslant3$ 时,$|G|=2^a\times5\leqslant2^3\times5=40$,此时由 Sylow 定理知 $n_5=1$,从而 $i_5=4$,因此 $G$ 中至多有 $|G|-i_5=40-4=36$ 个 2-元素。再由 $h(G)=5$,可得

$$\frac{599}{30}=m(G)=1+\frac{i_2}{2}+\frac{i_4}{4}+\frac{i_5}{5}\leqslant1+\frac{|G|-i_5-1}{2}+\frac{i_5}{5}\leqslant1+\frac{35}{2}+\frac{4}{5}=\frac{193}{10},$$

矛盾。下面讨论 $a=4$ 的情形,此时 $|G|=2^a\times5=2^4\times5=80$,由 Sylow 定理知 $n_5=1$ 或 16。若 $n_5=1$,令 $P_5\in\mathrm{Syl}_5(G)$,则 $P_5\trianglelefteq G$,由文献[11]中的定理 1.5.7,得

$$N_G(P_5)/C_G(P_5)=G/C_G(P_5)\lesssim\mathrm{Aut}(P_5)\cong C_4,$$

从而 $4\mid|C_G(P_5)|$,故 $2\mid|C_G(P_5)|$,于是 $G$ 中有 $2\times5=10$ 阶元,与 $h(G)=5$ 矛盾。若 $n_5=16$,则 $i_5=16\times4=64$,由

$$\frac{599}{30}=m(G)=1+\frac{i_2}{2}+\frac{i_4}{4}+\frac{i_5}{5}=1+\frac{i_2}{2}+\frac{i_4}{4}+\frac{64}{5}=\frac{i_2}{2}+\frac{i_4}{4}+\frac{69}{5},$$

整理得 $2i_2+i_4=\frac{74}{3}$,矛盾。

**情形 3**　设 $|\pi(G)|=4$,则 $|G|=2^a\times3^b\times5^c$,其中 $a,b,c$ 均为大于等于 1 的整数。由 $|G|=2^a\times3^b\times5^c\leqslant95$

知 $c=1$, $b\leqslant 2$, $a\leqslant 2$,即$|G|=2^a\times 3^b\times 5\in\{2\times 3^2\times 5,2\times 3\times 5,2^2\times 3\times 5\}$。

令$P_2\in \mathrm{Syl}_2(G)$,若$|G|=2\times 3^2\times 5=90$,则 $P_2$ 循环,故由文献[11]中的定理2.5.5知 $G$ 有正规2-补 $N$, $|N|=3^2\times 5=45$。因为 $N\trianglelefteq G$,所以 $N$ 包含 $G$ 的所有3-元素和5-元素,故由 Sylow 定理,得 $n_3=n_5=1$,从而$i_3=8$, $i_5=4$。因此 $n_2=i_2=|G|-1-i_3-i_5=90-1-8-4=77$,这与 $n_2\mid |G|$矛盾。

若$|G|=2\times 3\times 5=30$,同理可得矛盾,因此$|G|=2^2\times 3\times 5=60$。

**引理 2** 设有限群 $G$ 满足 $m(G)=m(A_5)$且 $h(G)=h(A_5)$,则 $G$ 是单群。

**证明** 由引理1知$|G|=2^2\times 3\times 5$。假设 $G$ 不是单群且 $N\neq G$ 是 $G$ 的极小正规子群,下面对$|\pi(N)|$讨论。

**情形 1** 设$|\pi(N)|=4$,则$|N|=2\times 3\times 5=30$,由 $N\trianglelefteq G$ 知 $N$ 包含 $G$ 的所有5-元素,故 $G$ 的 Sylow 5-子群全部含于 $N$ 中。再由 $N$ 的极小性可知 $n_5(N)=6$,从而 $N$ 中有 $6\times 4=24$ 个5阶元。同样地,$n_3(N)=10$,从而 $N$ 中有 $10\times 2=20$ 个3阶元。因此$|N|>24+20=44$,这与$|N|=30$矛盾。

**情形 2** 设$|\pi(N)|=3$,则 $N$ 和 $G/N$ 可解,从而 $G$ 可解,于是 $N$ 是初等交换 $p$-群($p=2,3,5$),矛盾。

**情形 3** 设$|\pi(N)|=2$,若$|N|=5$,则由文献[11]中的定理1.5.7,得

$$N_G(N)/C_G(N)=G/C_G(N)\lesssim \mathrm{Aut}(N)\cong C_4,$$

从而$3\mid |C_G(N)|$,于是 $G$ 中有 $3\times 5=15$ 阶元,这与 $h(G)=5$ 矛盾。

若$|N|=3$,同理可知 $G$ 中有15阶元,这与 $h(G)=5$ 矛盾。

若$|N|=2^2$,则由文献[11]中的定理1.5.7,得

$$N_G(N)/C_G(N)=G/C_G(N)\lesssim \mathrm{Aut}(N),$$

当 $N\cong C_4$ 时,$\mathrm{Aut}(N)\cong C_2$,此时$|C_G(N)|\in\{60,30\}$,因此$5\mid |C_G(N)|$,于是 $G$ 中有 $2\times 5=10$ 阶元,与 $h(G)=5$矛盾。同样地,当 $N\cong C_2\times C_2$ 时,$G$ 中有10阶元,这与 $h(G)=5$ 矛盾。

若$|N|=2$,则 $N\leqslant Z(G)$,于是 $G$ 中有10阶元,这与 $h(G)=5$ 矛盾。

因此这样的 $N$ 不存在,从而 $G$ 是单群。

## 2 主要结果

**定理 1** 设 $G$ 是有限群,则 $G\cong A_5$ 当且仅当 $m(G)=m(A_5)$, $h(G)=h(A_5)$。

**证明** 显然,必要性成立,故只需证充分性。

由引理1、2,$G$ 是60阶单群,再由文献[11]中的定理2.4.7,得 $G\cong A_5$。

PSL(2,7)有21个2阶元、56个3阶元、42个4阶元和48个7阶元,因此 $h(\mathrm{PSL}(2,7))=7$, $m(\mathrm{PSL}(2,7))=\dfrac{998}{21}$。

**定理 2** 设 $G$ 是有限群,则 $G\cong \mathrm{PSL}(2,7)$ 当且仅当 $m(G)=m(\mathrm{PSL}(2,7))$, $h(G)=h(\mathrm{PSL}(2,7))$。

**证明** 显然,只要证明当 $m(G)=m(\mathrm{PSL}(2,7))$, $h(G)=h(\mathrm{PSL}(2,7))$时,$G\cong \mathrm{PSL}(2,7)$即可。因为 $h(G)=7$,假设$|G|=2^a\times 3^b\times 5^c\times 7^d$,其中 $a,b,c,d$ 均为非负整数且 $d\geqslant 1$,由

$$1+\frac{|G|-1}{7}\leqslant 1+\frac{i_2}{2}+\frac{i_3}{3}+\frac{i_4}{4}+\frac{i_5}{5}+\frac{i_6}{6}+\frac{i_7}{7}=m(G)=\frac{998}{21},$$

知$|G|\leqslant 326$,所以 $d=1$ 或2。下面分8个步骤对定理2进行证明。

**步骤 1** $d=1$。

若 $d=2$,则$|G|=2^a\times 3^b\times 5^c\times 7^2\leqslant 326$,从而 $2^a\times 3^b\times 5^c\leqslant\dfrac{326}{49}<7$,因此 $c\leqslant 1$。而由 Sylow 定理知 $n_7=1$,故 $i_7=48$。若 $c=1$,则 $a=b=0$,从而$|G|=5\times 7^2=245$,再由 Sylow 定理,$n_5=1$,于是 $G$ 中存在 $5\times 7=35$ 阶元,这与 $h(G)=7$ 矛盾。因此 $c=0$,由此可得 $2^a\times 3^b\leqslant 6$,这意味着 $b\leqslant 1$。

假设 $b=0$,则 $a=0,1,2$。当 $a=0$ 或1时,$|G|=7^2$ 或 $2\times 7^2=98$,由 $h(G)=7$,知

$$i_2=|G|-1-i_7\leqslant 98-1-48=49,$$

因此

$$\frac{998}{21}=m(G)=1+\frac{i_2}{2}+\frac{i_7}{7}\leqslant 1+\frac{49}{2}+\frac{48}{7}=\frac{453}{14},$$

矛盾。当 $a=2$ 时,$|G|=2^2\times 7^2=196$,由 $h(G)=7$ 知 $i_2+i_4=|G|-1-i_7=196-1-48=147$,有

$$\frac{998}{21}=m(G)=1+\frac{i_2}{2}+\frac{i_4}{4}+\frac{i_7}{7}=1+\frac{i_2}{2}+\frac{147-i_2}{4}+\frac{48}{7}=\frac{i_2}{4}+\frac{1\,249}{28},$$

这意味着 $i_2=\frac{35}{3}$,矛盾。

假设 $b=1$,则 $a=0$ 或 1。当 $a=0$ 时,$|G|=3\times 7^2=147$,由 $h(G)=7$,知

$$i_3=|G|-1-i_7=147-1-48=98,$$

从而

$$\frac{998}{21}=m(G)=1+\frac{i_3}{3}+\frac{i_7}{7}=1+\frac{98}{3}+\frac{48}{7}=\frac{851}{21},$$

矛盾。因此 $a=1$,此时 $|G|=2\times 3\times 7^2=294$,若令 $P_2\in \mathrm{Syl}_2(G)$,则 $P_2$ 循环,故由文献[11]中的定理 2.5.5 知 $G$ 有正规 2-补 $N$,$|N|=3\times 7^2=147$。由 $N\trianglelefteq G$ 知 $N$ 包含 $G$ 的所有 3-元素和 7-元素,由 $i_7=48$ 和 $h(G)=7$ 知 $i_3=|N|-1-i_7=147-1-48=98$,从而 $i_2+i_6=|G|-1-i_3-i_7=294-1-98-48=147$,于是

$$\frac{998}{21}=m(G)=1+\frac{i_2}{2}+\frac{i_3}{3}+\frac{i_6}{6}+\frac{i_7}{7}=1+\frac{i_2}{2}+\frac{98}{3}+\frac{147-i_2}{6}+\frac{48}{7}=\frac{i_2}{3}+\frac{2\,731}{42},$$

易得 $i_2=-\frac{105}{2}$,矛盾。

综上,$d=1$。

**步骤 2**　$n_7\neq 1$。

假设 $n_7=1$,由步骤 1 知 $|G|=2^a\times 3^b\times 5^c\times 7$,故 $i_7=6$。令 $P=\langle x\rangle\in \mathrm{Sly}_7(G)$,则由文献[11]中的定理 1.5.7,得

$$N_G(P)/C_G(P)=G/C_G(P)\lesssim \mathrm{Aut}(P)\cong C_6,$$

知 $|G/C_G(P)|\mid 6$,若 $c\geqslant 1$,则 $5\mid |C_G(P)|$,从而 $G$ 中存在 $7\times 5=35$ 阶元,这与 $h(G)=7$ 矛盾,因此 $c=0$。类似地,$a\leqslant 1$, $b\leqslant 1$,推出 $|G|=2^a\times 3^b\times 7\leqslant 2\times 3\times 7=42$,这意味着

$$\frac{998}{21}=m(G)=1+\frac{i_2}{2}+\frac{i_3}{3}+\frac{i_6}{6}+\frac{i_7}{7}\leqslant 1+\frac{|G|-1-i_7}{2}+\frac{i_7}{7}=1+\frac{|G|-1-i_7}{2}+\frac{6}{7}\leqslant 1+\frac{35}{2}+\frac{6}{7}=\frac{271}{14},$$

矛盾,从而 $n_7\neq 1$。

**步骤 3**　$a\neq 5$。

假设 $a=5$,则由步骤 1 及 $|G|\leqslant 326$ 知 $|G|=2^5\times 7=224$。由步骤 2 知 $n_7\neq 1$,从而 $n_7=8$,于是 $i_7=8\times 6=48$。再由 $h(G)=7$ 得 $i_2+i_4=|G|-1-i_7=224-1-48=175$,有

$$\frac{998}{21}=m(G)=1+\frac{i_2}{2}+\frac{i_4}{4}+\frac{i_7}{7}=1+\frac{i_2}{2}+\frac{175-i_2}{4}+\frac{48}{7}=\frac{i_4}{4}+\frac{1\,445}{28},$$

易得 $i_2=-\frac{49}{3}$, $i_4=\frac{574}{3}$,矛盾,因此 $a\neq 5$。

**步骤 4**　$n_7=8$。

由前面的讨论可知,下面只需讨论 $d=1$, $a\leqslant 4$ 且 $n_7>1$,即 $n_7=8,15,36$ 的情形。

假设 $n_7=36$,则 $|G|=2^2\times 3^2\times 7=252$,从而 $i_7=36\times 6=216$。令 $P_2\in \mathrm{Syl}_2(G)$, $P_3\in \mathrm{Syl}_3(G)$,则 $P_2\cong C_4$ 或 $P_2\cong C_2\times C_2$,而 $P_3\cong C_3\times C_3$。

若 $P_2\cong C_4$,由文献[11]中的定理 2.5.5 知 $G$ 有正规 2-补 $N$,并且 $|N|=3^2\times 7=63$,由 $N\trianglelefteq G$ 知 $N$ 包含 $G$ 的所有 7-元素,从而 $n_7=n_7(N)=1$,这与 $n_7=36$ 矛盾。若 $P_2\cong C_2\times C_2$,对每一个 $x\in P_2$,都有 $x\in C_G(x)\leqslant G$,因为 $P_2$ 交换,所以 $P_2\leqslant C_G(x)\leqslant G$,因此 $4\mid |C_G(x)|$。若 $|C_G(x)|>4$,则 $|C_G(x)|\in\{12,28,36,84,252\}$,即

$3 \mid |C_G(x)|$ 或 $7 \mid |C_G(x)|$,从而 $G$ 中存在 $2\times3=6$ 或 $2\times7=14$ 阶元,这与 $\pi(G)=\{1,2,3,7\}$ 矛盾。因此对每一个 2 阶元 $x\in G$,有 $|C_G(x)|=4$,此时若存在 $G$ 的两个不同的 Sylow 2-子群 $P_2$,$P_2'$的交非平凡,由 $|P_2|=|P_2'|=4$ 知 $|P_2\cap P_2'|=2$,从而 $P_2\cap P_2\cong C_2\cong\langle x\rangle$。因为 $P_2$ 和 $P_2'$均含于 $C_G(x)$,所以 $|C_G(x)|\geqslant 6$,这与 $|C_G(x)|=4$矛盾,因此 $G$ 的不同的 Sylow 2-子群的交平凡。同理可得 $G$ 的不同的 Sylow 3-子群 $P_3\cong C_3\times C_3$ 的交平凡,从而 $i_2=3n_2$, $i_3=8n_3$。因此,由 $h(G)=7$,得

$$\begin{cases}|G|=1+i_2+i_3+i_6+i_7=i_2+i_3+i_6+217=252,\\ m(G)=1+\dfrac{i_2}{2}+\dfrac{i_3}{3}+\dfrac{i_6}{6}+\dfrac{i_7}{7}=1+\dfrac{i_2}{2}+\dfrac{i_3}{3}+\dfrac{i_6}{6}+\dfrac{223}{7},\end{cases}$$

当 $i_6=0$ 时,易得 $i_2=24$, $i_3=11$,从而 $n_2=8$, $n_3=\dfrac{11}{8}$,矛盾。当 $i_6\neq0$ 时,$i_6\geqslant2$,得 $i_2+i_3+i_6=|G|-1-i_7=252-217=35$ 且 $3i_2+2i_3+i_6=94$,于是 $2i_2+i_3=59$。由 $i_6\geqslant2$,得 $i_3=35-i_2-i_6\leqslant35-i_2-2=33-i_2$,故 $59=2i_2+i_3\leqslant2i_2+33-i_2=33+i_2$,于是 $26\leqslant i_2$。又因为 $8\leqslant i_3$,所以 $36=26+8+2\leqslant i_2+i_3+i_6=35$,矛盾。因此 $n_7\neq36$。

假设 $n_7=15$,则由步骤 1 知 $d=1$,从而 $i_7=15\times6=90$,再由 $|G|=2^a\times3^b\times5^c\times7\leqslant326$ 且 $n_7=15 \mid |G|$知 $c=1$, $1\leqslant b\leqslant2$, $a\leqslant1$。

令 $b=2$,则 $|G|=3^2\times5\times7=315$,从而 $n_3=1$ 或 7,$n_5=1$ 或 21,因此 $i_5\leqslant21\times4=84$。当 $n_3=1$ 时,有 $i_3=8$, $i_5=|G|-1-i_3-i_7=315-1-8-90=216$,这与 $i_5\leqslant84$ 矛盾。当 $n_3=7$ 时,因为 $G$ 的不同的 Sylow 3-子群的交平凡,所以 $i_3=7\times8=56$, $i_5=|G|-1-i_3-i_7=315-1-56-90=168$,这与 $i_5\leqslant84$ 矛盾,因此 $b=1$。下面对 $a$ 进行讨论,当 $a=0$ 时,$|G|=3\times5\times7=105$,此时 $P_3$ 循环,由文献[11]中的定理 2.5.5 知 $G$ 有正规 3-补 $N$,$|N|=5\times7=35$,由 $N\trianglelefteq G$ 知 $N$ 包含 $G$ 的所有 7-元素,因此 $n_7=n_7(N)=1$,这与 $n_7=15$ 矛盾。当 $a=1$ 时,$|G|=2\times3\times5\times7=210$,此时 $P_2$ 循环,由文献[11]中的定理 2.5.5 知 $G$ 有正规 2-补 $N$,并且 $|N|=3\times5\times7=105$,此时由 $N\trianglelefteq G$ 知 $N$ 包含 $G$ 的所有 7-元素,从而 $n_7=n_7(N)$,由 $|N|=3\times5\times7=105$ 知 $N$ 的 Sylow 3-子群循环,根据 $a=0$ 的情形得矛盾。

综上,$n_7=8$。

**步骤 5** $|G|=2^a\times3^b\times5^c\times7^d=2^3\times3\times7=168$。

由前面的讨论知,$d=1$, $n_7=8$, $a\neq5$,于是 $i_7=8\times6=48$, $a=3$ 或 4。若 $c>0$,则由 $n_7=|G:N_G(P_7)|=8$ 知 $5 \mid |N_G(P_7)|$,其中 $P_7\in \mathrm{Syl}_7(G)$。再由文献[11]中的定理 1.5.7,得

$$N_G(P_7)/C_G(P_7)\lesssim \mathrm{Aut}(P_7)\cong C_6,$$

从而 $5 \mid |C_G(P_7)|$,故 $G$ 中存在 $5\times7=35$ 阶元,这与 $h(G)=7$ 矛盾,因此 $c=0$,

$$2^3\times3^b\times7\leqslant2^a\times3^b\times7=|G|\leqslant326,$$

于是 $b\leqslant1$。若 $b=0$,则 $|G|=2^a\times7$,有

$$\frac{998}{21}=m(G)=1+\frac{i_2}{2}+\frac{i_4}{4}+\frac{i_7}{7}\leqslant1+\frac{|G|-1-i_7}{2}+\frac{i_7}{7}\leqslant1+\frac{2^4\times7-49}{2}+\frac{48}{7}=\frac{551}{14},$$

矛盾。因此 $b=1$,即 $|G|=2^a\times3\times7$,如果 $a=4$,则 $|G|=2^4\times3\times7=336>326$,矛盾。故 $a=3$,这意味着 $|G|=2^a\times3^b\times5^c\times7^d=2^3\times3\times7=168$。

**步骤 6** $G$ 是单群。

由步骤 4—5,知 $|G|=168=2^3\times3\times7$, $n_7=8$,因此 $i_7=8\times6=48$。如果 $G$ 不是单群,则假设 $N\neq G$ 是 $G$ 的极小正规子群。若 $7 \mid |N|$,则由 $N\trianglelefteq G$ 知 $N$ 包含 $G$ 的所有 7-元素,从而 $|N|\geqslant8\times6+1=49$,因此 $|N|=2^3\times7$ 或 $|N|=2^2\times3\times7$。若 $|N|=2^3\times7$,则 $N$ 中恰有 $|N|-i_7=2^3\times7-8\times6=8$ 个 2-元素,从而 $n_2(N)=1$,根据文献[11]中的命题 2.2.3,得 $P_2$ 是 $N$ 的特征子群,其中 $P_2\in\mathrm{Syl}_2(G)$,这意味着 $P_2\trianglelefteq G$,与 $N$ 的选取矛盾。若 $|N|=2^2\times3\times7$,则 $N$ 只有一个 Sylow 7-子群,从而 $G$ 只有一个 Sylow 7-子群,这与 $n_7=8$ 矛盾,因此 $7\nmid|N|$。

设 $|N|=2^a\times3^b$,其中 $b\leqslant1$,若 $b=1$,即 $3 \mid |N|$,则存在 $x\in N$ 使得 $o(x)=3$,从而 $\langle x\rangle\in \mathrm{Sly}_3(G)$。若 $7 \mid |N_G(x)|$,由文献[11]中的定理 1.5.7,得

$$N_G(x)/C_G(x)\lesssim\mathrm{Aut}(\langle x\rangle)\cong C_2,$$

则 $7 \mid |C_G(x)|$,故 $G$ 中存在 $3\times7=21$ 阶元,这与 $h(G)=7$ 矛盾,因此 $7\nmid|N_G(x)|$,即 $7\nmid|G:N_G(x)|$,亦即

$n_3(G)=|G:N_G(x)|\geqslant 7$,故 $n_3(G)=7$ 或 28。由 $N\trianglelefteq G$ 知 $N$ 包含 $G$ 的所有 3-元素,若 $n_3(G)=28$,则 $N$ 中有 $28\times 2=56$ 个非单位 3-元素,这与 $|N|=2^a\times 3^b\leqslant 2^3\times 3=24$ 矛盾。若 $n_3(G)=7$,则 $N$ 中有 $7\times 2=14$ 个非单位 3-元素,此时 $a=3$,所以 $|N|=2^3\times 3=24$,进而 $N$ 中包含 $|N|-14=10$ 个 2-元素,但 $N$ 中 2 个不同的 Sylow 2-子群至少提供 12 个 2-元素,故矛盾。因此 $b=0$,即 $|N|=2^a$。若 $a=1$ 或 2,则 $N\cong C_2,C_4$ 或 $C_2\times C_2$ 知 $|\mathrm{Aut}(N)|\leqslant 6$,由文献[11]中的定理 1.5.7,得

$$N_G(N)/C_G(N)=G/C_G(N)\lesssim \mathrm{Aut}(N),$$

知 $7\mid |C_G(N)|$,$G$ 中存在 $2\times 7=14$ 阶元,这与 $h(G)=7$ 矛盾。因此 $a=3$,即 $|N|=2^3$ 且 $n_2(G)=1$,故 $G$ 中有 8 个 2-元素。由 $n_3(G)\in\{1,4,7,28\}$ 知 $i_3\leqslant 28\times 2=56$,由

$$|G|-(1+i_2+i_4)-i_7=168-8-48=112,$$

知 $G$ 中有 6 阶元,且 $i_3+i_6=112$。因此

$$\frac{998}{21}=m(G)=1+\frac{i_2}{2}+\frac{i_3}{3}+\frac{i_4}{4}+\frac{i_6}{6}+\frac{i_7}{7}\leqslant 1+\frac{i_2+i_4}{2}+\frac{i_3}{3}+\frac{112-i_3}{6}+\frac{i_7}{7}=1+\frac{7}{2}+\frac{i_3}{6}+\frac{112}{6}+\frac{48}{7}=\frac{i_3}{6}+\frac{1\,261}{42},$$

整理得 $105\leqslant i_3$,这与 $i_3\leqslant 56$ 矛盾。

综上,这样的 $N$ 不存在,故 $G$ 是单群。

**步骤 7**　$G$ 中无 6 阶元。

令 $K=N_G(P)$,其中 $P\in \mathrm{Syl}_7(G)$,因为 $n_7(G)=8$,所以 $|K|=|N_G(P)|=21$,于是 $K=P\rtimes Q$,其中 $Q\in \mathrm{Syl}_3(G)$,由 Sylow 定理知 $n_3(K)=1$ 或 7。若 $n_3(K)=1$,则 $Q\trianglelefteq G$,从而 $K=P\times Q$,于是 $G$ 中存在 $3\times 7=21$ 阶元,这与 $h(G)=7$ 矛盾。因此 $n_3(K)=7$,从而 $n_3(G)=7$ 或 28。又由步骤 6 知 $G$ 是单群,则 $G$ 中存在 $K$ 的共轭子群 $K_1$ 且 $K\neq K_1$。若 $|K\cap K_1|=1$,则 $|KK_1|>168$,矛盾。若 $|K\cap K_1|=7$,则 $K\cap K_1\in \mathrm{Syl}_7(K)$,又因为 $P\in \mathrm{Syl}_7(K)$ 且 $P$ 是 $K$ 中唯一的 Syolw 7-子群,所以 $P=K\cap K_1\leqslant K$ 且 $P\in \mathrm{Syl}_7(K_1)$,再由 $K_1$ 有唯一的 Sylow 7-子群知 $P\trianglelefteq K_1$,从而 $K=K_1$,矛盾。因此,$|K\cap K_1|=3$ 且 $K\cap K_1\in \mathrm{Syl}_3(G)$,此时由文献[11]中的命题 2.2.5 知 $K=N_G(P)=N_G(N_G(P))=N_G(K)$。再由 $|G:N_G(K)|=|G:N_G(P)|=n_7=8$ 及 $N_G(K\cap K_1)\leqslant N_G(K)$,有

$$n_3(G)=|G:N_G(K\cap K_1)|\geqslant |G:N_G(K)|=8,$$

于是 $n_3(G)=28$, $|N_G(Q)|=|N_G(K\cap K_1)|=6$,因此 $i_3=28\times 2=56$。

若 $G$ 中有 6 阶元,则 $N_G(Q)\cong C_6$ 或 $S_3$。假设 $N_G(Q)\cong S_3$,则 $C_G(Q)=Q$,即 $G$ 的 Sylow 3-子群在 $G$ 中的中心化子是其自身,但 $G$ 中有 6 阶元,设 $x\in G$ 且 $o(x)=6$,这意味着 3 阶元 $x^2$ 与 2 阶元 $x^3$ 可交换,即 $x^3\in C_G(\langle x^2\rangle)=\langle x^2\rangle\in \mathrm{Syl}_3(G)$,矛盾。因此 $N_G(Q)\cong C_6$,由文献[11]中的命题 2.2.5 知 $N_G(Q)=N_G(N_G(Q))$,有

$$|G:N_G(N_G(Q))|=|G:N_G(Q)|=n_3(G)=28,$$

这表明 $G$ 中有 28 个循环子群共轭于 $N_G(Q)$,从而 $G$ 中有 $28\times 2=56$ 个 6 阶元。再由

$$|G|-i_3-i_6-i_7=168-56-56-48=8,$$

知 $G$ 中有 8 个 2-元素,故

$$\frac{998}{21}=m(G)=1+\frac{i_2}{2}+\frac{i_3}{3}+\frac{i_4}{4}+\frac{i_6}{6}+\frac{i_7}{7}\leqslant 1+\frac{i_2+i_4}{2}+\frac{56}{3}+\frac{56}{6}+\frac{48}{7}=1+\frac{7}{2}+\frac{56}{3}+\frac{56}{6}+\frac{48}{7}=\frac{551}{14},$$

矛盾。因此 $G$ 中无 6 阶元。

**步骤 8**　$G\cong \mathrm{PSL}(2,7)$。

由前面的讨论可知 $G$ 是 168 阶单群,$G$ 中无 6 阶元且 $h(G)=7$。由文献[4]中的引理 4.7 得 $G\cong \mathrm{PSL}(2,7)$。

综上所述,定理 2 成立。

**参考文献:**


[1] 施武杰. $A_5$ 的一个特征性质[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),1986,11(3):11-14.

SHI Wujie. A characteristic property of $A_5$[J]. Journal of Southwest University:(Natural Science), 1986, 11(3):11-14.

[2] 郭继东,任永才,张志让. 单群 PSL(2,7) 的一个新刻画[J]. 四川大学学报(自然科学版),2014,51(4):696-700.

GUO Jidong, REN Yongcai, ZHANG Zhirang. A new characterization of cingle group PSL(2,7)[J]. Journal of Sichuan

University:(Natural Science), 2014, 51(4):696-700.
[3] JAFARIAN AMIRI S M. Characterization of $A_5$ and PSL(2,7) by sum of element orders[J]. International Journal of Group Theory, 2013, 2(2):35-39.
[4] 王华丽. 利用元素阶之和及最高阶刻画群[D]. 重庆:西南大学,2015.
WANG Huali. Characterizing groups by the sum of element orders and the maximal order[D]. Chongqing: Southwest University, 2015.
[5] AMIRI H, JAFARIAN AMIRI S M, ISAACS I M. Sums of element orders in finite groups[J]. Communications in Algebra, 2009, 37(9):2978-2980.
[6] AZAD M B, KHOSRAVI B. A criterion for solvability of a finite group by the sum of element orders[J]. Journal of Algebra, 2018, 516:115-124.
[7] AZAD M B, KHOSRAVI B, RASHIDI H. On the sum of the inverses of the element orders in finite groups[J]. Communications in Algebra, 2023, 51(2): 694-698.
[8] AZAD M B, KHOSRAVI B. Properties of finite groups determined by the product of their element orders[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2021, 103(1):88-95.
[9] TĂRNĂUCEANU M. Detecting structural properties of finite groups by the sum of element orders[J]. Israel Journal of Mathematics, 2020, 238(2):629-637.
[10] AMIRI H, JAFARIAN AMIRI S M. Sum of element orders on finite groups of the same order[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2011, 10(2):187-190.
[11] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京:科学出版社,2001.
XU Mingyao. Finite group guidance[M]. Beijing: Natural Science, 2001.

(编辑:陈丽萍)

(上接第 19 页)

[4] PATRICIO P, PUYSTJENS R . Drazin-Moore-Penrose invertiblity in rings[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2004, 389:159-173.
[5] RAKIC D S, DINCIC N C, DJORDJEVIC D S. Group, Moore-Penrose, core and dual core inverse in rings with involution [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2014, 463:115-133.
[6] HARTWIG R E, SPINDELBOCK K. Matrices for which $A^*$ and $A^\dagger$ commmute[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1984, 14(3):241-256.
[7] 严佳萌,陈轩,魏俊潮. *-环上的扭可逆元[J]. 扬州大学学报(自然科学版),2022,25(1):1-3.
YANJiameng, CHEN Xuan, WEI Junchao. Twist invertible elements in *-rings[J]. Journal of Yangzhou University (Natural Science Edition), 2022, 25(1):1-3.
[8] 李金,王龙,魏俊潮. SEP 矩阵的性质[J]. 扬州大学学报(自然科学版),2023, 26(2):1-5.
LI Jin, WANG Long, WEIJunchao. Researches of SEP matrices[J]. Journal of Yangzhou University (Natural Science Edition), 2023, 26(2):1-5.
[9] 官梦鸽,周海楠,魏俊潮. EP 元的一些等价刻画[J]. 山东大学学报(理学版),2023, 58(8):1-5.
GUANMengge, ZHOU Hainan, WEI Junchao. Some equivalent characterizations on EP elements[J]. Journal of Shandong University( Natural Science), 2023, 58(8):1-5.
[10] MOSIC D. Generalized inverses[M]. Nis, Serbia: University of Nis, 2018.

(编辑:陈丽萍)