

一类具有双垂直传播和媒介呈 Logistic 增长的媒介传染病模型

李璐,张瑞霞*

(中北大学数学学院,山西太原 030051)

摘要:媒介传染病是通过生物媒介传播的传染性疾病,蚊媒传染病最为常见。本文考虑宿主和媒介的双垂直传播以及媒介 Logistic 增长,建立媒介传染病传播模型,求出基本再生数 R_0 ,分析模型平衡点的存在性与全局稳定性。结果显示,当 $R_0 < 1$ 时,无病平衡点全局渐近稳定;当 $R_0 > 1$ 时,正平衡点全局渐近稳定。最后通过数值模拟验证结论,同时揭示媒介呈 Logistic 增长时,如果不捕杀蚊虫,媒介传染病始终流行,当蚊虫灭杀率达到一定比例时,媒介传染病逐渐消亡,提高对蚊子的灭杀率会对传染病防治产生积极影响。

关键词:媒介传染病;稳定性;双垂直传播;Logistic 增长;生物防治

中图分类号:O175 **文献标志码:**A

引用格式:李璐,张瑞霞.一类具有双垂直传播和媒介呈 Logistic 增长的媒介传染病模型[J].山东大学学报(理学版),2025,60(4):93-103.

A vector-borne diseases model with dual vertical transmission and Logistic growth for vector

LI Lu, ZHANG Ruixia*

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, Shanxi, China)

Abstract: Vector-borne diseases are infectious diseases transmitted by vectors, and mosquito-borne diseases are the most common. Considering the dual vertical transmission of host and vector and Logistic growth for vector, the authors establish a vector-borne disease transmission model, calculate the basic reproduction number, analyze the existence and global stability of the equilibrium points, and show that when $R_0 < 1$, the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable, and when $R_0 > 1$, the positive equilibrium is globally asymptotically stable. Finally, the numerical simulation verifies the conclusion, and reveals that when the vector is growing with Logistic, if the mosquito is not killed, the vector-borne disease is always present, and when the mosquito killing rate reaches a certain proportion, the vector-borne disease would eventually die out, and improving the killing rate of mosquitoes will have a positive impact on the prevention and control of infectious diseases.

Key words: vector-borne diseases; stability; dual vertical transmission; Logistic growth; biocontrol

0 引言

媒介传染病是通过生物媒介传播的传染性疾病,蚊媒传染病最为常见。蚊子被视为威胁人类的“头号杀手”,病媒传播的疾病占全部传染病的 17%以上,每年导致 70 多万人死亡。常见的蚊媒传染病有疟疾、日本脑炎^[1]、登革热^[2]、黄热病^[3]、西尼罗河热^[4]等。据世界卫生组织统计显示,世界上 129 余个国家 39 亿多人面临感染登革热的风险,每年估计发生 9 600 万有症状病例和 4 万例死亡^[5]。

文献[6]指出染病媒介的后代可以垂直传播疾病,文献[7]建立了具有垂直传播的媒介传染病传

收稿日期:2023-09-28;网络出版时间:2024-07-26 16:58:00

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12001501, 12071445)

第一作者:李璐(1999—),女,硕士研究生,研究方向为生物数学. E-mail:852373914@qq.com

*通信作者:张瑞霞(1980—),女,副教授,博士,研究方向为生物数学. E-mail:zhangruixia@nuc.edu.cn

播模型;文献[8]考虑了宿主和媒介的垂直传播,建立了一类宿主和媒介双垂直传播以及宿主指数增长的媒介传染病传播模型,研究了宿主与媒介接触率对传染病传播的影响。事实上,由于资源有限,媒介增长呈 Logistic 型增长更为合理,故本文建立媒介呈 Logistic 型增长的媒介传染病传播模型,并对其进行研究。

1 模型的建立

$S_H(t)$ 、 $I_H(t)$ 、 $R_H(t)$ 、 $S_M(t)$ 、 $I_M(t)$ 分别表示易感人类、染病人类、康复人类、易感蚊子、染病蚊子在 t 时刻的数量, $N_H(t)$ 、 $N_M(t)$ 分别表示人类总数量和蚊子总数量, r 表示蚊子的内禀增长率, u_H 表示人类的出生率与自然死亡率, u_M 表示对蚊子的灭杀率, K 表示蚊子的环境容纳量, γ 表示染病人类的康复率, q_H 、 q_M 分别表示人类和蚊子的垂直传播率,其中 $0 \leq q_H < 1$, $0 \leq q_M < 1$ 。由于状态不同,健康蚊子与染病蚊子对人的叮咬频率也有区别。 a_1 表示易感蚊子对染病人类的叮咬率; a_2 表示染病蚊子对易感人类的叮咬率; b_1 表示易感蚊子叮咬染病人类后患病的概率; b_2 表示易感人类被染病蚊子叮咬后患病的概率。则此类蚊媒传染病传播流程图如图1所示。

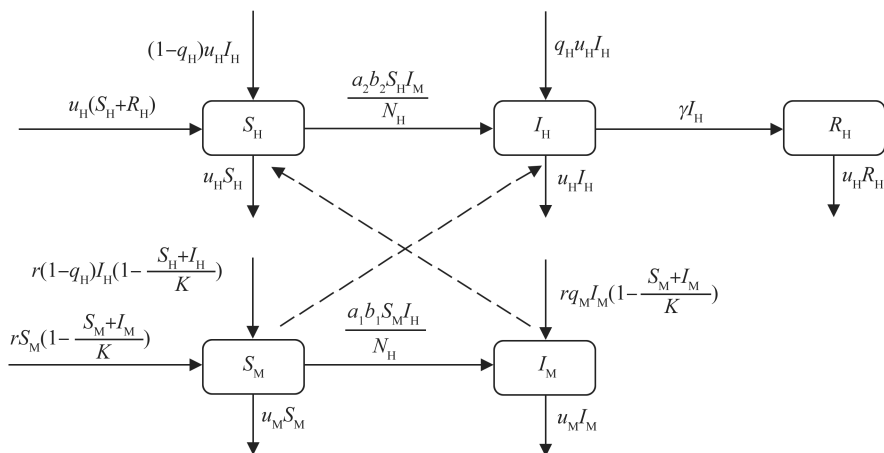


图1 传播流程图
Fig.1 Flow chart of propagation

传播模型可建立为

$$\begin{cases}
 \frac{dS_H(t)}{dt} = u_H(S_H + R_H) + (1 - q_H)u_H I_H - \frac{a_2 b_2 S_H I_M}{N_H} - u_H S_H, \\
 \frac{dI_H(t)}{dt} = \frac{a_2 b_2 S_H I_M}{N_H} + q_H u_H I_H - u_H I_H - \gamma I_H, \\
 \frac{dR_H(t)}{dt} = \gamma I_H - u_H R_H, \\
 \frac{dS_M(t)}{dt} = r \left[S_M + (1 - q_M) I_M \right] \left(1 - \frac{S_M + I_M}{K} \right) - \frac{a_1 b_1 S_M I_H}{N_H} - u_M S_M, \\
 \frac{dI_M(t)}{dt} = r q_M I_M \left(1 - \frac{S_M + I_M}{K} \right) + \frac{a_1 b_1 S_M I_H}{N_H} - u_M I_M,
 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $(S_H(0), I_H(0), R_H(0), S_M(0), I_M(0)) \in \mathbf{R}_+^5$, \mathbf{R}_+^5 表示非负集。接下来将分析模型的正不变集。

定理 1.1 对任意 $(S_H(0), I_H(0), R_H(0), S_M(0), I_M(0)) \in \mathbf{R}_+^5$, 带有初始条件的模型(1)的解 $(S_H(t), I_H(t), R_H(t), S_M(t), I_M(t)) \in \mathbf{R}_+^5$ 。

证明 令 $T = \sup \{ \tau \geq 0 \mid \forall t, \text{当 } 0 < t < \tau \text{ 时, } S_H(t) \geq 0, I_H(t) \geq 0, R_H(t) \geq 0, S_M(t) \geq 0, I_M(t) \geq 0 \}$, 要证明 $T = +\infty$ 。

采用反证法。假设 $0 < T < +\infty$, 由于解的连续性有 $S_H(T) = 0$ 或 $I_H(T) = 0$ 或 $R_H(T) = 0$ 或 $S_M(T) = 0$ 或 $I_M(T) = 0$ 。

若在 I_H, R_H, S_M, I_M 为 0 之前有 $S_H(T) = 0$, 因此

$$\frac{dS_H(T)}{dt} = \lim_{t \rightarrow T^-} \frac{S_H(T) - S_H(t)}{T - t} = \lim_{t \rightarrow T^-} \frac{-S_H(t)}{T - t} \leq 0,$$

但根据模型(1)的第一个方程有 $\frac{dS_H(T)}{dt} = (1 - q_H)u_H I_H > 0$, 矛盾。

在 S_H, R_H, S_M, I_M 为 0 之前有 $I_H(T) = 0$ 的情形, 在 S_H, I_H, S_M, I_M 为 0 之前有 $R_H(T) = 0$ 的情形, 在 S_H, I_H, R_H, I_M 为 0 之前有 $S_M(T) = 0$ 的情形, 在 S_H, I_H, R_H, S_M 为 0 之前有 $I_M(T) = 0$ 的情形, 都可类似推出矛盾, 从而假设错误, 故 $T = +\infty$ 。

定理 1.2 模型(1)的正向不变集为

$$\Omega = \left\{ (S_H, I_H, R_H, S_M, I_M) \in \mathbf{R}_+^5 : S_H + I_H + R_H = N, S_M + I_M = N_M \leq \frac{K(r - u_M)}{r} \right\}.$$

证明 将模型(1)的前三式相加, 可知 N_H 为常数, 设为 N 。后两式相加得

$$\frac{dN_M}{dt} = rN_M \left(1 - \frac{N_M}{K} \right) - u_M N_M,$$

从而得到

$$N_M = \frac{K(r - u_M)}{r + Ce^{-(r - u_M)t} K(r - u_M)} \leq \frac{K(r - u_M)}{r}.$$

注 为了保证 $\frac{K(r - u_M)}{r}$ 的非负性, 须有 $r > u_M$ 。

2 基本再生数和平衡点的存在性

将模型(1)降维, 得到

$$\begin{cases} \frac{dS_H(t)}{dt} = u_H(N - S_H - I_H) + (1 - q_H)u_H I_H - \frac{a_2 b_2 S_H I_M}{N}, \\ \frac{dI_H(t)}{dt} = \frac{a_2 b_2 S_H I_M}{N} + q_H u_H I_H - u_H I_H - \gamma I_H, \\ \frac{dI_M(t)}{dt} = \frac{a_1 b_1 (N_M - I_M) I_H}{N} + r q_M I_M \left(1 - \frac{N_M}{K} \right) - u_M I_M, \\ \frac{dN_M(t)}{dt} = r N_M \left(1 - \frac{N_M}{K} \right) - u_M N_M. \end{cases} \quad (2)$$

易得模型始终存在无病平衡点 $E_0 \left(N, 0, 0, \frac{K(r - u_M)}{r} \right)$ 。

令 $\beta_1 = a_1 b_1, \beta_2 = a_2 b_2$ 。利用下一代生成矩阵法^[9]求得基本再生数为 $R_0 = \sqrt{\frac{K\beta_1\beta_2(r - u_M)}{rN[(1 - q_H)u_H + \gamma](1 - q_M)u_M}}$ 。

定理 2.1 模型(2)始终存在无病平衡点 $E_0 \left(N, 0, 0, \frac{K(r - u_M)}{r} \right)$; 若 $R_0 > 1$, 模型(2)存在唯一的地方病

平衡点 $E^*(S_H^*, I_H^*, I_M^*, N_M^*)$ 。

证明 令模型(2)的右端等于零, 即

$$\begin{cases} u_H(N-S_H-I_H)+(1-q_H)u_H I_H-\frac{\beta_2 S_H I_M}{N}=0, \\ \frac{\beta_2 S_H I_M}{N}+q_H u_H I_H-u_H I_H-\gamma I_H=0, \\ \frac{\beta_1(N_M-I_M)I_H}{N}+r q_M I_M\left(1-\frac{N_M}{K}\right)-u_M I_M=0, \\ r N_M\left(1-\frac{N_M}{K}\right)-u_M N_M=0. \end{cases} \quad (3)$$

当 $N_M \neq 0$ 时,

$$N_M^* = \frac{K(r-u_M)}{r}, \quad S_H^* = \frac{Nu_H - u_H I_H^* - \gamma I_H^*}{u_H}, \quad I_M^* = \frac{K\beta_1 I_H^*(r-u_M)}{r\beta_1 I_H^* + (1-q_M)u_M rN}. \quad (4)$$

将式(4)代入系统(3)中第2个方程,得到1个一元二次方程:

$$\frac{-[(1-q_H)u_H + \gamma][(u_H + \gamma)R_0^2(1-q_M)u_M + u_H\beta_1]I_H^{*2} + (R_0^2 - 1)[(1-q_H)u_H + \gamma](1-q_M)u_M Nu_H I_H^*}{u_H\beta_1 I_H^* + Nu_H(1-q_M)} = 0. \quad (5)$$

$I_H^* = 0$ 始终满足方程(5),此时对应无病平衡点 $E_0\left(N, 0, 0, \frac{K(r-u_M)}{r}\right)$; $I_H^* \neq 0$, $I_H^* = \frac{(R_0^2 - 1)(1-q_M)u_M u_H N}{(u_H + \gamma)R_0^2(1-q_M)u_M + u_H\beta_1}$ 满足方程(5)。

因为 u_H, u_M, β_1 非负,且 $0 \leq q_M < 1$,因此当 $R_0 > 1$ 时,有 $I_H^* > 0$,所以模型存在唯一的正平衡点 $E^*(S_H^*, I_H^*, I_M^*, N_M^*)$,其中

$$N_M^* = \frac{K(r-u_M)}{r}, \quad S_H^* = \frac{Nu_H - u_H I_H^* - \gamma I_H^*}{u_H}, \quad I_M^* = \frac{K\beta_1 I_H^*(r-u_M)}{r\beta_1 I_H^* + (1-q_M)u_M rN}, \quad I_H^* = \frac{(R_0^2 - 1)(1-q_M)u_M u_H N}{(u_H + \gamma)R_0^2(1-q_M)u_M + u_H\beta_1}.$$

3 平衡点的局部稳定性

定理 3.1 当 $R_0 < 1$ 时,无病平衡点 $E_0\left(N, 0, 0, \frac{K(r-u_M)}{r}\right)$ 是局部渐近稳定的;当 $R_0 > 1$ 时,无病平衡点

$E_0\left(N, 0, 0, \frac{K(r-u_M)}{r}\right)$ 是不稳定的。

证明 模型(2)的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -u_H - \frac{\beta_2 I_M}{N} & -q_H u_H & \frac{\beta_2 S_H}{N} & 0 \\ \frac{\beta_2 I_M}{N} & -(1-q_H)u_H - \gamma & \frac{\beta_2 S_H}{N} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1(N_M - I_M)}{N} & -\frac{\beta_1 I_H}{N} + r q_M \left(1 - \frac{N_M}{K}\right) - u_M & \frac{\beta_1 I_H}{N} - \frac{r q_M I_M}{K} \\ 0 & 0 & 0 & r - \frac{2r N_M}{K} - u_M \end{pmatrix}.$$

模型(2)在 E_0 处的 Jacobian 矩阵为

$$J|_{E_0} = \begin{pmatrix} -u_H & -q_H u_H & -\beta_2 & 0 \\ 0 & -(1-q_H)u_H - \gamma & \beta_2 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1 K(r-u_M)}{rN} & (q_M - 1)u_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_M - r \end{pmatrix},$$

对应的特征方程为

$$(\lambda+u_H)(\lambda-u_M+r) \left[(\lambda+(1-q_H)u_H+\gamma)(\lambda-(q_M-1)u_M) - \frac{K\beta_1\beta_2(r-u_M)}{rN} \right] = 0,$$

可得特征根 $\lambda_1 = -u_H < 0$, $\lambda_2 = u_M - r < 0$, 其余特征根由下面的方程决定

$$[\lambda+(1-q_H)u_H+\gamma][\lambda-(q_M-1)u_M] - \frac{K\beta_1\beta_2(r-u_M)}{rN} = 0,$$

化简为

$$\lambda^2 + [(1-q_H)u_H+\gamma+(1-q_M)u_M]\lambda + (1-R_0^2)[(1-q_H)u_H+\gamma](1-q_M)u_M = 0.$$

由于 $q_H \in [0, 1)$, $q_M \in [0, 1)$, 故 $(1-q_H)u_H+\gamma+(1-q_M)u_M > 0$, 当 $R_0 < 1$ 时, $(1-R_0^2)[(1-q_H)u_H+\gamma](1-q_M)u_M > 0$, 方程有两个负特征根, 此无病平衡点 E_0 是渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, $(1-R_0^2)[(1-q_H)u_H+\gamma](1-q_M)u_M < 0$, 所以特征方程至少有一个正实部特征根, 故无病平衡点 E_0 不稳定。

定理 3.2 当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点 $E^*(S_H^*, I_H^*, I_M^*, N_M^*)$ 是局部渐近稳定的。

证明 模型(2)在 E^* 处的 Jacobian 矩阵为

$$J|_{E^*} = \begin{pmatrix} -u_H - \frac{\beta_2 I_M^*}{N} & -q_H u_H & \frac{\beta_2 S_H^*}{N} & 0 \\ \frac{\beta_2 I_M^*}{N} & -(1-q_H)u_H - \gamma & \frac{\beta_2 S_H^*}{N} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1(N_M^* - I_M^*)}{N} & -\frac{\beta_1 I_H^*}{N} + r q_M \left(1 - \frac{N_M^*}{K}\right) - u_M & \frac{\beta_1 I_H^*}{N} - \frac{r q_M I_M^*}{K} \\ 0 & 0 & 0 & r - \frac{2r N_M^*}{K} - u_M \end{pmatrix}.$$

易得其中一个特征根为 $\lambda_1 = r - \frac{2r N_M^*}{K} - u_M = u_M - r < 0$, 其余特征根由左上角 3×3 型矩阵决定, 其对应的特征多项式为

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + u_H & \gamma & 0 \\ -\frac{\beta_2 I_M^*}{N} & \lambda + (1-q_H)u_H + \gamma + \frac{\beta_2 I_M^*}{N} & -\frac{\beta_2 S_H^*}{N} \\ 0 & \frac{\beta_1(N_M^* - I_M^*)}{N} & \lambda + \frac{\beta_1 I_H^*}{N} - r q_M \left(1 - \frac{N_M^*}{K}\right) + u_M \end{vmatrix}.$$

按第 3 列展开得到 $(\lambda+b_1)(\lambda^2+b_2\lambda+b_3)+b_4\lambda+b_5 = \lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3$, 其中

$$a_1 = b_1 + b_2,$$

$$a_2 = b_3 + b_1 b_2 + b_4,$$

$$a_3 = b_1 b_3 + b_5,$$

$$b_1 = \frac{\beta_1 I_H^*}{N} - r q_M \left(1 - \frac{N_M^*}{K}\right) + u_M = \frac{\beta_1 I_H^*}{N} + (1-q_M)u_M,$$

$$b_2 = d_2 + u_H = (1-q_H)u_H + \gamma + \frac{\beta_2 I_M^*}{N} + u_H,$$

$$b_3 = u_H d_2 + \gamma \frac{\beta_2 I_M^*}{N} = \left[(1-q_H)u_H + \gamma + \frac{\beta_2 I_M^*}{N} \right] u_H + \gamma \frac{\beta_2 I_M^*}{N},$$

$$b_4 = -\frac{\beta_2 S_H^* \beta_1 (N_M^* - I_M^*)}{N},$$

$$b_5 = u_H b_4 = -u_H \frac{\beta_2 S_H^* \beta_1 (N_M^* - I_M^*)}{N}.$$

则

$$\begin{aligned} H_1 &= a_1 = b_1 + b_2 > 0, \\ H_2 &= a_1 a_2 - a_3 = (b_1 + b_2) b_1 b_2 + b_2 b_3 + (b_1 + b_2 - u_H) b_4 \\ &= (b_1 + d_2) [u_H (b_1 + d_2) + u_H^2 + b_1 d_2 + b_4] + \gamma \frac{\beta_2 I_M^*}{N} (u_H + d_2). \end{aligned}$$

由于 $b_1 > 0$, $d_2 > 0$, 因此 $b_1 + d_2 > 0$, $\gamma \frac{\beta_2 I_M^*}{N} (u_H + d_2) > 0$, 经计算得

$$b_1 d_2 + b_4 = \frac{\beta_1 \beta_2 (R_0^2 - 1) [(1 - q_M) u_M u_H R_0^2 + u_H \beta_1]}{N^2 R_0^2 [u_H \beta_1 + R_0^2 (1 - q_M) u_M (u_H + \gamma)]} N N_M^* > 0,$$

故

$$H_2 = (b_1 + d_2) [u_H (b_1 + d_2) + u_H^2 + b_1 d_2 + b_4] + \gamma \frac{\beta_2 I_M^*}{N} (u_H + d_2) > 0.$$

由于 $H_3 = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 = (a_1 a_2 - a_3) a_3 = (a_1 a_2 - a_3) \left[u_H (b_1 d_2 + b_4) + b_1 \gamma \frac{\beta_2 I_M^*}{N} \right] > 0$, 因此由 Hurwitz 判据可知, 方程的所有特征根均具有负实部, 此时地方病平衡点 E^* 是局部渐近稳定的。

4 全局稳定性

定理 4.1 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 $E_0 \left(N, 0, 0, \frac{K(r - u_M)}{r} \right)$ 是全局渐近稳定的。

证明 由模型(2)中第2个方程可知

$$\dot{I}_H \leq \beta_2 I_M + q_H u_H I_H - u_H I_H - \gamma I_H. \quad (6)$$

由模型(2)中第3个方程可知

$$\dot{I}_M \leq \frac{\beta_1 N_M I_H}{N} + r q_M I_M \left(1 - \frac{N_M}{K} \right) - u_M I_M. \quad (7)$$

构造正定的 Lyapunov 函数

$$V(t) = \left[u_M - r q_M \left(1 - \frac{N_M}{K} \right) \right] I_H + \beta_2 I_M.$$

其沿模型(2)轨线的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \left[u_M - r q_M \left(1 - \frac{N_M}{K} \right) \right] \dot{I}_H + \beta_2 \dot{I}_M \\ &\leq \left[u_M - r q_M \left(1 - \frac{N_M}{K} \right) \right] (\beta_2 I_M + q_H u_H I_H - u_H I_H - \gamma I_H) + \beta_2 \left[\frac{\beta_1 N_M I_H}{N} + r q_M I_M \left(1 - \frac{N_M}{K} \right) - u_M I_M \right] \\ &= (R_0^2 - 1) (1 - q_M) u_M [(1 - q_H) u_H + \gamma] I_H. \end{aligned}$$

当 $R_0 < 1$ 时, $\dot{V}(t) \leq 0$. 当且仅当 $I_H = 0$ 时, $\dot{V}(t) = 0$, 此时 $S_H = N$, $I_M = 0$. 无病平衡点为模型的唯一不动点, 故单点集 $\{E_0\}$ 是 $\{S_H, I_H, I_M, N_M \in \Omega \mid \dot{V} = 0\}$ 的最大不变集. 故由 LaSalle 不变集原理知, 当 $R_0 < 1$ 时, 模型的无病平衡点是全局渐近稳定的。

引理 4.1 设系统

$$x' = f(x) \quad (8)$$

满足初始条件 $x(0, x_0)$ 的解为 $x(t, x_0)$. 做以下基本假设:

(H₁) 系统(8)存在一个紧吸引子集 $K \subset D$;

(H₂) 系统(8)有唯一的平衡点 $x^* \in D$.

设 $x \rightarrow P(x)$ 是一个 $\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$ 型矩阵函数, 且对 $x \in D$, $P(x) \in C^1$, 若 $P^{-1}(x)$ 存在且在 $x \in K$ 内是连续的,

定义 $q = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t u(\mathbf{B}(x(s, x_0))) ds$, 其中 $\mathbf{B} = \mathbf{P}_f \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P} \mathbf{J}^{[2]} \mathbf{P}^{-1}$, \mathbf{P}_f 是把矩阵 \mathbf{P} 的每一个元素 p_{ij} 沿 f 的方向导数取代得到的矩阵, $u(\mathbf{B})$ 是矩阵的 Lozinskii 测度

$$u(\mathbf{B}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|I + h\mathbf{B}\| - 1}{h}.$$

若 D 是单连通区域, 且条件 (H_1) 和 (H_2) 成立, 则当 $q < 0$ 时, 系统的唯一平衡点 \bar{x} 在 D 内是全局渐近稳定的。

定理 4.2 若 $R_0 > 1$, 且满足 $-2q_H u_H + u_H + \gamma > 0$ 时, 地方病平衡点 $E^*(S_H^*, I_H^*, I_M^*, N_M^*)$ 是全局渐近稳定的。

证明 这里借助极限系统思想^[10]和 Bendixso 判据^[11]来证明地方病平衡点的全局稳定性。

根据文献[12]以及引理 4.1 可知, 当 $R_0 > 1$ 时, E_0 不稳定, 则在 Ω 内有一个紧吸引子集 Γ 存在, 且模型 (2) 只有一个正平衡点, 因此只需要验证 $q < 0$, 即可证明地方病平衡点的全局稳定性。

模型 (2) 的极限系统为

$$\begin{cases} \frac{dS_H(t)}{dt} = u_H(N - S_H - I_H) + (1 - q_H)u_H I_H - \frac{\beta_2 S_H I_M}{N}, \\ \frac{dI_H(t)}{dt} = \frac{\beta_2 S_H I_M}{N} + q_H u_H I_H - u_H I_H - \gamma I_H, \\ \frac{dI_M(t)}{dt} = \frac{\beta_1 I_H}{N} \left[\frac{K(r - u_M)}{r} - I_M \right] + q_M u_M I_M - u_M I_M. \end{cases} \quad (9)$$

接下来分析模型 (9) 的全局稳定性。

模型 (9) 的 Jacobian 矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -u_H - \frac{\beta_2 I_M}{N} & -q_H u_H & \frac{\beta_2 S_H}{N} \\ \frac{\beta_2 I_M}{N} & q_H u_H - u_H - \gamma & \frac{\beta_2 S_H}{N} \\ 0 & \frac{\beta_1}{N} \left[\frac{K(r - u_M)}{r} - I_M \right] & -\frac{\beta_1 I_H}{N} + q_M u_M - u_M \end{pmatrix}.$$

矩阵 \mathbf{J} 的第二加性复合矩阵为

$$\mathbf{J}^{[2]} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{11} & \frac{\beta_2 S_H I_M}{N I_H} & \frac{\beta_2 S_H I_M}{N I_H} \\ \frac{\beta_1 I_H}{N I_M} \left[\frac{K(r - u_M)}{r} - I_M \right] & \mathbf{J}_{22} & -q_H u_H \\ 0 & \frac{\beta_2 I_M}{N} & \mathbf{J}_{33} \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{J}_{11} = -2u_H + q_H u_H - \gamma - \frac{\beta_2 I_M}{N},$$

$$\mathbf{J}_{22} = -u_H - \frac{\beta_2 I_M}{N} - \frac{\beta_1 I_H}{N} + q_M u_M - u_M,$$

$$\mathbf{J}_{33} = q_H u_H - u_H - \gamma - \frac{\beta_1 I_H}{N} + q_M u_M - u_M.$$

选取 $\mathbf{P}(S_H, I_H, I_M) = \text{diag}\left(1, \frac{I_H}{I_M}, \frac{I_H}{I_M}\right)$, 则 $\mathbf{P}_f \mathbf{P}^{-1} = \text{diag}\left(0, \frac{\dot{I}_H}{I_H} - \frac{\dot{I}_M}{I_M}, \frac{\dot{I}_H}{I_H} - \frac{\dot{I}_M}{I_M}\right)$ 。矩阵 $\mathbf{B} = \mathbf{P}_f \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P} \mathbf{J}^{[2]} \mathbf{P}^{-1}$ 可写成

分块矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$, 其中

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{11} &= -2u_H + q_H u_H - \gamma - \frac{\beta_2 I_M}{N}, \\ \mathbf{B}_{12} &= \left(\frac{\beta_2 S_H I_M}{N I_H}, \frac{\beta_2 S_H I_M}{N I_H} \right), \\ \mathbf{B}_{21} &= \left(\frac{\beta_1 I_H}{N I_M} \left[\frac{K(r-u_M)}{r} - I_M \right], 0 \right)^T, \\ \mathbf{B}_{22} &= \begin{pmatrix} -u_H - \frac{\beta_2 I_M}{N} - \frac{\beta_1 I_H}{N} + q_M u_M - u_M + \frac{i_H}{I_H} - \frac{i_M}{I_M} & -q_H u_H \\ \frac{\beta_2 I_M}{N} & q_H u_H - u_H - \gamma - \frac{\beta_1 I_H}{N} + q_M u_M - u_M + \frac{i_H}{I_H} - \frac{i_M}{I_M} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

令 $(u, v, l) \in \mathbf{R}^3$, 其范数 $\| \cdot \|$ 定义为 $\| (u, v, l) \| = \max \{ |u|, |v| + |l| \}$, 相应于范数 $\| \cdot \|$ 的 Lozinskii 测度为 $u(\mathbf{B}), u(\mathbf{B}) \leq \sup \{ g_1, g_2 \}$, 其中

$$g_1 = u_1(\mathbf{B}_{11}) + |\mathbf{B}_{12}|, \quad g_2 = u_1(\mathbf{B}_{22}) + |\mathbf{B}_{21}|,$$

$|\mathbf{B}_{12}|, |\mathbf{B}_{21}|$ 是相应于 l_1 范数的矩阵范数, u_1 是相应于 l_1 范数的 Lozinskii 测度, 则

$$u_1(\mathbf{B}_{11}) = -2u_H + q_H u_H - \gamma - \frac{\beta_2 I_M}{N},$$

$$|\mathbf{B}_{12}| = \frac{\beta_2 S_H I_M}{N I_H}, \quad |\mathbf{B}_{21}| = \frac{\beta_1 I_H}{N I_M} \left[\frac{K(r-u_M)}{r} - I_M \right].$$

下面计算 $u_1(\mathbf{B}_{22})$, 将 \mathbf{B}_{22} 各列非对角元素求绝对值后加到所在列的对角元素上得

$$\mathbf{B}'_{22} = \begin{pmatrix} -u_H - \frac{\beta_1 I_H}{N} + q_M u_M - u_M + \frac{i_H}{I_H} - \frac{i_M}{I_M} & -q_H u_H \\ \frac{\beta_2 I_M}{N} & 2q_H u_H - u_H - \gamma - \frac{\beta_1 I_H}{N} + q_M u_M - u_M + \frac{i_H}{I_H} - \frac{i_M}{I_M} \end{pmatrix},$$

取 \mathbf{B}'_{22} 的两个对角线元素最大值为 $u_1(\mathbf{B}_{22})$, 则

$$u_1(\mathbf{B}_{22}) = -u_H - \frac{\beta_1 I_H}{N} + q_M u_M - u_M + \frac{i_H}{I_H} - \frac{i_M}{I_M} + \max \{ 2q_H u_H - \gamma, 0 \}.$$

由模型得

$$\frac{i_H}{I_H} = \frac{\beta_2 S_H I_M}{N I_H} + q_H u_H - u_H - \gamma,$$

$$\frac{i_M}{I_M} = \frac{\beta_1 I_H}{N I_M} \left[\frac{K(r-u_M)}{r} - I_M \right] + q_M u_M - u_M,$$

代入 g_1, g_2 中, 得

$$g_1 = -2u_H + q_H u_H - \gamma - \frac{\beta_2 I_M}{N} + \frac{\beta_2 S_H I_M}{N I_H} \leq \frac{i_H}{I_H} - u_H,$$

$$g_2 = -u_H - \frac{\beta_1 I_H}{N} + q_M u_M - u_M + \frac{i_H}{I_H} - \frac{i_M}{I_M} + \max \{ 2q_H u_H - \gamma, 0 \} + \frac{\beta_1 I_H}{N I_M} \left[\frac{K(r-u_M)}{r} - I_M \right] + q_M u_M - u_M$$

$$\leq \frac{i_H}{I_H} - \min \{ u_H - 2q_H u_H + \gamma, u_H \}.$$

由条件可知, $\eta = \min \{ u_H - 2q_H u_H + \gamma, u_H \} > 0$.

由 $u_B \leq \sup \{ g_1, g_2 \} \leq \frac{i_H}{I_H} - \eta$, 则对所有满足初值条件的 $X_0 = (S_H(0), I_H(0), I_M(0)) \in \Omega$, 当 $t > t^*$ 时

$$\frac{1}{t} \int_0^t u(\mathbf{B}) ds = \frac{1}{t} \int_0^{t^*} u(\mathbf{B}) ds + \frac{1}{t} \int_{t^*}^t u(\mathbf{B}) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^{t^*} u(\mathbf{B}) ds + \frac{1}{t} \ln \frac{I_H(t)}{I_H(t^*)} - \eta \frac{t-t^*}{t}.$$

即有 $q = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t u(\mathbf{B}) ds \leq -\eta < 0$ 。因此,当 $R_0 > 1$ 且满足 $-2q_H u_H + u_H + \gamma > 0$ 时,地方病平衡点 E^* 是全局渐近稳定的。

5 数值模拟

通过数值模拟验证系统平衡点的动力学性质。

(1) 参数取值: $K=800, r=1, N=500, u_H=0.2, q_H=0.3, a_1=0.2, a_2=0.3, u_M=0.2, q_M=0.36, b_1=0.5, b_2=0.8, \gamma=0.25$, 此时 $R_0^2=0.6154 < 1$, 模拟结果如图 2。

(2) 参数取值: $K=800, r=1, N=500, u_H=0.2, q_H=0.3, a_1=0.1, a_2=0.2, u_M=0.2, q_M=0.36, b_1=0.5, b_2=0.8, \gamma=0.4$, 此时 $R_0^2=0.1481 < 1$, 模拟结果如图 3。

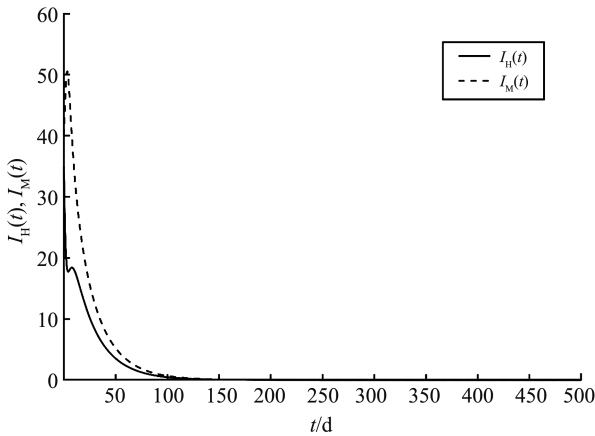


图2 染病蚊子和染病人类数量随时间的演化图 ($R_0^2=0.6154$)

Fig.2 Evolution of the number of infected mosquitoes and infected humans over time ($R_0^2=0.6154$)

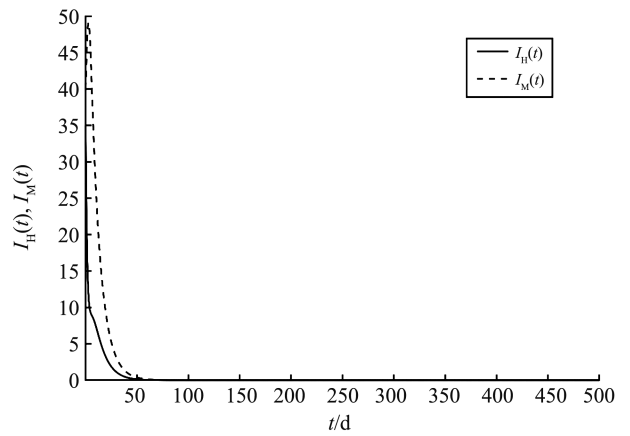


图3 染病蚊子和染病人类数量随时间的演化图 ($R_0^2=0.1481$)

Fig.3 Evolution of the number of infected mosquitoes and infected humans over time ($R_0^2=0.1481$)

通过观察图 2 和图 3 看出,当 $R_0^2 < 1$ 时,随着时间推移,染病人类和染病蚊子的数量都趋于零,可知无病平衡点是全局渐近稳定的。当减小染病媒介对易感人类、易感媒介对染病人类的叮咬率以及提高染病人类的恢复率时,导致染病人类和染病蚊子减小到 0 所需的时间减小,加快疾病的消亡。

(3) 参数取值: $K=800, r=1, N=500, u_H=0.2, q_H=0.3, a_1=0.3, a_2=0.45, u_M=0.2, q_M=0.36, b_1=0.5, b_2=0.8, \gamma=0.08$, 此时 $R_0^2=2.4545 > 1$, 模拟结果如图 4。

(4) 参数取值: $K=800, r=1, N=500, u_H=0.2, q_H=0.3, a_1=0.28, a_2=0.3, u_M=0.2, q_M=0.36, b_1=0.5, b_2=0.8, \gamma=0.12$, 此时 $R_0^2=1.2923 > 1$, 模拟结果如图 5。

通过观察图 4 和图 5 看出,当 $R_0^2 > 1$ 时,随着时间的推移,染病人类和染病蚊子的数量均稳定在一个固定的值,可知地方病平衡点是全局渐近稳定的。当减小染病媒介对易感人类、易感媒介对染病人类的叮咬率以及提高染病人类的恢复率时,导致传染病发展到地方病平衡点时,染病人类和染病媒介传染的最终规模减小。

图 6 分析蚊子的灭杀率对传播的影响。固定参数取值: $K=800, r=1, N=500, u_H=0.2, q_H=0.3, a_1=0.2, a_2=0.3, q_M=0.36, b_1=0.5, b_2=0.8, \gamma=0.08$, 通过改变参数 u_M 的取值来实现对比: $u_M=0 (R_0^2 > 1)$, $u_M=0.2 (R_0^2=1.0909 > 1)$, $u_M=0.6 (R_0^2=0.1818 < 1)$, $u_M=1 (R_0^2 < 1)$ 。结果显示:若 $u_M=0$, 即不采取任何灭蚊措施时,传染病流行,染病人类和染病蚊子的最终规模较大,随着 u_M 的增大,基本再生数减小,最终感染规模越来越小,当对蚊子的灭杀率达到一定程度,传染病消亡,说明增大蚊子的灭杀率有助于控制疾病。

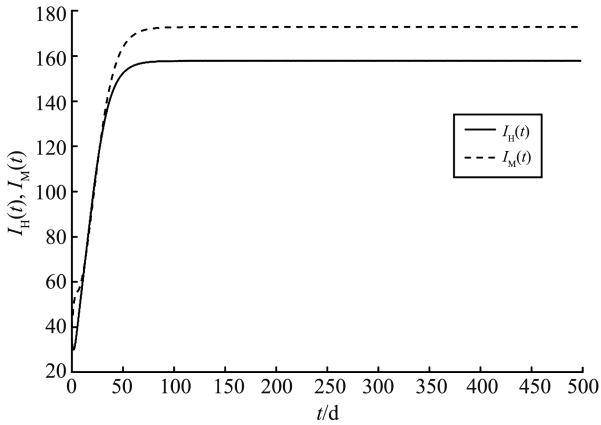


图 4 染病蚊子和染病人类数量随时间的演化图 ($R_0^2 = 2.4545$)

Fig.4 Evolution of the number of infected mosquitoes and infected humans over time ($R_0^2 = 2.4545$)

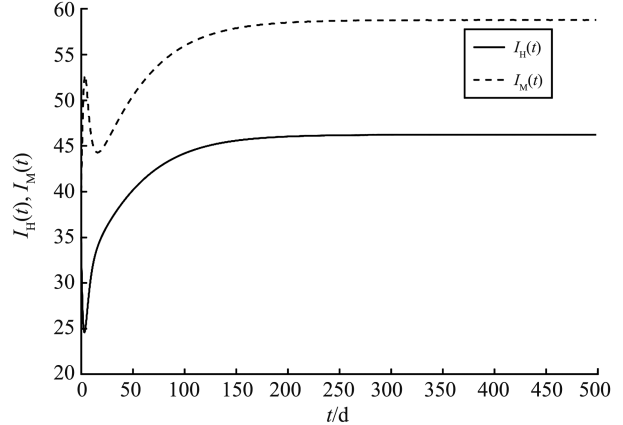
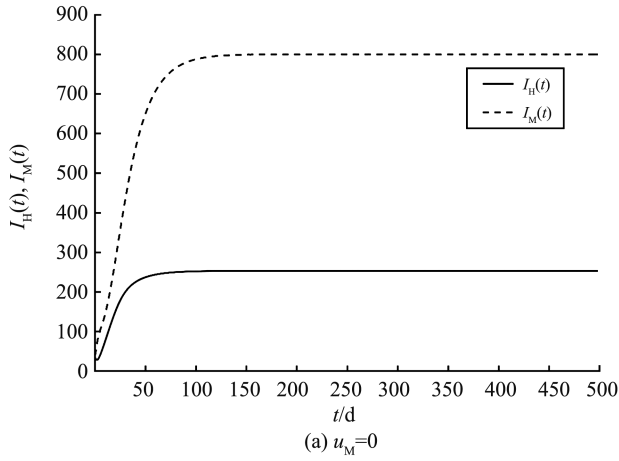
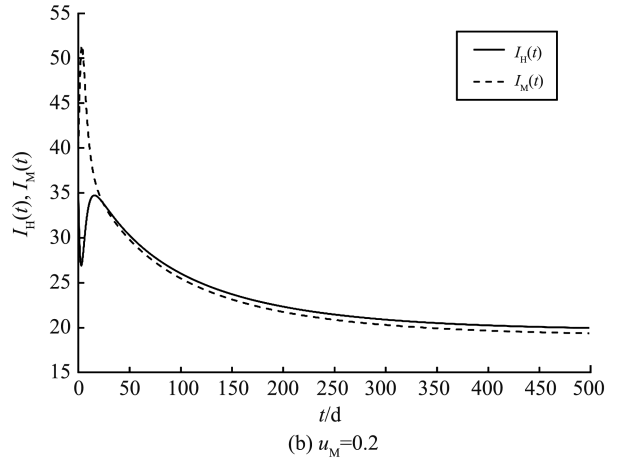


图 5 染病蚊子和染病人类数量随时间的演化图 ($R_0^2 = 1.2923$)

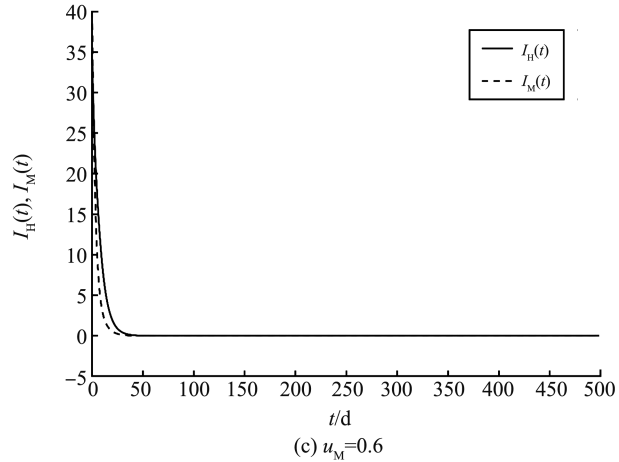
Fig.5 Evolution of the number of infected mosquitoes and infected humans over time ($R_0^2 = 1.2923$)



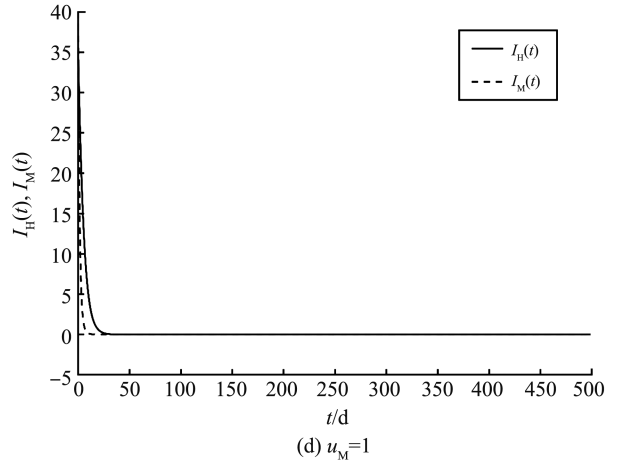
(a) $u_M = 0$



(b) $u_M = 0.2$



(c) $u_M = 0.6$



(d) $u_M = 1$

图 6 染病蚊子和染病人类数量随时间的演化图

Fig.6 Evolution of the number of infected mosquitoes and infected humans over time

6 结论

本文考虑了媒介传染病中宿主和媒介都具有垂直传播的情况,建立了一类具有双垂直传播、媒介具有 Logistic 型增长的传播模型,通过定性分析和定量模拟,得到模型的无病平衡点和地方病平衡点都是全局渐近稳定的。通过改变媒介对宿主的叮咬率、宿主的恢复率以及对蚊子的灭杀率,得到结论。通过物理防护减少媒介对人类的叮咬,通过医疗手段提高人类恢复率以及采取各类灭蚊措施提高对蚊子的灭杀率都有助于

传染病的控制。

参考文献:

- [1] DAS U, AHMED R, KASHYAP A, et al. Japanese encephalitis in assam: a sentinel case[J]. International Journal of Bio-resource and Stress Management, 2023, 14(1):153-160.
- [2] 徐建荣. 登革热及其防治的研究进展[J]. 上海预防医学, 2005, 17(4):167-169.
XU Jianrong. Research progress on dengue fever and its prevention [J]. Shanghai Journal of Preventive Medicine, 2005, 17(4):167-169.
- [3] 韦万春. 关注黄热病疫情及其防控措施[J]. 中国海关, 2022, (8):52-53.
WEI Wanchun. Focus on yellow fever epidemic and its prevention and control measures[J]. China Customs, 2022, (8):52-53.
- [4] 施圣玉. 西尼罗河热的防控[J]. 畜牧与饲料科学, 2010, 31(11):160-161.
SHI Shengyu. Prevention and control of West Nile fever[J]. Animal Husbandry and Feed Science, 2010, 31(11):160-161.
- [5] 世界卫生组织. 病媒传播的疾病[EB/OL]. (2020-03-02)[2023-12-17]. <https://www.who.int/zh/news-room/fact-sheets/detail/2023-03-17/en/>.
- [6] GUO Xiaoxia, ZHAO Tongyan, DONG Yande, et al. Survival and replication of dengue-2 virus in diapausing eggs of Aedes albopictus(Diptera: Culicidae)[J]. Journal of Medical Entomology, 2007, 44(3):492-497.
- [7] 闫娟娟. 具有控制策略的媒介传染病模型的稳定性分析[J]. 滨州学院学报, 2022, 38(4):42-48.
YAN Juanjuan. Stability analysis of vector-borne disease model with control strategy[J]. Journal of Binzhou University, 2022, 38(4):42-48.
- [8] 刘晨, 窦雾虹, 李玉峰, 等. 一类具有标准发生率和双垂直传播的媒介传染病模型分析[J]. 纯粹数学与应用数学, 2021, 37(2):198-208.
LIU Chen, DOU Jihong, LI Yufeng, et al. Analysis of a vector-borne infectious diseases model with standard incidence and double vertical transmission[J]. Pure and Applied Mathematics, 2021, 37(2):198-208.
- [9] VAN DEN DRIESSCHE P, WATMOUG J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180(1/2):29-48.
- [10] CASTILLO-CHAVEZ C, THIEME H. Asymptotically autonomous epidemic models[J]. Mathematics, Medicine, 1994.
- [11] LI Michael Y, MULDOWNNEY J S. A geometric approach to global-stability problems[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1996, 27(4):1070-1083.
- [12] LI M Y, GREAF J R, WANG L C, et al. Global dynamics of a SEIR model with varying total population size[J]. Mathematical Biosciences, 1999, 160(2):191-213.

(编辑:胡春燕)

(上接第92页)

- [11] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 北京:高等教育出版社, 2015.
GUO Dajun. Nonlinear functional analysis[M]. Beijing: Higher Education Press, 2015.
- [12] DANCER E N. On positive solutions of some pairs of differential equations[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1984, 284(2):729-743.
- [13] LI L. Coexistence theorems of steady-states for predator-prey interacting systems[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1988, 305(1):143-143.
- [14] DANCER E N. On the indices of fixed points of mappings in cones and applications[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1983, 91(1):131-151.
- [15] NAKASHIMA K, YAMADA Y. Positive steady states for prey-predator models with cross-diffusion[J]. Advances in Differential Equations, 1996, 1(6):1099-1122.
- [16] GILBARG D, TRUDINGER N S. Elliptic partial differential equations of second order[M]. Berlin: Springer, 1983.

(编辑:陈丽萍)