山东大学学报(理学版)2025 年 4 月 第 60 卷 第 4 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.60, No.4, 2025 http:∥lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)04-0084-09 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.323

具有捕食 Allee 效应和密度依赖扩散的捕食-食饵模型的共存解

马田田,李善兵*
(西安电子科技大学数学与统计学院, 陕西 西安 710126)

摘要:研究一类齐次 Dirichlet 边值条件下具有捕食种群 Allee 效应和密度依赖扩散的捕食-食饵模型的共存解。基于共存解的先验估计,利用正锥上的不动点指数理论建立了共存解存在的充分条件。结果表明,密度依赖扩散对共存解的存在性产生显著影响,同时也发现两物种间的功能反应函数对共存解的存在性有本质的影响。

关键词:捕食-食饵模型;Allee 效应;密度依赖扩散;共存解;不动点指数理论
中图分类号:O175 **文献标志码:**A
引用格式:马田田,李善兵.具有捕食 Allee 效应和密度依赖扩散的捕食-食饵模型的共存解[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(4):84-92, 103.

Coexistence solutions of a predator-prey model with Allee effect and density-dependent diffusion in the predator

MA Tiantian, LI Shanbing*
(College of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710126, Shaanxi, China)

Abstract: This paper is concerned with the coexistence solutions of a predator-prey model with Allee effect and density-dependent diffusion in the predator under homogeneous Dirichlet boundary conditions. Based on a priori estimate of coexistence solutions, the sufficient conditions for the existence of coexistence solutions are established by using the theory of fixed point index in positive cone. The results show that the density-dependent diffusion has a significant effect on the existence of coexistence solutions, and it is also find that the functional response function between the two species has an essential effect on the existence of coexistence solutions.

Key words: predator-prey model; Allee effect; density-dependent diffusion; coexistence solutions; the theory of fixed point index

0 引言

自 Lotka-Volterra(LV)的开创性工作以来,捕食-食饵模型始终是生物数学中的一个活跃主题。近年来,为了更真实地解释复杂的生物过程,人们在 LV 模型的基础上发展了许多模型,其中 LV 模型的一个关键演变是 Allee 效应的引入,该效应描述了在种群密度较低的情况下,种群增长率显著下降的生态现象[1-2]。以往的研究大多关注食饵种群的 Allee 效应,研究结果表明 Allee 效应能够明显改变捕食-食饵模型的动力学行为[3-4]。事实上,由于精子限制、合作繁殖、难以找到配偶等生殖促进机制,捕食者也可能会表现出 Allee 效应,捕食者对食饵的转化率在低密度时会大大降低,但随着捕食者种群密度的增加会显著增加[5-8]。

收稿日期:2023-07-22; **网络出版时间:**2024-05-29 16:22:29
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11901446); 中国博士后特别资助项目(2021T140530)
第一作者:马田田(2001—),女,硕士研究生,研究方向为反应扩散方程及其应用. E-mail:tiantianMA2580@163.com
* **通信作者:**李善兵(1988—),男,副教授,博士,研究方向为反应扩散方程及其应用. E-mail:lishanbing@xidian.edu.cn

上述研究成果都是在齐次 Neumann 边值条件下得到的,而对于齐次 Dirichlet 边值条件下模型的研究成果较少,因此,本文将基于物种的密度依赖扩散和捕食种群的 Allee 效应,考虑如下一类捕食-食饵模型:

$$\begin{cases}\partial_t u=\Delta(d(v)u)+\lambda u-u^2+\gamma uF(v)\dfrac{u}{\alpha+u}, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \partial_t v=D\Delta v+\mu v-v^2-uF(v), & x\in\Omega,\ t>0,\\ u=v=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0,\ v(x,0)=v_0(x)\geqslant 0, & x\in\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

式中,Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中带有光滑边界的有界域,$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$是 Laplace 算子,未知函数 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 分别表示捕食者和食饵在位置 $x\in\Omega$,时间 $t>0$ 时的种群密度,$d(v)$、D 分别表示捕食者生长速率、食饵的扩散系数,此外,一般而言,捕食者在遇到猎物时会减少扩散,所以假设 $d(v)\in C^2([0,\infty))$是关于 v 的递减函数,并且对于所有的$v\in[0,\infty)$, $d(v)>0$ 且 $d'(v)<0$, $\dfrac{u}{\alpha+u}$表示作用于捕食者的 Allee 效应,$\alpha>0$ 是 Allee 效应系数,λ、μ 分别表示捕食者生长速率、食饵的生长速率,γ 表示捕食者对食饵的转化率,$F(v)$是功能反应函数,$F(v)\in C^2([0,\infty))$,对于所有的 $v\in(0,\infty)$, $F(0)=0$ 且 $F(v)>0$。这里 D、μ、γ 都是正常数,$\lambda\in\mathbf{R}$ 是一个常数,齐次 Dirichlet 边界条件意味着栖息地的外部环境是敌对的,所有个体在到达栖息地边界时死亡。

本文主要研究方程(1)的稳态解,建立两物种共存的充分条件,其中稳态解满足如下拟线性椭圆方程:

$$\begin{cases}\Delta(d(v)u)+\lambda u-u^2+\gamma uF(v)\dfrac{u}{\alpha+u}=0, & x\in\Omega,\\ D\Delta v+\mu v-v^2-uF(v)=0, & x\in\Omega,\\ u=v=0, & x\in\partial\Omega。\end{cases}\tag{2}$$

1　预备知识

本章主要介绍一些记号和经典结果,对于任意的 $\phi,\psi\in C(\overline{\Omega})$,线性椭圆特征值问题

$$-\tau\Delta\omega+\phi(x)\omega=\sigma\psi(x)\omega,\quad x\in\Omega,\quad \omega=0,\quad x\in\partial\Omega$$

有至多可数个特征值,且有下界:$\sigma_1(\tau,\phi,\psi)<\sigma_2(\tau,\phi,\psi)\leqslant\sigma_3(\tau,\phi,\psi)\leqslant\cdots$,当 $i\to\infty$ 时,$\sigma_i(\tau,\phi,\psi)\to\infty$,其中 $\sigma_1(\tau,\phi,\psi)$是一个简单特征值,也称为主特征值,其对应的特征函数在 Ω 中不变号,且满足如下变分形式

$$\sigma_1(\tau,\phi,\psi)=\inf_{\omega\in H}\left\{\frac{\tau\int_\Omega|\nabla\omega|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\phi(x)\omega^2\mathrm{d}x}{\int_\Omega\psi(x)\omega^2\mathrm{d}x}\right\},$$

其中,$H=\left\{\omega:\omega\in H_0^1(\Omega),\int_\Omega\psi(x)\omega^2\mathrm{d}x\neq 0\right\}$。从上述变分形式不难发现,$\sigma_1(\tau,\phi,\psi)$关于势函数 ϕ 是单增的,即,若 $\phi_1(x)\leqslant\phi_2(x)$且 $\phi_1(x)\not\equiv\phi_2(x)$,其中 $\phi_1,\phi_2\in C(\overline{\Omega})$, $x\in\Omega$,则 $\sigma_1(\tau,\phi_1,\psi)<\sigma_1(\tau,\phi_2,\psi)$。特别地,如果 $\psi(x)\equiv 1$,把 $\sigma_i(\tau,\phi,\psi)$记作 $\sigma_i(\tau,\phi)$。关于 $\sigma_1(\tau,\phi,\psi)$的更多性质可参见文献[9-10]。

考虑如下半线性椭圆方程:

$$-\tau\Delta\omega=m(x)\omega-n(x)h(x,\omega)\omega,\quad x\in\Omega,\quad \omega=0,\quad x\in\partial\Omega。\tag{3}$$

由文献[9]中的定理 3.5 和定理 3.7 可知如下引理成立。

引理 1　若以下假设成立,则当且仅当 $\sigma_1(\tau,-m(x))<0$ 时,方程(3)有唯一正解,且是全局渐近稳定的:

(a) $n,m\in C^k(\overline{\Omega})$, $n(x)>0$, $k\in(0,1)$;

(b) $h(x,\omega):\overline{\Omega}\times[0,\infty)\to\mathbf{R}$,函数 $h\in C^{k,1+k}(\overline{\Omega})$, $h(x,0)\equiv 0$ 且 $h(x,\omega)>0$;

(c) 对于任意的 $x\in\Omega$, $h(x,\omega)$关于 $\omega>0$ 单调递增,并且 $\lim\limits_{\omega\to\infty}h(x,\omega)=\infty$。

当 $v=0$ 时,u 满足

$$-d(0)\Delta u=\lambda u-u^2,\quad x\in\Omega,\quad u=0,\quad x\in\partial\Omega。\tag{4}$$

由引理1易知,当且仅当 $\sigma_1(d(0),-\lambda)<0$,即当 $d(0)\sigma_1(1,0)<\lambda$ 时,方程(4)存在全局渐近稳定的唯一正解,记为 $\theta_{d(0),\lambda}$,且 $\theta_{d(0),\lambda}<\lambda$。因此,当 $\sigma_1(d(0),-\lambda)<0$ 时,方程(2)有半平凡解 $(\theta_{d(0),\lambda},0)$。类似地,当 $\sigma_1(D,-\mu)<0$ 时,方程(2)有半平凡解 $(0,\theta_{D,\mu})$。

接下来,介绍正锥上的不动点指数理论,更多内容详见文献[11]。

令 $C_0(\bar{\Omega})=\{\phi\in C(\bar{\Omega})\mid\phi(x)=0,\ x\in\partial\Omega\}$, $K(\bar{\Omega})=\{\phi\in C_0(\bar{\Omega})\mid\phi(x)\geqslant0,\ x\in\Omega\}$, $E=C_0(\bar{\Omega})\oplus C_0(\bar{\Omega})$, $W=K(\bar{\Omega})\oplus K(\bar{\Omega})$。对于任意的 $\phi=(\phi_1,\phi_2)\in W$, $l>0$,定义 $W_\phi=\{\varphi\in E:\phi+l\varphi\in W\}$,由文献[12]中引理3,可以得到 $\overline{W}_{(0,0)}=W$, $\overline{W}_{(\phi_1,0)}=C_0(\bar{\Omega})\oplus K(\bar{\Omega})$, $\phi_1>0$, $\overline{W}_{(0,\phi_2)}=K(\bar{\Omega})\oplus C_0(\bar{\Omega})$, $\phi_2>0$, $\overline{W}_{(\phi_1,\phi_2)}=E$, $\phi_1>0$, $\phi_2>0$。记 $S_\phi=\overline{W}_\phi\cap(-\overline{W}_\phi)$,显然可以得到 $S_{(0,0)}=\{(0,0)\}$, $S_{(\phi_1,0)}=C_0(\bar{\Omega})\oplus\{0\}$, $\phi_1>0$, $S_{(0,\phi_2)}=\{0\}\oplus C_0(\bar{\Omega})$, $\phi_2>0$, $S_{(\phi_1,\phi_2)}=E$, $\phi_1>0$, $\phi_2>0$。

记 $r(T)$ 为算子 T 的谱半径,由文献[13]中的引理2.3和引理2.4可知如下引理成立。

引理2 假设 $\phi\in C(\Omega)$,M 是一个正常数,使得 $M>\tau^{-1}\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\phi(x)$,其中 $(-\Delta+M)^{-1}$ 是 Ω 上满足齐次Dirichlet边界条件的 $-\Delta+M$ 的逆算子,则

(a) 若 $\sigma_1(\tau,-\phi)<0$,则 $r[(-\Delta+M)^{-1}(\tau^{-1}\phi+M)]>1$;

(b) 若 $\sigma_1(\tau,-\phi)>0$,则 $r[(-\Delta+M)^{-1}(\tau^{-1}\phi+M)]<1$;

(c) 若 $\sigma_1(\tau,-\phi)=0$,则 $r[(-\Delta+M)^{-1}(\tau^{-1}\phi+M)]=1$。

假定 $T:E\to E$ 是一个紧线性算子,满足 $T(\overline{W}_\phi)\subseteq\overline{W}_\phi$,则对任意的 $\psi\in S_\phi=\overline{W}_\phi\cap(-\overline{W}_\phi)$,显然 $T(\psi)\in\overline{W}_\phi$, $-T(\psi)\in\overline{W}_\phi$,所以 $T(\psi)\in S_\phi$,这表明 T 将 S_ϕ 映射到自身,$T:S_\phi\to S_\phi$,因此,T 诱导一个紧线性映射 $\widetilde{T}:\widetilde{S_\phi}\to\widetilde{S_\phi}$,其中 $\widetilde{S_\phi}$ 表示商空间 $E\backslash S_\phi$,令 $\widetilde{W}_\phi$ 为 $\overline{W}_\phi$ 在商映射 $E\to E\backslash S_\phi$ 下的像空间,$\widetilde{W}_\phi\subseteq E\backslash\widetilde{S}_\phi$,则 $\widetilde{T}(\widetilde{W}_\phi)\subseteq\widetilde{W}_\phi$。

假设 $T:W\to W$ 是紧的Fréchet可微算子,$DT(\phi)$ 表示 T 在 $\phi\in W$ 处的Fréchet导数,设 $\psi\in W$ 是 T 的一个不动点,$DT(\psi)$ 是一个紧线性算子,由文献[14]中的引理1可知,$DT(\psi):\overline{W}_\psi\to\overline{W}_\psi$,并且以下指标公式成立(见文献[15])。

引理3 设 I 是恒等映射,假设对于任意的 $\phi\in\overline{W}_\psi\backslash\{0\}$, $(I-DT(\psi))\phi\neq0$,则

(a) 若 $r(\widetilde{DT}(\psi))>1$,则 $\mathrm{index}_W(T,\psi)=0$;

(b) 若 $r(DT(\psi))<1$,则 $\mathrm{index}_W(T,\psi)=1$。

2 共存解的存在性

本章主要利用正锥上的不动点指数理论,计算不动点指标,建立方程(2)正解存在的充分条件。对于方程(2),引入一个未知函数 $U=d(v)u$,则方程(2)化为

$$\begin{cases}-\Delta U=\dfrac{U}{d(v)}\left(\lambda-\dfrac{U}{d(v)}+\gamma F(v)\dfrac{U/d(v)}{\alpha+U/d(v)}\right), & x\in\Omega,\\ -D\Delta v=\mu v-v^2-\dfrac{U}{d(v)}F(v), & x\in\Omega,\\ U=v=0, & x\in\partial\Omega。\end{cases}\tag{5}$$

对于方程(5),首先给出正解的先验估计。

引理4 设 (U,v) 是方程(5)的任意正解,则对于所有的 $x\in\Omega$,有下式成立:

$$0<U(x)<d(0)(\lambda+\gamma\max_{v\in[0,\mu]}F(v)),\quad 0<v(x)\leqslant\mu。$$

证明 设 x_0 是 $v(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值点,即 $v(x_0)=\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}v(x)$,由于在 $\partial\Omega$ 上,$v(x)=0$,显然 $x_0\in\Omega$, $\Delta v(x_0)\leqslant0$,由方程(5)的第2个方程可知

$$0\leqslant-D\Delta v(x_0)\leqslant\mu v(x_0)-v^2(x_0)。$$

由于 $v(x_0)>0$,故 $\mu\geqslant v(x_0)$,即对于所有的 $x\in\Omega$, $\mu\geqslant v(x)>0$。

类似地,设 x_1 是 $U(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值点,由方程(5)的第一个方程知

$$0\leqslant -\Delta U(x_1)=u(x_1)\left(\lambda-u(x_1)+\gamma F(v(x_1))\frac{u(x_1)}{\alpha+u(x_1)}\right)。$$

因为 $U(x_1)=d(v(x_1))u(x_1)>0$,所以 $u(x_1)>0$,故 $\lambda-u(x_1)+\gamma F(v(x_1))\dfrac{u(x_1)}{\alpha+u(x_1)}\geqslant 0$,即

$$u(x_1)\leqslant\lambda+\gamma F(v(x_1))\frac{u(x_1)}{\alpha+u(x_1)}<\lambda+\gamma F(v(x_1))\leqslant\lambda+\gamma\max_{v\in[0,\mu]}F(v)。$$

所以 $U(x)\leqslant U(x_1)=d(v(x_1))u(x_1)<d(0)(\lambda+\gamma\max\limits_{v\in[0,\mu]}F(v))$,证毕。

由于$(u,v)\geqslant 0$ 与$(U,v)\geqslant 0$ 之间存在一一对应关系,因此,可以研究方程(5),先讨论方程(5)半平凡解的存在性。

对于方程(5),当 $v=0$ 时,U 满足

$$-\Delta U=\frac{U}{d(0)}\left(\lambda-\frac{U}{d(0)}\right),\quad x\in\Omega,\quad U=0,\quad x\in\partial\Omega。\tag{6}$$

由引理 1 知,当且仅当 $\sigma_1(d(0),-\lambda)<0$ 时,方程(6)存在唯一正解,且是全局渐近稳定的,记为 $d(0)\theta_{d(0),\lambda}$,因此方程(5)存在一个半平凡解$(U,v)=(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0)$。

对于方程(5),当 $U=0$ 时,v 满足

$$-D\Delta v=\mu v-v^2,\quad x\in\Omega,\quad v=0,\quad x\in\partial\Omega。$$

同理得到,当且仅当 $\sigma_1(D,-\mu)<0$ 时,上述方程有全局渐近稳定的唯一正解,记为 $\theta_{D,\mu}$,因此方程(5)存在另一个半平凡解$(U,v)=(0,\theta_{D,\mu})$。

设(U,v)是方程(5)的一个正解,在方程(5)的第 2 个方程两端分别乘以 v,并在 Ω 上积分可得

$$-\int_\Omega Dv\Delta v\mathrm{d}x=\int_\Omega\left(\mu v^2-v^3-\frac{Uv}{d(v)}F(v)\right)\mathrm{d}x,$$

又因为$-\int_\Omega Dv\Delta v\mathrm{d}x=\int_\Omega D|\nabla v|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega Dv\dfrac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}x=\int_\Omega D|\nabla v|^2\mathrm{d}x$,所以

$$-\int_\Omega Dv\Delta v\mathrm{d}x=\int_\Omega\left(\mu v^2-v^3-\frac{Uv}{d(v)}F(v)\right)\mathrm{d}x=\int_\Omega D|\nabla v|^2\mathrm{d}x<\int_\Omega\mu v^2\mathrm{d}x。$$

由先验估计(见引理 4)可知 $0<v(x)\leqslant\mu$,因此

$$-\int_\Omega Dv\Delta v\mathrm{d}x=\int_\Omega D|\nabla v|^2\mathrm{d}x<\int_\Omega\mu v^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega\mu^3\mathrm{d}x<\infty,$$

利用庞加莱不等式,得到

$$D\sigma_1(1,0)\int_\Omega v^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega D|\nabla v|^2\mathrm{d}x<\int_\Omega\mu v^2\mathrm{d}x,$$

即 $D\sigma_1(1,0)-\mu=\sigma_1(D,-\mu)<0$。综上易知,假设$(U,v)$是方程(5)的正解,则有 $\sigma_1(D,-\mu)<0$。换言之,当 $\sigma_1(D,-\mu)\geqslant 0$ 时,方程(5)无正解,所以接下来只研究 $\sigma_1(D,-\mu)<0$ 的情况。

定义 $O=\{(U,v)\in W:U(x)\leqslant d(0)(\lambda+\gamma\max\limits_{v\in[0,\mu]}F(v)),\ v(x)\leqslant\mu+1,\ x\in\Omega\}$。由引理 4 知,方程(5)的所有非负解都位于 O(相对于 W)的内部,不妨记为 $\mathrm{int}\,O$。通过选择一个足够大的常数 $M>0$,那么对于任意的$(U,v)\in O$,有

$$\frac{U}{d(v)}\left(\lambda-\frac{U}{d(v)}+\gamma F(v)\frac{U/d(v)}{\alpha+U/d(v)}\right)+MU>0,\quad\mu v-v^2-\frac{U}{d(v)}F(v)+Mv>0。$$

定义 Fréchet 可微算子 $T_s:O\to E$,

$$T_s\begin{pmatrix}U\\v\end{pmatrix}=(-\Delta+M)^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{sU}{d(v)}\left(\lambda-\dfrac{U}{d(v)}+\gamma F(v)\dfrac{U/d(v)}{\alpha+U/d(v)}\right)+MU\\\dfrac{s}{D}\left(\mu v-v^2-\dfrac{U}{d(v)}F(v)\right)+Mv\end{pmatrix}。$$

易知当且仅当(U,v)是 T_1 在 W 中的不动点时,(U,v)是方程(5)的非负解。此外,由椭圆算子的正则性[16]可知,T_s 在 E 中是一个紧算子。为了建立方程(5)正解的存在性,首先建立如下几个引理。

引理 5 $\deg_W(I-T_1,\operatorname{int}O)=1$。

证明 设(U_s,v_s)是 T_s 的一个不动点,即(U_s,v_s)满足

$$\begin{cases}-\Delta U_s=\dfrac{sU_s}{d(v_s)}\left(\lambda-\dfrac{U_s}{d(v_s)}+\gamma F(v_s)\dfrac{U_s/d(v_s)}{\alpha+U_s/d(v_s)}\right), & x\in\Omega,\\ -D\Delta v_s=s\left(\mu v_s-v_s^2-\dfrac{U_s}{d(v_s)}F(v_s)\right), & x\in\Omega,\\ U_s=v_s=0, & x\in\partial\Omega。\end{cases}\tag{7}$$

类似引理 4 的证明,有 $0\leqslant U_s(x)<d(0)(\lambda+\gamma\max\limits_{v_s\in[0,\mu]}F(v_s))$, $0\leqslant v_s(x)\leqslant\mu$。显然 T_s 在$\partial\Omega$上无不动点,其中 $s\in(0,\infty)$,因此根据度的同伦不变性,$\deg_W(I-T_s,\operatorname{int}O)$与 s 无关,即 $\deg_W(I-T_s,\operatorname{int}O)=\deg_W(I-T_1,\operatorname{int}O)$。这里的 $\deg_W(I-T_s,\operatorname{int}O)$表示算子 $I-T_s$ 在 W 上的度,度是指 T_s 在 $\operatorname{int}O$ 上所有不动点的指标之和。

由方程(7)中关于 v 的方程知$-D\Delta v_s\leqslant s\mu v_s-sv_s^2$。令$\hat{v}_s$ 是如下方程的解:

$$-D\Delta\hat{v}_s=s\mu\hat{v}_s-s\hat{v}_s^2,\quad x\in\Omega,\quad \hat{v}_s=0,\quad x\in\partial\Omega。$$

由引理 1 知,当且仅当 $\sigma_1(D,-s\mu)<0$ 时,上述方程具有全局渐近稳定的唯一正解,所以当 $\sigma_1(D,-s\mu)\geqslant0$ 时,只有零解是全局渐近稳定的。故,当 $\sigma_1(D,-s\mu)>0\Leftrightarrow s<\dfrac{D}{\mu}\sigma_1(1,0)$时,$\hat{v}_s=0$ 是唯一非负解,也即,当 $s<\dfrac{D}{\mu}\sigma_1(1,0)$时,$0\leqslant v_s\leqslant\hat{v}_s\equiv0$,所以 $v_s=0$。将 $v_s=0$ 代入方程(7)中关于 U 的方程,得到

$$-\Delta U_s=\frac{sU_s}{d(0)}\left(\lambda-\frac{U_s}{d(0)}\right),\quad x\in\Omega,\quad U_s=0,\quad x\in\partial\Omega。$$

同理,当 $\sigma_1\left(1,-\dfrac{s\lambda}{d(0)}\right)>0\Leftrightarrow s<\dfrac{d(0)}{\lambda}\sigma_1(1,0)$时,$U_s=0$ 是上述方程的唯一非负解,且是全局渐近稳定的。于是,当 $s\in\left(0,\min\left\{\dfrac{D}{\mu}\sigma_1(1,0),\ \dfrac{d(0)}{\lambda}\sigma_1(1,0)\right\}\right)$时,$(0,0)$是 T_s 在 W 上的唯一不动点,所以 $\deg_W(I-T_s,\operatorname{int}O)=\operatorname{index}_W(T_s,(0,0))$。

计算$\operatorname{index}_W(T_s,(0,0))$。对于任意的 $s\in\left(0,\min\left\{\dfrac{D}{\mu}\sigma_1(1,0),\ \dfrac{d(0)}{\lambda}\sigma_1(1,0)\right\}\right)$,$T_s$ 在$(0,0)$处的 Fréchet 导数为

$$DT_s(0,0)=(-\Delta+M)^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{s\lambda}{d(0)}+M & 0\\ 0 & \dfrac{s\mu}{D}+M\end{pmatrix}。$$

对于任意的$(h,k)^{\mathrm{T}}\in\overline{W}_{(0,0)}\setminus\{0,0\}$,有$(I-DT_s(0,0))(h,k)^{\mathrm{T}}\neq0$。假设不然,则存在$(h,k)^{\mathrm{T}}\in\overline{W}_{(0,0)}\setminus\{0,0\}$,使得$(I-DT_s(0,0))(h,k)^{\mathrm{T}}=0$,即

$$(I-DT_s(0,0))\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h-(-\Delta+M)^{-1}\left(\dfrac{s\lambda h}{d(0)}+Mh\right)\\ k-(-\Delta+M)^{-1}\left(\dfrac{s\mu k}{D}+Mk\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}。$$

整理得

$$\begin{cases}-d(0)\Delta h-s\lambda h=0, & x\in\Omega,\\ -D\Delta k-s\mu k=0, & x\in\Omega,\\ k=h=0, & x\in\partial\Omega。\end{cases}$$

因为$(h,k)^{\mathrm{T}}\in\overline{W}_{(0,0)}\setminus\{0,0\}$,将$-d(0)\Delta h-s\lambda h=0$ 和$-D\Delta k-s\mu k=0$ 视作特征值问题,一定有 $\sigma_1(d(0),-s\lambda)=0$

和 $\sigma_1(D,-s\mu)=0$。然而,当 $s\in\left(0,\min\left\{\dfrac{D}{\mu}\sigma_1(1,0),\ \dfrac{d(0)}{\lambda}\sigma_1(1,0)\right\}\right)$时,可知 $\sigma_1(d(0),-s\lambda)>0$ 且 $\sigma_1(D,-s\mu)>0$,矛盾。

由于$\widetilde{DT}(\psi):\widetilde{W}_\psi\to\widetilde{W}_\psi$, $S_{(0,0)}=\overline{W}_{(0,0)}\cap(-\overline{W}_{(0,0)})=\{(0,0)\}$,因此可选取$\widetilde{DT_s}(0,0)=DT_s(0,0)$。由引理 2 知,当 $\sigma_1(d(0),-s\lambda)>0$时,有 $r\left[(-\Delta+M)^{-1}\left(\dfrac{s\lambda}{d(0)}+M\right)\right]<1$;同理,当 $\sigma_1(D,-s\mu)>0$ 时,有 $r\left[(-\Delta+M)^{-1}\left(\dfrac{s\mu}{D}+M\right)\right]<1$。又

$$DT_s(0,0)=(-\Delta+M)^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{s\lambda}{d(0)}+M & 0\\ 0 & \dfrac{s\mu}{D}+M\end{pmatrix},$$

由于上、下三角阵算子的谱半径等于对角线算子谱半径的最大值,因此 $r(DT_s(0,0))<1$。根据引理 3,有 $\mathrm{index}_W(T_s,(0,0))=1$。

综上所述,对于任意的 $s\in\left(0,\min\left\{\dfrac{D}{\mu}\sigma_1(1,0),\ \dfrac{d(0)}{\lambda}\sigma_1(1,0)\right\}\right)$,有

$$\deg_W(I-T_s,\mathrm{int}\,O)=\deg_W(I-T_1,\mathrm{int}\,O)=\mathrm{index}_W(T_s,(0,0))=1,$$

证毕。

引理 6　假定 $\sigma_1(D,-\mu)<0$,若 $\sigma_1(d(0),-\lambda)\neq0$,则 $\mathrm{index}_W(T_1,(0,0))=0$。

证明　由引理 5 的证明知,对于任意的 $(h,k)^{\mathrm{T}}\in\overline{W}_{(0,0)}\setminus\{0,0\}$,如果 $\sigma_1(d(0),-\lambda)\neq0$ 且 $\sigma_1(D,-\mu)\neq0$,都有 $(I-DT_s(0,0))(h,k)^{\mathrm{T}}\neq0$ 成立。由于 $\sigma_1(D,-\mu)<0$,结合引理 2 可知 $r\left[(-\Delta+M)^{-1}\left(\dfrac{\mu}{D}+M\right)\right]>1$,因此 $r(\widetilde{DT_1}(0,0))=r(DT_1(0,0))>1$。根据引理 3,有 $\mathrm{index}_W(T_1,(0,0))=0$,证毕。

引理 7　假定 $\sigma_1(D,-\mu)<0$, $\sigma_1(d(0),-\lambda)<0$,

(a) 若 $\sigma_1(D,\theta_{d(0),\lambda}F'(0)-\mu)<0$,则 $\mathrm{index}_W(T_1,(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0))=0$;

(b) 若 $\sigma_1(D,\theta_{d(0),\lambda}F'(0)-\mu)>0$,则 $\mathrm{index}_W(T_1,(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0))=1$。

证明　T_1 在 $(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0)$ 处的 Fréchet 导数为

$$\begin{aligned}&DT_1(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0)\\&=(-\Delta+M)^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda-2\theta_{d(0),\lambda}}{d(0)}+M & \theta_{d(0),\lambda}\left(-\dfrac{\lambda d'(0)}{d(0)}+\dfrac{2\theta_{d(0),\lambda}d'(0)}{d(0)}+\gamma\theta_{d(0),\lambda}\dfrac{F'(0)}{(\alpha+\theta_{d(0),\lambda})}\right)\\ 0 & \dfrac{1}{D}(\mu-\theta_{d(0),\lambda}F'(0))+M\end{pmatrix}。\end{aligned}$$

令 $L_1=(-\Delta+M)^{-1}\left(\dfrac{\lambda-2\theta_{d(0),\lambda}}{d(0)}+M\right)$, $L_2=(-\Delta+M)^{-1}\left[\dfrac{1}{D}(\mu-\theta_{d(0),\lambda}F'(0))+M\right]$,用 L_2 定义$\widetilde{DT_1}(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0)$。

易知,当 $\sigma_1(D,\theta_{d(0),\lambda}F'(0)-\mu)\neq0$ 时,对于任意的

$$(h,k)^{\mathrm{T}}\in\overline{W}_{(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0)}\setminus\{0,0\},\quad (I-DT_1(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0))(h,k)^{\mathrm{T}}\neq0。$$

假设不然,则存在 $(h,k)^{\mathrm{T}}\in\overline{W}_{(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0)}\setminus\{0,0\}$,使得 $(I-DT_1(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0))(h,k)^{\mathrm{T}}=0$,因此有方程

$$\begin{cases}(-\Delta+M)^{-1}\left[\theta_{d(0),\lambda}\left(\dfrac{-\lambda d'(0)+2\theta_{d(0),\lambda}d'(0)}{d(0)}+\dfrac{\gamma\theta_{d(0),\lambda}F'(0)}{\alpha+\theta_{d(0),\lambda}}\right)k\right]\\ \qquad+(-\Delta+M)^{-1}\left[\left(\dfrac{\lambda-2\theta_{d(0),\lambda}}{d(0)}+M\right)h\right]=h, & x\in\Omega,\\ (-\Delta+M)^{-1}\left[\dfrac{1}{D}(\mu-\theta_{d(0),\lambda}F'(0))+M\right]k=k, & x\in\Omega,\\ h=k=0, & x\in\partial\Omega。\end{cases}\tag{8}$$

若对任意的 $x\in\Omega$, $k\equiv0$,由方程(8)的第一个方程有 $(-\Delta+M)^{-1}\left(\dfrac{\lambda-2\theta_{d(0),\lambda}}{d(0)}+M\right)h=h$,即 $L_1h=h$,因此 1 为算

子 L_1 的一个特征值,故 $r(L_1)\geqslant 1$。另一方面,由于 $\theta_{d(0),\lambda}$ 为方程(4)的唯一正解,且 $\sigma_1(d(0),\theta_{d(0),\lambda}-\lambda)=0$,显然有 $\sigma_1(d(0),2\theta_{d(0),\lambda}-\lambda)>\sigma_1(d(0),\theta_{d(0),\lambda}-\lambda)=0$。运用引理 2,有 $r(L_1)<1$,矛盾,故 $k\not\equiv 0$。若对任意的 $x\in\Omega$, $k\geqslant(\not\equiv)0$,由方程(8)的第二个方程易知,$L_2k=k$,根据 Krein-Rutman 定理可有 $r(L_2)=1$,而 $\sigma_1(D,\theta_{d(0),\lambda}F'(0)-\mu)\neq 0$,由引理 2 知 $r(L_2)\neq 1$,矛盾。

接下来计算 $\mathrm{index}_W(T_1,(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0))$。若 $\sigma_1(D,\theta_{d(0),\lambda}F'(0)-\mu)<0$,由引理 2 知,$r(\widetilde{DT_1}(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0))>1$,再由引理 3 知,$\mathrm{index}_W(T_1,(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0))=0$。若 $\sigma_1(D,\theta_{d(0),\lambda}F'(0)-\mu)>0$,由引理 2 知,$r(L_2)<1$,即 $r(\widetilde{DT_1}(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0))<1$。下面进一步计算 $r(DT_1(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0))$。设 $(h,k)^{\mathrm{T}}\in E$ 为 $DT_1(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0)$ 的一个特征函数,σ 为对应的特征值,则 $(h,k)^{\mathrm{T}}$ 满足 $DT_1(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0)(h,k)^{\mathrm{T}}=\sigma(h,k)^{\mathrm{T}}$,即

$$\begin{cases}(-\Delta+M)^{-1}\left[\theta_{d(0),\lambda}\left(\dfrac{-\lambda d'(0)+2\theta_{d(0),\lambda}d'(0)}{d(0)}+\dfrac{\gamma\theta_{d(0),\lambda}F'(0)}{\alpha+\theta_{d(0),\lambda}}\right)k\right] & \\ \qquad +(-\Delta+M)^{-1}\left[\left(\dfrac{\lambda-2\theta_{d(0),\lambda}}{d(0)}+M\right)h\right]=\sigma h, & x\in\Omega, \\ (-\Delta+M)^{-1}\left[\dfrac{1}{D}(\mu-\theta_{d(0),\lambda}F'(0))+M\right]k=\sigma k, & x\in\Omega, \\ h=k=0, & x\in\partial\Omega。\end{cases}$$

若对任意的 $x\in\Omega$, $k\not\equiv 0$,则 σ 为 L_2 的特征值,由于 $r(L_2)<1$,因此 $|\sigma|<1$。若对任意的 $x\in\Omega$, $k\equiv 0$,则 σ 为 L_1 的特征值,由于 $\sigma_1(d(0),2\theta_{d(0),\lambda}-\lambda)>0$,根据引理 2,有 $r(L_1)<1$,即 $|\sigma|<1$,因此 $DT_1(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0)$ 所有的特征值 σ 满足 $|\sigma|<1$。综上可知,$r(DT_1(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0))<1$,故 $\mathrm{index}_W(T_1,(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0))=1$,证毕。

引理 8　假定 $\sigma_1(D,-\mu)<0$,则

(a) 若 $\sigma_1\left(1,-\dfrac{\lambda}{d(\theta_{D,\mu})}\right)<0$,则 $\mathrm{index}_W(T_1,(0,\theta_{D,\mu}))=0$;

(b) 若 $\sigma_1\left(1,-\dfrac{\lambda}{d(\theta_{D,\mu})}\right)>0$,则 $\mathrm{index}_W(T_1,(0,\theta_{D,\mu}))=1$。

引理 8 的证明过程同引理 7 的证明过程,略。

根据引理 5—8,利用不动点指数的可加性,可以建立方程(5)正解存在的充分条件。

定理 1　假定 $\sigma_1(D,-\mu)<0$,下述结论成立:

(a) 当 $\sigma_1(d(0),-\lambda)<0$ 时,若 $\sigma_1(D,\theta_{d(0),\lambda}F'(0)-\mu)<0$,则方程(5)至少存在一个正解;

(b) 当 $\sigma_1(d(0),-\lambda)>0$ 时,若 $\sigma_1\left(1,-\dfrac{\lambda}{d(\theta_{D,\mu})}\right)<0$,则方程(5)至少存在一个正解;

(c) 当 $\sigma_1(d(0),-\lambda)=0$ 时,则方程(5)至少存在一个正解。

证明　(a) 假设方程(5)不存在正解。若 $\sigma_1(D,-\mu)<0$ 且 $\sigma_1(d(0),-\lambda)<0$,则方程(5)有平凡解 $(0,0)$,以及两个半平凡解 $(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0)$ 和 $(0,\theta_{D,\mu})$,这也是 T_1 在 W 上的 3 个不动点。由引理 6 知,$\mathrm{index}_W(T_1,(0,0))=0$,根据主特征值的性质知,$\sigma_1\left(1,-\dfrac{\lambda}{d(\theta_{D,\mu})}\right)<\sigma_1\left(1,-\dfrac{\lambda}{d(0)}\right)=\dfrac{\sigma_1(d(0),-\lambda)}{d(0)}<0$。又由引理 8 知,$\mathrm{index}_W(T_1,(0,\theta_{D,\mu}))=0$,此外,当 $\sigma_1(D,\theta_{d(0),\lambda}F'(0)-\mu)<0$ 时,由引理 7 知 $\mathrm{index}_W(T_1,(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0))=0$。利用不动点指数的可加性,有

$$\begin{aligned}1&=\deg_W(I-T_1,\operatorname{int}O)\\&=\mathrm{index}_W(T_1,(0,0))+\mathrm{index}_W(T_1,(d(0)\theta_{d(0),\lambda},0))+\mathrm{index}_W(T_1,(0,\theta_{D,\mu}))\\&=0,\end{aligned}$$

矛盾。因此,若 $\sigma_1(D,\theta_{d(0),\lambda}F'(0)-\mu)<0$,则方程(5)至少存在一个正解。

(b) 假设方程(5)不存在正解。当 $\sigma_1(D,-\mu)<0$ 且 $\sigma_1(d(0),-\lambda)>0$ 时,方程(5)有平凡解 $(0,0)$,以及一个半平凡解 $(0,\theta_{D,\mu})$,由引理 6 知,$\mathrm{index}_W(T_1,(0,0))=0$,由引理 8 知,$\mathrm{index}_W(T_1,(0,\theta_{D,\mu}))=0$。利用不动点指数的可加性,有

$$1=\deg_W(I-T_1,\operatorname{int}O)=\mathrm{index}_W(T_1,(0,0))+\mathrm{index}_W(T_1,(0,\theta_{D,\mu}))=0。$$

矛盾，因此当 $\sigma_1\left(1,-\dfrac{\lambda}{d(\theta_{D,\mu})}\right)<0$ 时，方程(5)至少存在一个正解。

(c) 当 $\sigma_1(D,-\mu)<0$ 且 $\sigma_1(d(0),-\lambda)=0$ 时，选择一个序列 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$，且 $\lim\limits_{i\to\infty}\lambda_i=\lambda_\infty$，使得 $\sigma_1(d(0),-\lambda_i)\neq0$，$\sigma_1(d(0),-\lambda_\infty)=0$。根据已证明的结果，假定 (U_i,v_i) 是方程(5)在 $\lambda=\lambda_i$ 时的一个正解，则 (U_i,v_i) 满足

$$\begin{cases}-\Delta U_i=\dfrac{U_i}{d(v_i)}\left(\lambda_i-\dfrac{U_i}{d(v_i)}+\gamma F(v_i)\dfrac{U_i/d(v_i)}{\alpha+U_i/d(v_i)}\right), & x\in\Omega,\\ -D\Delta v_i=\mu v_i-v_i^2-\dfrac{U_i}{d(v_i)}F(v_i), & x\in\Omega,\\ U_i=v_i=0, & x\in\partial\Omega。\end{cases}\tag{9}$$

由引理 4 知，对于任意的 $x\in\Omega$，$0\leqslant U_i(x)<d(0)(\lambda_i+\gamma\max\limits_{v_i\in[0,\mu]}F(v_i))$，$0\leqslant v_i(x)\leqslant\mu$，即 $\{U_i(x)\}$ 和 $\{v_i(x)\}$ 是一致有界的，由椭圆算子的正则性理论[16]知 $\{U_i(x)\}$ 和 $\{v_i(x)\}$ 在 $W^{2,p}(\Omega)$ 上是一致有界的。再由 Sobolev 嵌入定理知，当 $p>n$ 时，$W^{2,p}(\Omega)$ 中的有界集是 $C^1(\bar{\Omega})$ 中的列紧集，因此 $\{U_i(x)\}$ 和 $\{v_i(x)\}$ 在 $C^1(\bar{\Omega})$ 中存在收敛的子列，不妨仍记为 $\{U_i(x)\}$ 和 $\{v_i(x)\}$，假设在 $C^1(\bar{\Omega})$ 上，$\lim\limits_{i\to\infty}(U_i,v_i)=(U_\infty,v_\infty)$，则 (U_∞,v_∞) 满足

$$\begin{cases}-\Delta U_\infty=\dfrac{U_\infty}{d(v_\infty)}\left(\lambda_\infty-\dfrac{U_\infty}{d(v_\infty)}+\gamma F(v_\infty)\dfrac{U_\infty/d(v_\infty)}{\alpha+U_\infty/d(v_\infty)}\right), & x\in\Omega,\\ -D\Delta v_\infty=\mu v_\infty-v_\infty^2-\dfrac{U_\infty}{d(v_\infty)}F(v_\infty), & x\in\Omega,\\ U_\infty=v_\infty=0, & x\in\partial\Omega。\end{cases}$$

所以 (U_∞,v_∞) 是方程(5)在 $\lambda=\lambda_\infty$ 时的一个非负解，其中 $\sigma_1(d(0),-\lambda_\infty)=0$。

下面证明 (U_∞,v_∞) 是方程(5)在 $\lambda=\lambda_\infty$ 时的一个正解。根据 Harnack 不等式可知，$U_\infty\equiv0$ 或 $U_\infty>0$，$v_\infty\equiv0$ 或 $v_\infty>0$。

$v_\infty>0$。反证法，假设 $v_\infty\equiv0$，取 $\hat{v}_i=\dfrac{v_i}{\|v_i\|_\infty}$，通过引言中对 $F(v)$ 的假设条件易知，$F'(0)\geqslant0$ 且 $F(v)=vf(v)$，其中 $f\in C^1([0,\infty))$，对于任意的 $v\in[0,\infty)$，$f(v)>0$，则 $\hat{v}_i$ 满足

$$-D\Delta\hat{v}_i=\hat{v}_i\left(\mu-v_i-\frac{U_i}{d(v_i)}f(v_i)\right),\quad x\in\Omega,\quad \hat{v}_i=0,\quad x\in\partial\Omega。$$

同上述分析，取到 $\{\hat{v}_i\}$ 的收敛子列，不妨仍记为 $\{\hat{v}_i\}$，假设在 $C^1(\bar{\Omega})$ 上，$\lim\limits_{i\to\infty}\hat{v}_i=\hat{v}_\infty\geqslant0$，其中 $\|\hat{v}_\infty\|_\infty=1$。由于 $v_\infty\equiv0$，则 U_∞ 满足

$$-\Delta U_\infty=\frac{U_\infty}{d(0)}\left(\lambda_\infty-\frac{U_\infty}{d(0)}\right),\quad x\in\Omega,\quad U_\infty=0,\quad x\in\partial\Omega。$$

由引理 1，当且仅当 $\sigma_1\left(1,-\dfrac{\lambda_\infty}{d(0)}\right)<0\Leftrightarrow\dfrac{1}{d(0)}\sigma_1(d(0),-\lambda_\infty)<0$ 时，方程有唯一正解。由于 $\sigma_1(d(0),-\lambda_\infty)=0$，因此 $U_\infty\equiv0$ 是上述方程仅有的非负解，因此 $\hat{v}_\infty$ 满足

$$-D\Delta\hat{v}_\infty-\hat{v}_\infty\mu=0,\quad x\in\Omega,\quad \hat{v}_\infty=0,\quad x\in\partial\Omega。$$

由于 $\hat{v}_\infty\geqslant(\not\equiv)0$，因此可以看成上述方程的主特征函数，由 Krein-Rutman 定理可知，$\sigma_1(D,-\mu)=0$，矛盾，因此 $v_\infty>0$。

$U_\infty>0$。反证法，假设 $U_\infty\equiv0$，取 $\hat{U}_i=\dfrac{U_i}{\|U_i\|_\infty}$，则 $\hat{U}_i$ 满足

$$-\Delta\hat{U}_i=\frac{\hat{U}_i}{d(v_i)}\left(\lambda_i-\frac{U_i}{d(v_i)}+\gamma F(v_i)\frac{U_i/d(v_i)}{\alpha+U_i/d(v_i)}\right),\quad x\in\Omega,\quad \hat{U}_i=0,\quad x\in\partial\Omega。$$

同上述分析，取到 $\{\hat{U}_i\}$ 的收敛子列，不妨仍记为 $\{\hat{U}_i\}$，假设在 $C^1(\bar{\Omega})$ 上，$\lim\limits_{i\to\infty}\hat{U}_i=\hat{U}_\infty\geqslant0$，其中 $\|\hat{U}_\infty\|_\infty=1$。

由于 $U_\infty \equiv 0$,则 v_∞ 满足

$$-D\Delta v_\infty = \mu v_\infty - v_\infty^2, \quad x\in\Omega, \quad v_\infty = 0, \quad x\in\partial\Omega,$$

由引理 1 知,当且仅当 $\sigma_1(D,-\mu)<0$ 时,方程存在唯一正解 $v_\infty=\theta_{D,\mu}$,因此$\hat{U}_\infty$ 满足

$$-\Delta\hat{U}_\infty - \frac{\lambda_\infty}{d(\theta_{D,\mu})}\hat{U}_\infty = 0, \quad x\in\Omega, \quad \hat{U}_\infty = 0, \quad x\in\partial\Omega。$$

由于$\hat{U}_\infty \geqslant (\not\equiv) 0$,因此$\hat{U}_\infty$ 可以看成上述方程的主特征函数,由 Krein-Rutman 定理可知,$\sigma_1\left(1,-\frac{\lambda_\infty}{d(\theta_{D,\mu})}\right)=0$,而 $0=\sigma_1\left(1,-\frac{\lambda_\infty}{d(\theta_{D,\mu})}\right)<\sigma_1\left(1,-\frac{\lambda_\infty}{d(0)}\right)=\frac{\sigma_1(d(0),-\lambda_\infty)}{d(0)}$。这表明 $\sigma_1(d(0),-\lambda_\infty)>0$,矛盾,所以 $U_\infty>0$,故 (U_∞,v_∞) 是方程(5)在 $\lambda=\lambda_\infty$ 时的一个正解,证毕。

3 结语

本文研究了一类具有捕食种群 Allee 效应的捕食-食饵模型的共存解和共存解的充分条件。利用正锥上的不动点指数理论给出了共存解存在的充分条件,如果捕食者和食饵之间的相互作用遵循 $F'(v)=0$,只要食饵自身的出生率不太小,两种生物就可以共存;如果捕食者和食饵之间的相互作用遵循 $F'(v)\neq 0$,那么只有当食饵的出生率处于中间范围时,两种生物才有可能共存。

齐次 Dirichlet 边值条件下具有捕食种群 Allee 效应和密度依赖扩散的捕食-食饵模型的共存解具有重要的实际应用价值。共存解的研究有助于理解捕食者和食饵之间的相互作用,以及理解 Allee 效应和密度依赖扩散如何影响物种的共存,在物种多样性、保护濒危物种、生态系统恢复等方面起到了重要作用。由于物种生存的栖息地往往都是空间异质的,因此研究空间环境的异质性如何影响物种的共存行为是值得进一步思考的问题。两种群的作用关系似乎并不能完全理解生态系统的复杂性,因此考虑多物种相互作用的共存条件也是值得进一步思考的问题。

参考文献:

[1] DENNIS B. Allee effects: population growth, critical density, and the chance of extinction[J]. Natural Resource Modeling, 1989, 3(4):481-538.
[2] LI Shuai, YUAN Sanling, JIN Zhen, et al. Bifurcation analysis in a diffusive predator-prey model with spatial memory of prey, Allee effect and maturation delay of predator[J]. Journal of Differential Equations, 2023, 357:32-63.
[3] BOUKAL D S, SABELIS M W, LUDĚK B. How predator functional responses and Allee effects in prey affect the paradox of enrichment and population collapses[J]. Theoretical Population Biology, 2007, 72(1):136-147.
[4] WU Daiyong, ZHAO Hongyong. Spatiotemporal dynamics of a diffusive predator-prey system with Allee effect and threshold hunting[J]. Journal of Nonlinear Science, 2020, 30(3):1015-1054.
[5] SEN D, MOROZOV A, GHORAI S, et al. Bifurcation analysis of the predator-prey model with the Allee effect in the predator[J]. Mathematical Biology, 2021, 84(1):1-27.
[6] RANA S, BHATTACHARYA S, SAMANTA S. Complex dynamics of a three-species food chain model with fear and Allee effect[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2022, 32(6):1-27.
[7] KUANG Y, SO W H. Analysis of a delayed two-stage population model with space-limited recruitment[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1995, 55(6):1675-1696.
[8] RANA S, BHOWMICK A R, SARDAR T. Invasive dynamics for a predator-prey system with Allee effect in both populations and a special emphasis on predator mortality[J]. Chaos, 2021, 31(3):1-22.
[9] FRAILE J M, MEDINA P K, LÓPEZ-GÓMEZ J, et al. Elliptic eigenvalue problems and unbounded continua of positive solutions of a semilinear elliptic equation[J]. Journal of Differential Equations, 1996, 127(1):295-319.
[10] 叶其孝,李正元,王明新,等. 反应扩散方程引论[M]. 北京:科学出版社,2011.
YE Qixiao, LI Zhengyuan, WANG Mingxin, et al. Introduction to reaction-diffusion equations[M]. Beijing: Science Press, 2011.

(下转第 103 页)