

混合误差下一阶适度爆炸自回归模型最小二乘估计

段体城¹,许成凯¹,鲁紫婕¹,贾沛焱²,谢素雅¹,杨文志^{1*}

(1.安徽大学大数据与统计学院,安徽合肥230601;2.安徽大学文典学院,安徽合肥230601)

摘要:基于误差是 φ -混合序列,研究一阶适度爆炸自回归模型回归系数最小二乘(least squares, LS)估计问题。在误差满足弱条件 $E(u_1)=0$, $E(|u_1|^4)<\infty$ 和 $\varphi(n)=O(n^{-8})$ 时,获得回归系数最小二乘估计的极限分布——柯西分布。通过数据模拟得到的模拟结果与理论结果一致。作为应用,利用一阶适度爆炸模型和自回归系数区间估计,研究英伟达股票2013—2023年的股价增长过程。

关键词:适度爆炸自回归;最小二乘估计;柯西分布;混合序列

中图分类号:O212.1 **文献标志码:**A

引用格式:段体城,许成凯,鲁紫婕,等.混合误差下一阶适度爆炸自回归模型最小二乘估计[J].山东大学学报(理学版),2025,60(3):77-87.

Least squares estimator of the first-order and mildly explosive autoregression with mixing errors

DUAN Ticheng¹, XU Chengkai¹, LU Zijie¹, JIA Peiyan², XIE Suya¹, YANG Wenzhi^{1*}

(1. School of Big Data and Statistics, Anhui University, Hefei 230601, Anhui, China; 2. Wendian College, Anhui University, Hefei 230601, Anhui, China)

Abstract: The least squares (LS) estimator is studied for the first-order and mildly explosive autoregression with φ -mixing errors. Under some weak conditions of $E(u_1)=0$, $E(|u_1|^4)<\infty$ and $\varphi(n)=O(n^{-8})$, the limit distribution of standard Cauchy distribution is obtained for the LS estimator. Some simulations are given, which agree with the theory results. As an application, the first-order mildly explosive model and autoregressive coefficient interval estimation are used to study the growth process of share price for the NVIDIA corporation common stock from 2013 to 2023.

Key words: mildly explosive autoregression; least squares estimator; Cauchy distribution; mixing sequence

0 引言

适度爆炸自回归模型是重要的非平稳模型,在研究经济泡沫等问题中有重要应用。考虑一阶自回归模型

$$y_t = \rho_n y_{t-1} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

其中 ρ_n 为自回归系数, u_t 是均值为0、方差有限的简单随机误差。显然,自回归系数 ρ_n 的取值决定 $\{y_t\}$ 过程的平稳性。例如:当 $|\rho_n| = |\rho| < 1$ 时, $\{y_t\}$ 为平稳过程;当 $|\rho_n| = |\rho| > 1$ 时, $\{y_t\}$ 为爆炸过程;当 $|\rho_n| = |\rho| = 1$ 时, $\{y_t\}$ 为随机游动过程;当 $\rho_n = 1 + c/n^\nu$, $\nu \in (0, 1)$, $c < 0$ 时, $\{y_t\}$ 为次平稳过程;当 $\rho_n = 1 + c/n^\nu$, $\nu \in (0, 1)$, $c > 0$ 时, $\{y_t\}$ 为适度爆炸过程。此外,结合一阶自回归模型(1)和误差平方和最小原则,自回归系数 ρ_n 最小二乘估计量 $\hat{\rho}_n$ 定义为

$$\hat{\rho}_n = \left(\sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^n y_{t-1} y_t \right). \quad (2)$$

很多学者基于误差独立同分布(independent and identically distributed, i.i.d.)条件获得了最小二乘估计 $\hat{\rho}_n$ 的渐近分布。例如:假设 $|\rho_n| = |\rho| < 1$, $\{u_t\}$ 为 i.i.d. 随机误差且 $E(u_1) = 0$ 和 $E(|u_1|^{2+\delta}) < \infty$, 其中 $\delta > 0$, 则在 $y_0 = 0$ 时易得平稳自回归模型最小二乘估计 $\hat{\rho}_n$ 的渐近正态性 $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) \xrightarrow{d} N(0, 1 - \rho^2)$; 假设 $|\rho_n| = |\rho| > 1$, $\{u_t\}$ 为 i.i.d. 高斯误差 $N(0, \sigma^2)$, 其中 $\sigma^2 > 0$, 则在 $y_0 = 0$ 时, White^[1] 和 Anderson^[2] 获得爆炸自回归模型最小二乘估计 $\hat{\rho}_n$ 的渐近柯西性 $\frac{\rho^n}{\rho^2 - 1}(\hat{\rho}_n - \rho) \xrightarrow{d} C$, 其中 C 是标准柯西随机变量; 假设 $\rho_n = 1 + c/n^\nu$, $\nu \in (0, 1)$, $c < 0$, $y_0 = o_p(\sqrt{n^\nu})$, $\{u_t\}$ 为 i.i.d. 随机误差满足 $E(u_1) = 0$ 和 $E(|u_1|^{2+\delta}) < \infty$, 其中 $\delta > 0$, Phillips 等^[3] 在研究单位根检验问题时获得适度平稳自回归模型最小二乘估计 $\hat{\rho}_n$ 的渐近正态性 $\sqrt{n^{1+\nu}}(\hat{\rho}_n - \rho_n) \xrightarrow{d} N(0, 1 - 2c)$; 进一步, 若 $c > 0$ 时, Phillips 等^[3] 获得了适度爆炸自回归模型最小二乘估计 $\hat{\rho}_n$ 的渐近柯西分布

$$\frac{n^\nu \rho_n^n}{2c}(\hat{\rho}_n - \rho_n) \xrightarrow{d} C. \quad (3)$$

Phillips 等^[4]、Magdalinos^[5] 将适度爆炸自回归模型误差由独立同分布情形推广到由鞅差序列构造的移动平均过程, 获得了最小二乘估计 $\hat{\rho}_n$ 的渐近柯西分布式(3), 并将适度爆炸模型应用到经济泡沫问题研究中; Oh 等^[6] 将适度爆炸自回归模型推广到几何 α 混合, 在适当条件下同样获得了最小二乘估计 $\hat{\rho}_n$ 的渐近柯西分布式(3)。显然, 几何 α 混合的混合系数指数递减是非常强的条件, 所以本文将继续研究一阶适度爆炸自回归模型, 其误差是 φ -混合^[7]。虽然 φ -混合是 α -混合, 但是不要求混合系数指数递减。本文证明 φ -混合误差下最小二乘估计 $\hat{\rho}_n$ 的渐近柯西分布式(3)仍然成立。

首先, 给出 φ -混合的定义。设 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 为一随机序列, 记 $\mathcal{F}_n^m = \sigma(X_i, n \leq i \leq m, n, m \in \mathbf{Z})$, 定义混合系数如下:

$$\varphi(n) = \sup_{m \geq 1} \sup_{A \in \mathcal{F}_1^m, B \in \mathcal{F}_{m+n}^\infty, P(A) \neq 0} |P(B|A) - P(B)|.$$

若 $\varphi(n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 则称 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 为 φ 混合序列。 φ 混合序列是弱的相依序列, 应用领域很广, 例如线性时间序列模型和 nonlinear 时间序列模型等。目前很多学者将经典的独立同分布随机序列概率极限理论推广到混合序列情形, 参见文献[7-10]。

多种类型的自回归模型估计和检验问题被广泛研究, 例如: 一阶适度爆炸自回归模型最小二乘估计问题, 见文献[11-14]; 一阶适度平稳自回归模型最小二乘估计问题, 见文献[15-17]; 一阶爆炸自回归模型最小二乘估计问题, 见文献[18-19]; 空间一阶自回归模型见文献[20], 等等。本文基于 φ 混合序列, 研究一阶适度爆炸自回归模型最小二乘估计问题, 获得其极限分布的重要理论成果。

下面给出全文符合说明。当 $n \rightarrow \infty$ 时, 记 \xrightarrow{P} 、 $\xrightarrow{L_2}$ 、 \xrightarrow{d} 分别表示依概率收敛、均方收敛和依分布收敛。如果 X 和 Y 具有相同的分布, 记为 $X \stackrel{d}{=} Y$ 。另外, C 记为标准柯西随机变量, c_1, c_2, \dots 记为不依赖于 n 的正数。

1 模型及结果

考虑一阶适度爆炸回归模型式(1), 其中 $\rho_n = 1 + c/n^\nu$, $c > 0$, $\nu \in (4/11, 1)$, $y_0 = o_p(\sqrt{n^\nu})$, 而误差 $\{u_n, n = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 为 φ -混合序列。对 φ -混合序列施加如下条件:

- (A1) 设 $\{u_n, n = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 为一严平稳序列;
- (A2) 设 $E(u_1) = 0$, $E(|u_1|^4) < \infty$, 并且 $\varphi(n) = O(n^{-8})$ 。

为了证明式(3)中 ρ_n 的最小二乘估计 $\hat{\rho}_n$ 的极限分布, 给出正则化样本 $\sum_{t=1}^n y_{t-1} u_t$ 的协方差可以近似为 X_n 和 Y_n 的乘积, 其中

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{n^\nu}} \sum_{t=1}^n \rho_n^{-(n-t)-1} u_t, \quad Y_n = \frac{1}{\sqrt{n^\nu}} \sum_{j=1}^n \rho_n^{-j} u_j. \quad (4)$$

引理 1 假设条件(A1)–(A2)成立,则当 $n \rightarrow \infty$ 时,有

$$\frac{\rho_n^{-n}}{n^\nu} \sum_{t=1}^n \sum_{j=t}^n \rho_n^{t-j-1} u_j u_t \xrightarrow{L_2} 0, \tag{5}$$

$$\frac{\rho_n^{-2n+1}}{n^\nu} \sum_{t=1}^n \sum_{j=t}^n \rho_n^{t-j-1} u_j u_t \xrightarrow{L_2} 0. \tag{6}$$

引理 2 假设条件(A1)–(A2)成立,则当 $n \rightarrow \infty$ 时,式(4)中的序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 和 $\{Y_n, n \geq 1\}$ 满足

$$(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y), \tag{7}$$

其中 X 和 Y 为 2 个独立且服从 $N(0, \sigma^2/(2c))$ 的随机变量, $c > 0$ (由 $\rho_n = 1 + c/n^\nu$ 定义), 且

$$\sigma^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Cov}(u_0, u_k) > 0. \tag{8}$$

结合引理 1、2, 获得如下 ρ_n 的最小二乘估计 $\hat{\rho}_n$ 的柯西极限分布。

定理 1 假设条件(A1)–(A2)成立,则当 $n \rightarrow \infty$ 时,有

$$\left(\frac{\rho_n^{-n}}{n^\nu} \sum_{t=1}^n y_{t-1} u_t, \frac{\rho_n^{-2n}}{n^{2\nu}} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 \right) \xrightarrow{d} (XY, Y^2), \tag{9}$$

$$\frac{n^\nu \rho_n^n}{2c} (\hat{\rho}_n - \rho_n) \xrightarrow{d} C, \tag{10}$$

其中 X 和 Y 是由式(7)定义。

注 1 基于独立同分布误差, Phillips 等^[3]考虑了一阶适度爆炸自回归模型式(1), 得到了式(9)、(10)。Oh 等^[6]将 Phillips 等的研究成果^[3]推广到几何 α -混合严平稳过程, 并满足 $E(u_1) = 0, E(|u_1|^{4+\delta}) < \infty$, 其中 $\delta > 0$ 。本文将其推广到 φ -混合误差严平稳过程, 满足 $E(u_1) = 0, E(|u_1|^4) < \infty$, 而混合系数无须满足指数递减, 而只须满足 $\varphi(n) = O(n^{-8})$ 。

注 2 由式(10)易知

$$\frac{n^\nu \rho_n^n}{2c} (\hat{\rho}_n - \rho_n) = \frac{\rho_n^n}{2(\rho_n - 1)} (\hat{\rho}_n - \rho_n) \xrightarrow{d} C, \tag{11}$$

$$\frac{\rho_n^n}{\rho_n^2 - 1} (\hat{\rho}_n - \rho_n) \xrightarrow{d} C, \tag{12}$$

其中, 式(11)、(12)用到了 $\rho_n^2 - 1 = (c/n^\nu + 2)c/n^\nu \sim 2c/n^\nu = 2(\rho_n - 1)$ 。这里 $a_n \sim b_n$ 记为 $a_n/b_n \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ 。事

事实上, 根据 Phillips 等^[3]的命题 A.1 知 $\frac{\rho_n^{-n} n}{n^\nu} = o(1)$, 结合 $n^\nu \rho_n^n = o(n)$ 和 $\frac{n^\nu \rho_n^n}{2c} (\hat{\rho}_n - \rho_n) = O_p(1)$, 有 $\hat{\rho}_n/\rho_n \xrightarrow{p} 1$ 和

$(\hat{\rho}_n/\rho_n)^n \xrightarrow{p} 1$ (见文献[6])。应用式(10), ρ_n 的 $(1-\alpha)$ 置信区间为

$$\left[\hat{\rho}_n - \frac{\hat{\rho}_n^2 - 1}{\hat{\rho}_n} C_\alpha, \hat{\rho}_n + \frac{\hat{\rho}_n^2 - 1}{\hat{\rho}_n} C_\alpha \right] := [\underline{\rho}_n, \bar{\rho}_n], \tag{13}$$

其中, $\underline{\rho}_n$ 和 $\bar{\rho}_n$ 分别为 ρ_n 的置信下限和置信上限, C_α 是显著性水平为 α 的标准柯西分布双尾 α 百分位临界值。例如, $C_{0.1} = 6.3, C_{0.05} = 12.7, C_{0.01} = 63.7$, 详见文献[21]。

2 数据模拟

考虑一阶适度爆炸自回归模型

$$y_t = \rho_n y_{t-1} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \tag{14}$$

其中, $y_0 = 0, \rho_n = 1 + \frac{c}{n^\nu}, c > 0$ 且 $\nu \in (4/11, 1)$ 。此外, u_1, u_2, \dots, u_n 满足均值为 0 的随机误差。令误差向量

$(u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ 满足高斯模型, 即

$$(u_1, u_2, \dots, u_n)^T \xrightarrow{d} N_n(\mathbf{0}, \Sigma_n), \tag{15}$$

其中, $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{n \times 1}$, Σ_n 为如下 Toeplitz 型协方差阵

$$\Sigma_n = \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{n-1} \\ \xi_1 & \xi_0 & \cdots & \xi_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1} & \xi_{n-2} & \cdots & \xi_0 \end{pmatrix},$$

其中, $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty$, $\xi_0 > 0$ 。数据模拟中, 取 $\xi_i = (-1)^i i^{-\beta}$, $i = 0, 1, \dots, \beta > 1$, 易见 $\{u_n\}$ 为 φ -混合序列, 且满足

$\varphi(n) = O(n^{-\beta})$ 。由式(11)、(12), $\hat{\rho}_n/\rho_n \xrightarrow{P} 1$ 和 $(\hat{\rho}_n/\rho_n)^n \xrightarrow{P} 1$ 。给出直方图来演示渐近柯西分布结果

$\frac{\rho_n^n}{\rho_{n-1}^2-1}(\hat{\rho}_n - \rho_n) \xrightarrow{d} C$ 和 $\frac{\hat{\rho}_n^n}{\hat{\rho}_{n-1}^2-1}(\hat{\rho}_n - \rho_n) \xrightarrow{d} C$ 。首先, 在一阶适度爆炸模型式(14)中, 取 $c = 0.4, v = 0.6$, Toeplitz 型协

方差阵 Σ_n 中取 $\beta = 8$; 其次, 样本 n 分别取 400、800 和 1 200, 实验重复 1 万次, 分别获得 $\frac{\rho_n^n}{\rho_{n-1}^2-1}(\hat{\rho}_n - \rho_n)$ 和

$\frac{\hat{\rho}_n^n}{\hat{\rho}_{n-1}^2-1}(\hat{\rho}_n - \rho_n)$ 直方图 1、2, 其中红线为标准柯西密度函数图像。

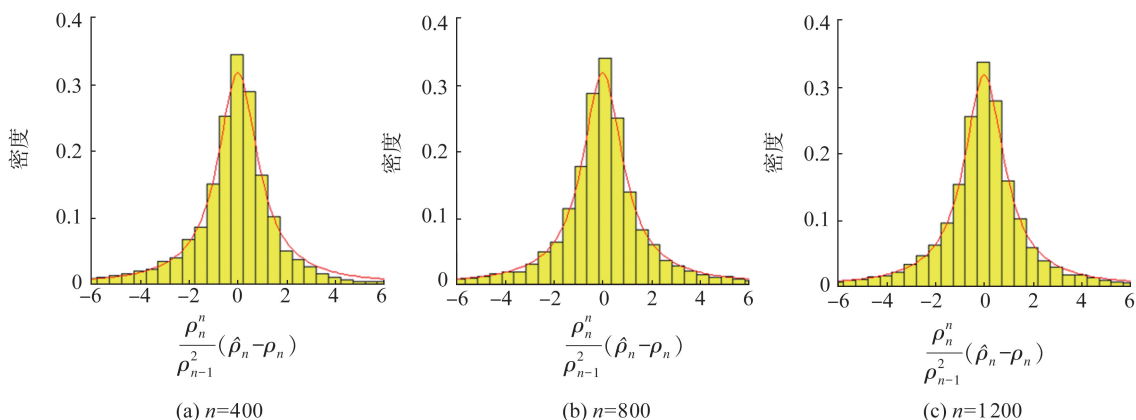


图 1 $\frac{\rho_n^n}{\rho_{n-1}^2-1}(\hat{\rho}_n - \rho_n)$ 在 $c = 0.4, v = 0.6, \beta = 8, n = [400, 800, 1200]$ 的直方图

Fig.1 $\frac{\rho_n^n}{\rho_{n-1}^2-1}(\hat{\rho}_n - \rho_n)$ histograms of $c = 0.4, v = 0.6, \beta = 8, n = [400, 800, 1200]$

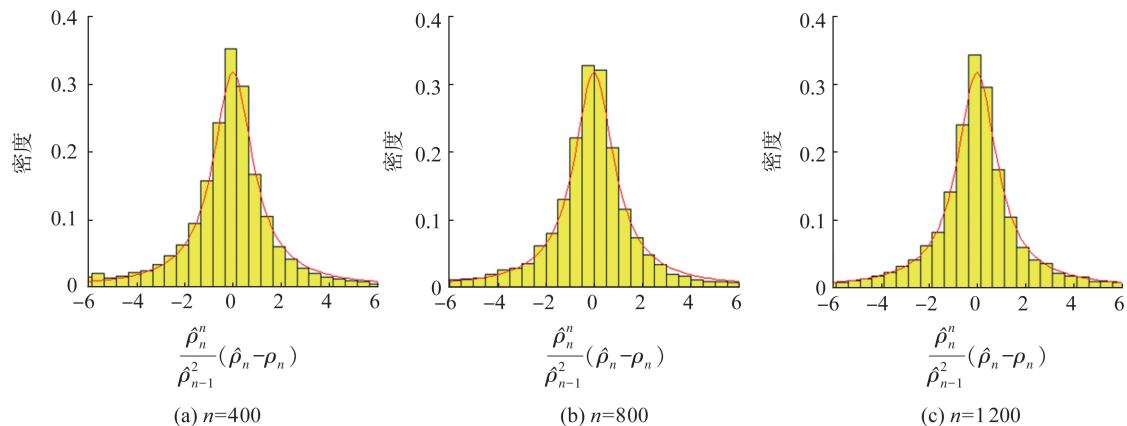


图 2 $\frac{\hat{\rho}_n^n}{\hat{\rho}_{n-1}^2-1}(\hat{\rho}_n - \rho_n)$ 在 $c = 0.4, v = 0.6, \beta = 8, n = [400, 800, 1200]$ 的直方图

Fig.2 $\frac{\hat{\rho}_n^n}{\hat{\rho}_{n-1}^2-1}(\hat{\rho}_n - \rho_n)$ histograms of $c = 0.4, v = 0.6, \beta = 8, n = [400, 800, 1200]$

类似地,在 Toeplitz 型协方差阵 Σ_n 中取 $\beta=2$,其他参数不变,同样获得 $\frac{\rho_n^n}{\rho_{n-1}^2-1}(\hat{\rho}_n-\rho_n)$ 和 $\frac{\hat{\rho}_n^n}{\hat{\rho}_{n-1}^2-1}(\hat{\rho}_n-\rho_n)$ 直方图分别如图 3、4 所示。

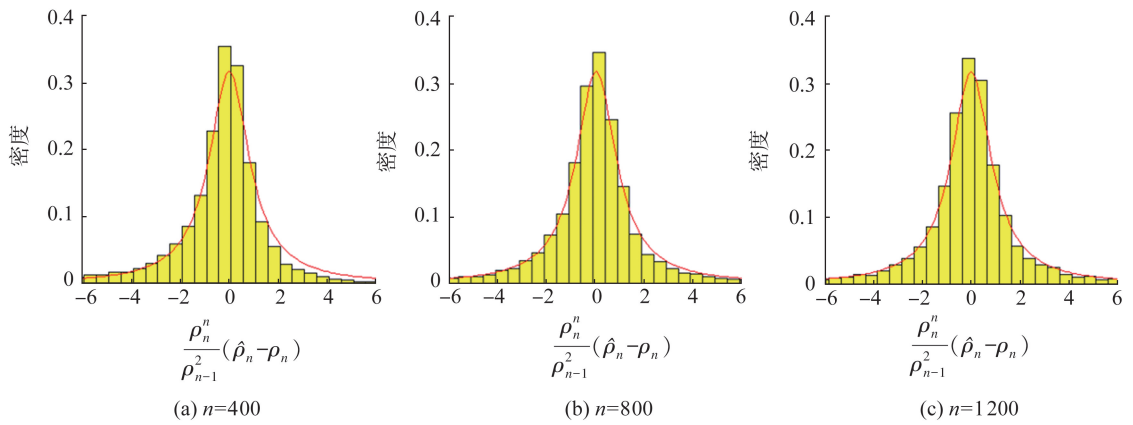


图 3 $\frac{\rho_n^n}{\rho_{n-1}^2-1}(\hat{\rho}_n-\rho_n)$ 在 $c=0.4, v=0.6, \beta=2, n=[400, 800, 1200]$ 的直方图

Fig.3 $\frac{\rho_n^n}{\rho_{n-1}^2-1}(\hat{\rho}_n-\rho_n)$ histograms of $c=0.4, v=0.6, \beta=2, n=[400, 800, 1200]$

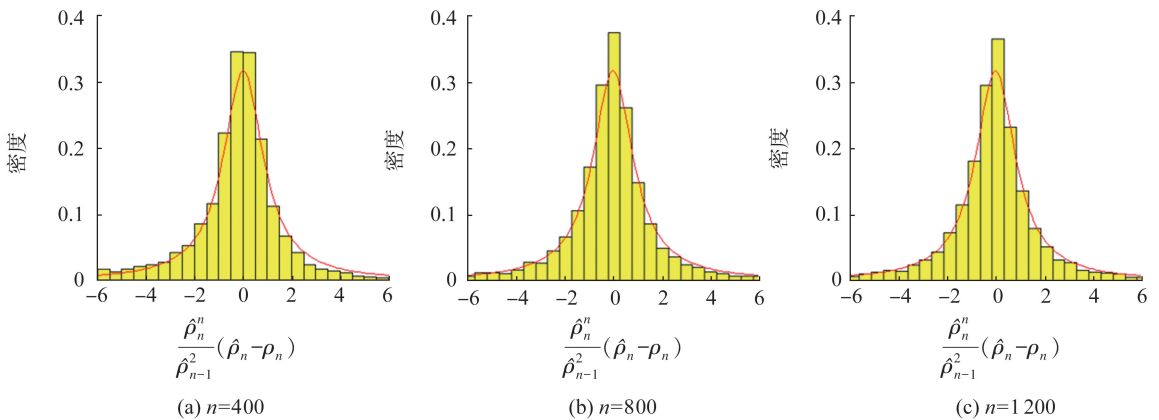


图 4 $\frac{\hat{\rho}_n^n}{\hat{\rho}_{n-1}^2-1}(\hat{\rho}_n-\rho_n)$ 在 $c=0.4, v=0.6, \beta=2, n=[400, 800, 1200]$ 的直方图

Fig.4 $\frac{\hat{\rho}_n^n}{\hat{\rho}_{n-1}^2-1}(\hat{\rho}_n-\rho_n)$ histograms of $c=0.4, v=0.6, \beta=2, n=[400, 800, 1200]$

由图 1、2 知:一方面 $\frac{\rho_n^n}{\rho_{n-1}^2-1}(\hat{\rho}_n-\rho_n)$ 和 $\frac{\hat{\rho}_n^n}{\hat{\rho}_{n-1}^2-1}(\hat{\rho}_n-\rho_n)$ 的直方图随着样本量 n 增大而逼近标准柯西分布密度图像,所以模拟结果与定理 1 理论结果吻合;另一方面,在 Σ_n 中取 $\beta=2$ 时,由图 3、4 的模拟结果和图 1、2 类似性质,所以本文混合系数 $\varphi(n) = O(n^{-8})$ 条件可以在未来研究工作中进一步放宽。

3 实例分析

在本章中,利用一阶适度爆炸模型研究英伟达股票从 2013—2023 年的股价,通过应用式 (13) 给出自回归系数的置信区间。在网页 <https://www.advfn.com> 下载英伟达股票 2013 年 6 月 3 日至 2023 年 5 月 31 日期间每天开盘价数据,记为 $P_t, 1 \leq t \leq n=2517$ 。对股价 P_t 取对数,记为 $y_t = \log(P_t)$,并令 $P_0 = 1, y_0 = 0$,则 $\{y_t\}$ 的折线图见图 5。

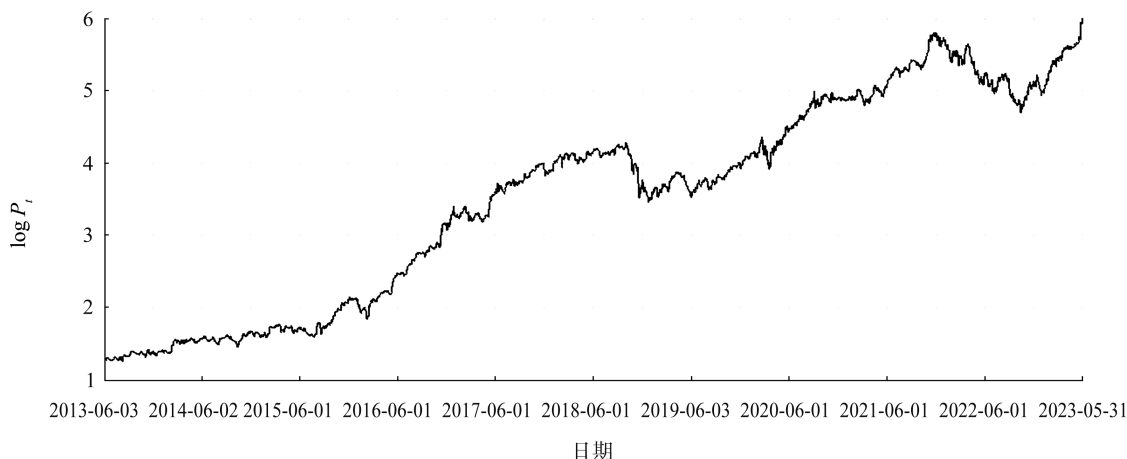
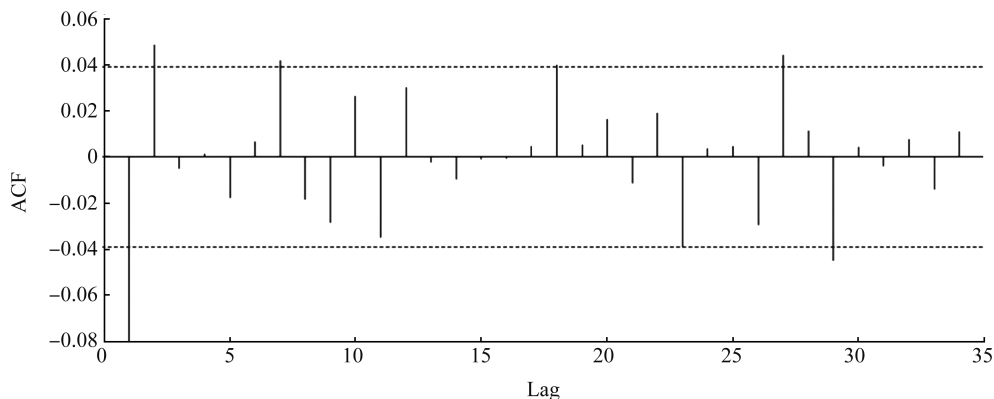


图5 2013年6月至2023年5月英伟达股票对数开盘价格数据增长图

Fig.5 Growth chart of NVIDIA stock log opening price data from June 2013 to May 2023

显然, $\{y_t\}$ 过程是个增长过程。利用 augmented dickey fuller (ADF) 检验进行单位根检验, ADF 值为 -1.8564 , 滞后阶数 $Lag=1$, 而 ADF 的 p 值为 0.6391 , 意味 $\{y_t\}$ 过程是非平稳的, 因此利用一阶适度爆炸模型 $y_t = \rho_n y_{t-1} + \mu_t$ 研究 $\{y_t\}$ 过程是合适的。令 $\hat{\mu}_t = y_t - \hat{\rho}_n y_{t-1}$ 为误差 μ_t 的残差估计量, 其中 $\hat{\rho}_n$ 是 ρ_n 的最小二乘估计式(2)。图6为残差项 $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_n$ 的自相关函数 (autocorrelation function, ACF) 图。由图6知, 残差的相关性较弱, 符合混合序列渐近无关性质。

图6 残差项 $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_n$ 的 ACF 图Fig.6 ACF plot of residual terms $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_n$

最后, 利用式(13), 给出自回归系数 ρ_n 估计的置信区间, 见图7。由图7知, 自回归系数 ρ_n 在起始部位不太稳定, 但随着样本点 n 的增大, 回归系数 ρ_n 在 1 附近变化, 满足一阶适度爆炸模型回归系数要求。

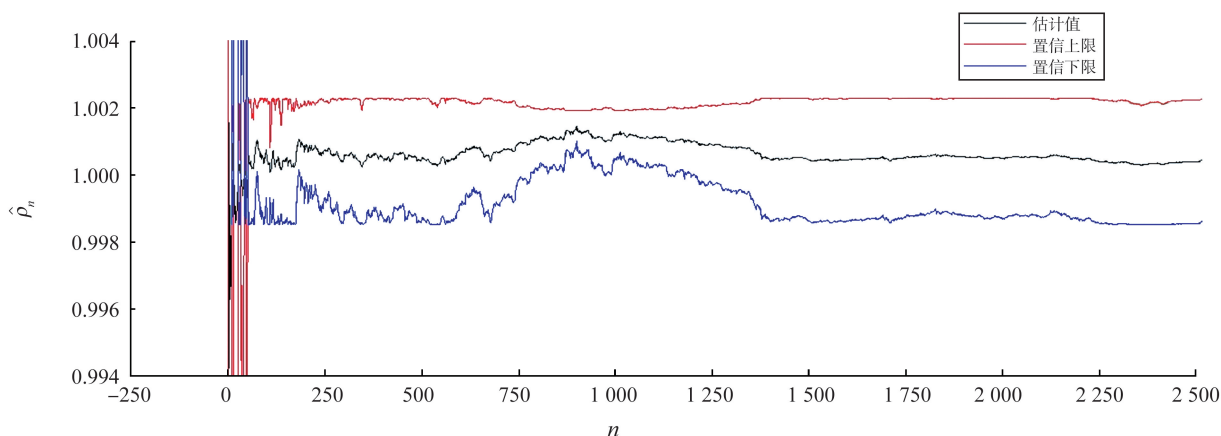


图7 自回归系数区间估计

Fig.7 Autoregressive coefficient interval estimation

4 证明

引理 3^[7] 设 X 和 Y 分别关于 $\mathcal{M}_{-\infty}^k$ 和 \mathcal{M}_{k+n}^∞ ($k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}^+$) 可测, 如果 $E(|X|^p) < \infty$ 且 $E(|Y|^q) < \infty$, $p, q \geq 1$ 且 $1/p + 1/q = 1$, 则

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq 2\varphi^{1/p}(n) (E(|X|^p))^{1/p} (E(|Y|^q))^{1/q}.$$

引理 4^[22] 设 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 是均值为 0 的 φ -混合序列, 假设 p 和 q 是 2 个正整数, 令 $\eta_l = \sum_{j=(l-1)(p+q)+1}^{(l-1)(p+q)+p} X_j$ 其中 $1 \leq l \leq k$, 则

$$\left| E \left(\exp \left\{ it \sum_{l=1}^k \eta_l \right\} \right) - \prod_{l=1}^k E \left(\exp \{ i t \eta_l \} \right) \right| \leq c_1 |t| \varphi(q) \sum_{l=1}^k E(|\eta_l|),$$

其中: $i^2 = -1; t \in \mathbf{R}; c_1$ 为不依赖于 n 的正数。

引理 5^[23] 设 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 是均值为 0 的 φ -混合序列, 且 $\sum_{n=1}^\infty \varphi^{1/2}(n) < \infty$, 如果对于 $p \geq 2$ 且 $n \geq 1$, 有 $E(X_n) = 0, E(|X_n|^p) < \infty$, 则对 $1 \leq i \leq n$,

$$E \left(\left| \sum_{i=1}^n X_i \right|^p \right) \leq c_2 \left\{ \sum_{i=1}^n E(|X_i|^p) + \left(\sum_{i=1}^n E(X_i^2) \right)^{p/2} \right\}, \quad n \geq 1,$$

其中 c_2 为不依赖于 n 的正数。

引理 1 的证明 易见

$$\begin{aligned} E \left(\left| \frac{\rho_n^{-n}}{n^v} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \rho_n^{t-j-1} u_j u_i \right|^2 \right) &\leq \frac{\rho_n^{-2n}}{n^{2v}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \sum_{s=1}^n \sum_{k=s}^n \rho_n^{-(j-t)-(k-s)-2} |E(u_i u_j u_s u_k)| \\ &\leq c_1 \frac{\rho_n^{-2n}}{n^{2v}} \sum_{1 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \leq n} |E(u_{t_1} u_{t_2} u_{t_3} u_{t_4})|. \end{aligned} \tag{16}$$

类似文献[24, 引理 14] 的证明, 对于任何 $q \geq 2$, 有

$$A_q(n) = \sum_{1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_q \leq n} \left| E(u_{t_1} u_{t_2} \dots u_{t_q}) \right|, \tag{17}$$

和

$$V_q(n) = \sum |\text{Cov}(u_{t_1} u_{t_2} \dots u_{t_m}, u_{t_{m+1}} u_{t_{m+2}} \dots u_{t_q})|, \tag{18}$$

其中在 $\{t_1, t_2, \dots, t_q\}$ 满足 $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_q \leq n$, 且 $r = t_{m+1} - t_m = \max_{1 \leq i < q} (t_{i+1} - t_i)$, 显然

$$\begin{aligned} A_q(n) &\leq \sum_{1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_q \leq n} |E(u_{t_1} u_{t_2} \dots u_{t_m}) E(u_{t_{m+1}} u_{t_{m+2}} \dots u_{t_q})| \\ &\quad + \sum_{1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_q \leq n} |\text{Cov}(u_{t_1} u_{t_2} \dots u_{t_m}, u_{t_{m+1}} u_{t_{m+2}} \dots u_{t_q})|. \end{aligned} \tag{19}$$

由式(19), 易见

$$\sum_{1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_q \leq n} |E(u_{t_1} u_{t_2} \dots u_{t_m}) E(u_{t_{m+1}} u_{t_{m+2}} \dots u_{t_q})| \leq \sum_{m=1}^{q-1} A_m(n) A_{q-m}(n), \tag{20}$$

(见文献[24])。进一步地, 从式(19)、(20)知

$$A_q(n) \leq \sum_{m=1}^{q-1} A_m(n) A_{q-m}(n) + V_q(n), \tag{21}$$

对 $q \geq 2, m \geq 1$, 利用引理 3, 有

$$\left| \text{Cov}(u_{t_1} u_{t_2} \dots u_{t_m}, u_{t_{m+1}} u_{t_{m+2}} \dots u_{t_q}) \right| \leq 2\varphi^{\frac{m}{q}}(r) \left[E(|u_{t_1} u_{t_2} \dots u_{t_m}|^{\frac{q}{m}}) \right]^{\frac{m}{q}} \left[E(|u_{t_{m+1}} u_{t_{m+2}} \dots u_{t_q}|^{\frac{q}{q-m}}) \right]^{\frac{q-m}{q}}. \tag{22}$$

连续使用 Hölder 不等式, 得到

$$\left[E \left(|u_{t_1} u_{t_2} \dots u_{t_m}|^{\frac{q}{m}} \right) \right]^{\frac{m}{q}} \leq \left[E(|u_{t_1}|^q) \right]^{\frac{1}{q}} \left[E(|u_{t_2} u_{t_3} \dots u_{t_m}|^{\frac{q}{m-1}}) \right]^{\frac{m-1}{q}} \leq \dots \leq \left[E(|u_1|^q) \right]^{\frac{m}{q}}, \tag{23}$$

因此,由式(22)、(23)知

$$|\text{Cov}(u_{t_1} u_{t_2} \cdots u_{t_m}, u_{t_{m+1}} \cdots u_{t_q})| \leq 2\varphi^{\frac{m}{q}}(r) E(|u_1|^q), \tag{24}$$

从而有

$$M_{r,q} = \sup |\text{Cov}(u_{t_1} u_{t_2} \cdots u_{t_m}, u_{t_{m+1}} u_{t_{m+2}} \cdots u_{t_q})| \leq 2\varphi^{\frac{m}{q}}(r) E(|u_1|^q), \tag{25}$$

其中对所有 $1 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_q \leq n$, $1 \leq m < q$, 取上确界, 且 $t_{m+1} - t_m \geq r$. 根据假设 $\varphi(n) = O\left(n^{-\frac{q^2}{2m}}\right)$, 有

$$M_{r,q} = O\left(r^{-\frac{q^2 m}{2mq}}\right) = O\left(r^{-\frac{q}{2}}\right). \tag{26}$$

此外,由式(26)知

$$V_q(n) \leq \sum_{t_1=1}^n \sum_{r=1}^{n-1} (r+1)^{q-2} M_{r,q} \leq c_1 \sum_{t_1=1}^n \sum_{r=1}^{n-1} r^{q-2-q/2} \leq c_2 n^{q/2}, \tag{27}$$

因此,由式(17)–(19)、(21)和(27),有

$$A_q(n) \leq \sum_{m=1}^{q-1} A_m(n) A_{q-m}(n) + V_q(n) \leq c_3 n^{q/2}. \tag{28}$$

由 $E(|u_1|^4) < \infty$, $\varphi(n) = O(n^{-8})$, 式(16)、(28), 取 $q=4, m=1$, 得

$$E \left| \frac{\rho_n^{-n}}{n^v} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \rho_n^{i-j-1} u_j u_i \right|^2 \leq c_1 \frac{\rho_n^{-2n}}{n^{2v}} A_4(n) \leq c_2 \frac{\rho_n^{-2n} n^2}{n^{2v}} = o(1).$$

由于 $\frac{\rho_n^{-n} n}{n^v} = o(1)$, 因此对于每个 $c > 0$, $\rho_n^{-n} = o(n^v - 1)$ (见文献[3, 命题 A.1]), 式(5)证毕. 式(6)证明类

似, 故省略, 证毕.

引理 2 的证明

由 Cramer–Wold 的方法, 只须证明

$$aX_n + bY_n \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{(a^2 + b^2)\sigma^2}{2c}\right), \quad \forall a, b \in \mathbf{R}, \tag{29}$$

其中 $\sigma^2 > 0$ 由式(8)定义. 记 $aX_n + bY_n = \frac{1}{\sqrt{n^v}} \sum_{i=1}^n \xi_{ni}$, 其中

$$\xi_{ni} = (a\rho_n^{-i} + b\rho_n^{-(n-i)-1})u_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

假设 $\{k_n\}, \{p_n\}, \{q_n\}$ 为正整数序列, 将 $\sum_{i=1}^n \xi_{ni}$ 分成大块 p_n 部分和小块 q_n 部分. 定义 $k_n \sim n^{1-v/2}$, $p_n \sim n^{v/2} - n^{v/4}$, $q_n \sim n^{v/4}$, 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $q_n/p_n \rightarrow 0$, $k_n(p_n + q_n)/n \rightarrow 1$, 因此有

$$\frac{1}{\sqrt{n^v}} \sum_{i=1}^n \xi_{ni} = \frac{1}{\sqrt{n^v}} \sum_{m=1}^{k_n} y_{nm} + \frac{1}{\sqrt{n^v}} \sum_{m=1}^{k_n} y'_{nm} + \frac{1}{\sqrt{n^v}} y''_{nk_n}, \tag{30}$$

其中 $y_{nm} = \sum_{i=(m-1)(p_n+q_n)+1}^{(m-1)(p_n+q_n)+p_n} \xi_{ni}$, $y'_{nm} = \sum_{j=(m-1)(p_n+q_n)+p_n+1}^{m(p_n+q_n)} \xi_{nj}$, $1 \leq m \leq k$, $y''_{nk_n} = \sum_{l=k(p_n+q_n)+1}^n \xi_{nl}$. 接下来, 将证明

$$\frac{1}{\sqrt{n^v}} \sum_{m=1}^{k_n} y_{nm} \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{(a^2 + b^2)\sigma^2}{2c}\right), \tag{31}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^v}} \sum_{m=1}^{k_n} y'_{nm} \xrightarrow{p} 0, \quad \frac{1}{\sqrt{n^v}} y''_{nk_n} \xrightarrow{p} 0. \tag{32}$$

由于 $E(|u_1|^4) < \infty$, $\varphi(n) = O(n^{-8})$, 因此应用引理 3 得

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{k_n} \left(E(|y_{nm}|^4)\right)^{\frac{1}{4}} &\leq c_1 \sum_{m=1}^{k_n} \left[\sum_{i=(m-1)(p_n+q_n)+1}^{(m-1)(p_n+q_n)+p_n} E(|\xi_{ni}|^4) + \left(\sum_{i=(m-1)(p_n+q_n)+1}^{(m-1)(p_n+q_n)+p_n} E(|\xi_{ni}|^2) \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}} \\ &\leq c_2 \sum_{m=1}^{k_n} p_n^{1/2} = O(k_n p_n^{1/2}). \end{aligned} \tag{33}$$

由式(33)和引理 4, 得

$$\begin{aligned}
 & \left| E \left(\exp \left(i t \sum_{m=1}^{k_n} \frac{y_{nm}}{\sqrt{n^v}} \right) \right) - \prod_{m=1}^{k_n} E \left(\exp \left(i t \frac{y_{nm}}{\sqrt{n^v}} \right) \right) \right| \\
 & \leq c_1 t \varphi(q_n) \frac{1}{\sqrt{n^v}} \sum_{m=1}^{k_n} E(|y_{nm}|) \leq c_1 t \varphi(q_n) \frac{1}{\sqrt{n^v}} \sum_{m=1}^{k_n} \left(E(|y_{nm}|^4) \right)^{\frac{1}{4}} \\
 & \leq c_2 \frac{1}{n^{v/2}} q_n^{-8} k_n p_n^{1/2} \leq c_3 \frac{1}{n^{v/2}} n^{-2v} n^{1-v/2} n^{v/4} \\
 & \leq c_4 n^{1-\frac{11}{4}v} \rightarrow 0,
 \end{aligned} \tag{34}$$

其中 $i^2 = -1$, $t \in \mathbf{R}$, $v > 4/11$ 。对于 $m = 1, 2, \dots, k_n$, 得

$$\begin{aligned}
 E(y_{nm}^2) &= E \left(\sum_{i=(m-1)(p_n+q_n)+1}^{(m-1)(p_n+q_n)+p_n} (a \rho_n^{-i} + b \rho_n^{-(n-i)-1}) u_i \right)^2 \\
 &= E \left(\sum_{i=1}^{p_n} (a \rho_n^{-(m-1)(p_n+q_n)-i} + b \rho_n^{-(n-(m-1)(p_n+q_n)-i)-1}) u_{(m-1)(p_n+q_n)+i} \right)^2 \\
 &= \sum_{j=-(p_n-1)}^{p_n-1} \sum_{i=1}^{p_n-|j|} (I_1 + I_2) E(u_0 u_j),
 \end{aligned}$$

其中 $I_1 = a^2 \rho_n^{-2(m-1)(p_n+q_n)-2i-|j|} + b^2 \rho_n^{-2(n-(m-1)(p_n+q_n)-i)+|j|-1}$, $I_2 = ab \rho_n^{-n-1} (\rho_n^{-|j|} + \rho_n^{|j|})$ 。类似 Oh 等^[6]的方法, 有

$\sum_{j=-(p_n-1)}^{p_n-1} \rho_n^{-|j|} E(u_0 u_j) \rightarrow \sigma^2 > 0$, 其中 σ^2 由式(8)定义。结合 $\frac{\rho_n^{-n}}{n^v} = o(1)$ 和 $k_n p_n \sim n$, 有

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{k_n} E \left[\left(\frac{y_{nm}}{\sqrt{n^v}} \right)^2 \right] = \frac{1}{n^v} \sum_{m=1}^{k_n} \sum_{j=-(p_n-1)}^{p_n-1} \sum_{i=1}^{p_n-|j|} (I_1 + I_2) E(u_0 u_j) \\
 &= \sum_{m=1}^{k_n} \frac{a^2 \rho_n^{-2(m-1)(p_n+q_n)+2}}{n^v (\rho_n^2 - 1)} \sum_{j=-(p_n-1)}^{p_n-1} \rho_n^{-|j|} (1 - \rho_n^{-2(p_n-|j|)}) E(u_0 u_j) \\
 &+ \sum_{m=1}^{k_n} \frac{b^2 \rho_n^{-2(n-(m-1)(p_n+q_n)+2)}}{n^v (\rho_n^2 - 1)} \sum_{j=-(p_n-1)}^{p_n-1} \rho_n^{|j|} (\rho_n^{2(p_n-|j|)} - 1) E(u_0 u_j) \\
 &\rightarrow \frac{(a^2 + b^2) \sigma^2}{2c}.
 \end{aligned} \tag{35}$$

显然, 对于所有 $\eta > 0$, 根据式(33)、(35)和马尔可夫不等式, 有

$$E \left[\left(\frac{y_{nm}}{\sqrt{n^v}} \right)^2 I \left(\left| \frac{y_{nm}}{\sqrt{n^v}} \right| > \eta \right) \right] = \frac{1}{n^v} E \left[y_{nm}^2 I \left(\left| \frac{y_{nm}}{\sqrt{n^v}} \right| > \eta \right) \right] \leq \frac{1}{\eta^2 n^{2v}} E(y_{nm}^4) = O(p_n^2/n^{2v}),$$

从而有

$$\sum_{m=1}^{k_n} E \left[\left(\frac{y_{nm}}{\sqrt{n^v}} \right)^2 I \left(\left| \frac{y_{nm}}{\sqrt{n^v}} \right| > \eta \right) \right] = O(k_n p_n^2/n^{2v}) \rightarrow 0. \tag{36}$$

由式(34)–(36)可得式(31)。类似式(31)证明有

$$\frac{1}{\sqrt{n^{v/2}}} \sum_{m=1}^{k_n} y'_{nm} \xrightarrow{d} N \left(0, \frac{(a^2 + b^2) \sigma^2}{2c} \right), \tag{37}$$

从而有

$$\frac{1}{\sqrt{n^v}} \sum_{m=1}^{k_n} y'_{nm} \xrightarrow{p} 0. \tag{38}$$

另外, 由式(33)的证明和 $k_n(p_n + q_n)/n \rightarrow 1$, 知

$$E \left(\frac{1}{\sqrt{n^v}} y''_{nk_n} \right)^2 = \frac{1}{n^v} E(y''_{nk_n})^2 \leq \frac{c_1}{n^v} \left(\sum_{l=k(p_n+q_n)+1}^n a \rho_n^{-l} + b \rho_n^{-(n-l)-1} \right) = o(1), \tag{39}$$

因此, 由式(38)、(39), 式(32)的证明完毕。进一步地, 结合式(30)–(32), 式(29)证毕。

定理1的证明

对式(1)两边取平方,并对 $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ 有

$$\begin{aligned} \frac{\rho_n^{-2n}}{n^v} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 &= \frac{1}{n^{2v}(\rho_n^2-1)} \left\{ \rho_n^{-2n}(y_n^2 - y_0^2) - 2\rho_n^{-2n+1} \sum_{t=1}^n y_{t-1} u_t - \rho_n^{-2n} \sum_{t=1}^n u_t^2 \right\} \\ &= \frac{1}{n^v(\rho_n^2-1)} \left\{ \frac{\rho_n^{-2n}}{n^v} y_n^2 - \frac{2\rho_n^{-2n+1}}{n^v} \sum_{t=1}^n y_{t-1} u_t - \frac{\rho_n^{-2n}}{n^v} \sum_{t=1}^n u_t^2 \right\} + o_p(p_n^{-2n}), \end{aligned} \quad (40)$$

其中 $y_0 = o_p(p_n^{-2n})$ 。由于 $n^v(\rho_n^2-1) \rightarrow 2c$, 因此有

$$\frac{\rho_n^{-2n}}{n^v} \sum_{t=1}^n u_t^2 = O_p\left(\frac{\rho_n^{-2n} n}{n^v}\right) = o_p(1). \quad (41)$$

另外,从引理1、2知

$$\frac{\rho_n^{2n+1}}{n^v} \sum_{t=1}^n y_{t-1} u_t = \frac{y_0}{\sqrt{n^v}} \frac{\rho_n^n}{\sqrt{n^v}} \sum_{t=1}^n \rho_n^{-(n-t)} u_t + \frac{\rho_n^{2n+1}}{n^v} \sum_{t=1}^n \left(\sum_{j=1}^{t-1} \rho_n^{t-1-j} u_j \right) u_t = o_p(1), \quad (42)$$

因此,从式(40)–(42)知

$$\frac{\rho_n^{-2n}}{n^{2v}} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 = \frac{1}{n^v(\rho_n^2-1)} \left(\frac{\rho_n^{-n}}{\sqrt{n^v}} y_n \right)^2 + o_p(1) = \frac{1}{n^v(\rho_n^2-1)} \left(\frac{1}{\sqrt{n^v}} \sum_{j=1}^n \rho_n^{-j} u_j \right)^2 + o_p(1) = \frac{1}{2c} Y_n^2 + o_p(1),$$

其中 Y_n 由式(4)定义,并且 $n^v(\rho_n^2-1) \rightarrow 2c$ 。应用引理2得

$$\frac{\rho_n^{-2n}}{n^{2v}} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 \xrightarrow{d} \frac{1}{2c} Y^2, \quad Y \stackrel{d}{=} N\left(0, \frac{\sigma^2}{2c}\right), \quad (43)$$

其中 Y 为引理2中 Y_n 的极限分布随机变量。此外,由文献[3]知

$$\frac{\rho_n^{-n}}{n^v} \sum_{t=1}^n y_{t-1} u_t = \frac{y_0}{\sqrt{n^v}} \frac{1}{\sqrt{n^v}} \sum_{t=1}^n \rho_n^{-(n-t+1)} u_t + \frac{\rho_n^{-n}}{n^v} \sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^{t-1} \rho_n^{t-j-1} u_j u_t.$$

显然,由 $y_0/\sqrt{n^v} = o_p(1)$, 第一项是 $o_p(1)$, 而

$$\frac{1}{\sqrt{n^v}} \sum_{t=1}^n \rho_n^{-(n-t+1)} u_t = \frac{1}{\sqrt{n^v}} \sum_{j=1}^n \rho_n^{-j} u_{n+1-j} \xrightarrow{d} \frac{1}{\sqrt{n^v}} \sum_{t=1}^n \rho_n^{-t} u_t = Y_n = O_p(1),$$

(用到引理2结论 $Y_n \xrightarrow{d} Y$)。由引理1知

$$\begin{aligned} \frac{\rho_n^{-n}}{n^v} \sum_{t=1}^n y_{t-1} u_t &= \frac{\rho_n^{-n}}{n^v} \sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^{t-1} \rho_n^{t-j-1} u_j u_t + o_p(1) = \rho_n^{-n} \sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^{t-1} \rho_n^{t-j-1} u_j u_t + \frac{\rho_n^{-n}}{k_n} \sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^{t-1} \rho_n^{t-j-1} u_j u_t + o_p(1) \\ &= \frac{\rho_n^{-n}}{n^v} \sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_n^{t-j-1} u_j u_t + o_p(1) = \left(\frac{1}{\sqrt{n^v}} \sum_{t=1}^n \rho_n^{-(n-t)-1} u_t \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n^v}} \sum_{j=1}^n \rho_n^{-j} u_j \right) + o_p(1) \\ &= X_n Y_n + o_p(1). \end{aligned}$$

根据引理2知

$$\frac{\rho_n^{-n}}{n^v} \sum_{t=1}^n y_{t-1} u_t \xrightarrow{d} XY, \quad X, Y \stackrel{d}{=} N\left(0, \frac{\sigma^2}{2c}\right). \quad (44)$$

结合式(43)、(44),式(9)得证。另外,式(10)是式(43)、(44)的直接结果,且极限随机变量 X 和 Y 相互独立,证毕。

参考文献:

- [1] WHITE J S. The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case[J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1958, 29(4):1188-1197.
- [2] ANDERSON T W. On asymptotic distributions of estimates of parameters of stochastic difference equations[J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1959, 30(3):676-687.
- [3] PHILLIPS P C B, MAGDALINOS T. Limit theory for moderate deviations from a unit root[J]. Journal of Econometrics, 2007, 136(1):115-130.

- [4] PHILLIPS P C B, MAGDALINOS T. Limit theory for moderate deviations from a unit root under weak dependence[M] // PHILLIPS G D A, TZAVALIS E. The Refinement of Econometric Estimation and Test Procedures: Finite Sample and Asymptotic Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 2007:123-162.
- [5] MAGDALINOS T. Mildly explosive autoregression under weak and strong dependence[J]. Journal of Econometrics, 2012, 169(2):179-187.
- [6] OH H, LEE S, CHAN N H. Mildly explosive autoregression with mixing innovations[J]. Journal of Korean Statistical Society, 2018, 47(1):41-53.
- [7] 陆传荣,林正炎. 混合相依变量的极限理论[M]. 北京:科学出版社,1997:2-34.
LU Chuanrong, LIN Zhengyan. Limit theory for mixing dependent random variables[M]. Beijing: Science Press, 1997:2-34.
- [8] FAN Jianqing, YAO Qiwei. Nonlinear time series: nonparametric and parametric methods[M]. New York: Springer, 2003: 67-74.
- [9] 伍欣叶,吴群英. φ 混合删失模型中密度函数 K-M 估计的 r -阶相合速度[J]. 山东大学学报(理学版),2014,49(1):105-110.
WU Xinye, WU Qunying. The r -th rate of consistency in kernel density estimation for φ mixed random censored samples[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2014, 49(1):105-110.
- [10] 邓小芹,吴群英. ρ 混合序列完全矩收敛的精确渐近性[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(6):32-40.
DENG Xiaoqin, WU Qunying. Precise asymptotics of complete moment convergence for ρ -mixing sequence[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2020, 55(6):32-40.
- [11] AUE A, HORVÁTH L. A limit theorem for mildly explosive autoregression with stable errors[J]. Econometric Theory, 2007, 23(2):201-220.
- [12] MAGDALINOS T, PHILLIPS P C B. Limit theory for cointegrated systems with moderately integrated and moderately explosive regressors[J]. Econometric Theory, 2009, 25(2):482-526.
- [13] WANG Xinghui, WANG Huilong, WANG Hongrui, et al. Asymptotic inference of least absolute deviation estimation for AR(1) processes[J]. Communications in Statistics: Theory and Methods, 2020, 49(4):809-826.
- [14] LUI Y L, XIAO W L, YU J. Mildly explosive autoregression with anti-persistent errors[J]. Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 2021, 83(2):518-539.
- [15] BUCHMANN B, CHAN N H. Asymptotic theory of least squares estimators for nearly unstable processes under strong dependence[J]. The Annals of Statistics, 2007, 35(5):2001-2017.
- [16] CHAN N H, LI D, PENG L. Toward a unified interval estimation of autoregressions[J]. Econometric Theory, 2012, 28(3): 705-717.
- [17] KIM T Y, HWANG S Y. Barely-stationary AR(1) sequences near random walk[J]. Journal of the Korean Statistical Society, 2021, 50:832-843.
- [18] KIM T Y, HWANG S Y, OH H. Explosive AR(1) process with independent but not identically distributed errors[J]. Journal of the Korean Statistical Society, 2020, 49(3):702-721.
- [19] GAO Min, YANG Wenzhi, WU Shipeng, et al. Asymptotic normality of residual density estimator in stationary and explosive autoregressive models[J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2022, 175:107549.
- [20] ZHOU Jing, LIU Jin, WANG Feifei, et al. Autoregressive model with spatial dependence and missing data[J]. Journal of Business & Economic Statistics, 2022, 40(1):28-34.
- [21] PHILLIPS P C B, WU Y R, YU J. Explosive behavior in the 1990s Nasdaq: when did exuberance escalate asset values? [J]. International Economic Review, 2011, 52(1):201-226.
- [22] 李永明,尹长明,韦程东. φ 混合误差下回归函数小波估计的渐近正态性[J]. 应用数学学报,2008,31(6):1046-1055.
LI Yongming, YIN Changming, WEI Chengdong. On the asymptotic normality for φ -mixing dependent errors of wavelet regression function estimator[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2008, 31(6):1046-1055.
- [23] 杨善朝. 混合序列加权求和的强收敛性[J]. 系统科学与数学, 1995, 15(3):254-265.
YANG Shanchao. Almost sure convergence of weighted sums of mixing sequences[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 1995, 15(3):254-265.
- [24] DOUKHAN P, LOUHICHI S. A new weak dependence condition and applications to moment inequalities[J]. Stochastic Processes and their Applications, 1999, 84(2):313-342.