山东大学学报(理学版)2025 年 2 月 第 60 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.2, 2025

E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2025)02-0019-05 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.275

带有割点的图的补图的距离谱半径

陈旭[1],邵荣侠[1],王国平[2*]
(1.新疆财经大学统计与数据科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830012; 2.新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要:本文确定了所有团树的补图中距离谱半径分别是最大和最小的图,给出了所有带有割点的图的补图中距离谱半径分别是最大和最小的图。
关键词:距离谱半径;补图;团树;割点
中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A
引用格式:陈旭,王国平,邵荣侠.带有割点的图的补图的距离谱半径[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(2):19-23.

Distance spectral radius of complements of graphs with cut vertices

CHEN Xu[1], SHAO Rongxia[1], WANG Guoping[2*]
(1. School of Statistics and Data Science, Xinjiang University of Finance and Economics, Urumqi 830012, Xinjiang, China; 2. School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi 830017, Xinjiang, China)

Abstract: This paper determines the graphs with maximum and minimum distance spectral radii in the complement graphs of all clique trees, and provides the graphs with maximum and minimum distance spectral radii in the complement graphs of all graphs with cut vertices.
Key words: distance spectral radius; complement; clique tree; cut vertices

0 引言

令图 G 的距离矩阵 $\boldsymbol{D}(G)=(d_{ij})_{n\times n}$,其中 d_{ij} 是图 G 中点 v_i 和点 v_j 之间的距离,则 $D(G)$ 是一个非负实对称矩阵,所以 $\boldsymbol{D}(G)$ 的特征值写为 $\lambda_1(G)\geqslant\lambda_2(G)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(G)$,称 $\lambda_1(G)$ 为图 G 的距离谱半径。Bose 等[1]确定了不带悬挂点的图中距离谱半径是最大的图。Aleksandar[2]确定了在给定完美匹配和固定度数的图中距离谱半径是最大的图。Ning 等[3]确定了带有给定悬挂点的树中距离谱半径是最小的图。更多关于图的距离谱半径的研究可以参考文献[4]。

令 $G^c=(V(G^c), E(G^c))$ 是图 $G=(V(G), E(G))$ 的补图,其中 $V(G^c)=V(G)$, $E(G^c)=\{xy\notin E(G): x,y\in V(G)\}$。近些年来,有关图的补图的研究一直是图谱理论的热点问题。Fan 等[5]确定了树的补图中最小特征值是最小的图。Jiang 等[6]确定了带有 2 个悬挂点的连通补图中最小特征值是最小的图。Li 等[7]给出了树的补图中最小无符号拉普拉斯特征值是最小的图。Yu 等[8]确定了单圈图的补图中最小无符号拉普拉斯特征值是最小的图。冯小芸等[9]确定了带有 3 个悬挂点的图的补图中最小特征值是最小的极图。

关于图的补图的距离特征值,Chen 等[10]确定了直径是大于 3 的图的补图中距离谱半径分别是最大和最小的极图,和最小距离特征值是最小的极图。Lin 等[11]不仅确定了树的补图中距离谱半径分别取得最大和最小的图,还确定了树的补图中最小距离特征值分别是最大和最小的图。Qin 等[12]确定了单圈图的补图

收稿日期:2023-06-19; **网络出版时间**:2024-05-22 09:28:15
基金项目:2023 年校级教学改革项目(4008107)
第一作者:陈旭(1995—),男,助教,硕士研究生,研究方向为图论及其应用. E-mail:xuchen@xjufe.edu.cn
* **通信作者**:王国平(1965—),男,教授,博士研究生,研究方向为组合数学、图论等. E-mail:xj.wgp@163.com

中距离谱半径是最大的图,和直径为 3 的单圈图的补图中最小距离特征值是最小的图。Chen 等[13] 确定了带有 2 个悬挂点的图的补图中距离谱半径分别是最大和最小的极图,和最小距离特征值是最小的图。

本文中涉及的所有图类都是简单图。如果图 G 中删除一个点和该点关联的所有的边而导致图不再连通,那么我们称被删除的点为割点。我们称图 G 中没有割点的导出子图为块,如果图 G 中所有的块都是一个团(即完全图),那么称图 G 是一个团树。文献[10,12-13]是通过对不同的图类做增边和减边的图变换,得到新图与原图之间特征值大小递进的关系,从而得到文章的结论。本文确定所有团树补图中的距离谱半径分别是最大和最小的图,带有割点图的补图中的距离谱半径分别是最大和最小的图。本文研究的图类更为复杂,研究思路和方法也有别于上述研究,在割点的数量上与特征值的大小之间都给出了递进关系,处理手段具有创新性,对后续其他图类研究给出了一些借鉴作用。

1 基本引理

如果在图 G 中点 v_i 与点 v_j 相邻,那么记 $a_{ij}=1$;如果点 v_i 和点 v_j 是不相邻的,那么记 $a_{ij}=0$,设 $\boldsymbol{A}(G)=(a_{ij})_{n\times n}$ 是图 G 的邻接矩阵。令 $\boldsymbol{J}_n$ 和 $\boldsymbol{I}_n$ 分别是 n 阶全 1 矩阵和 n 阶单位矩阵,令矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$:如果 $a_{ij}=b_{ij}$,那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$;如果 $a_{ij}\geqslant b_{ij}$,那么 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}(i,j=1,2,\cdots,n)$。如果点 u 相邻于点 v,那么记 $u\sim v$;否则记 $u\nsim v$。

引理 1.1 设 G 是一个带有割点的简单图,如果直径 $d(G)\geqslant 3$,那么有:

$$\text{当 } d(G)>3,\quad \boldsymbol{D}(G^{c})=\boldsymbol{J}_n-\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}(G);$$
$$\text{当 } d(G)=3,\quad \boldsymbol{D}(G^{c})\geqslant\boldsymbol{J}_n-\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}(G)。$$

证明 当 $d(G)>3$ 时,考察图 G 中任意 2 个点 u 和 v 之间的关系。若 $u\sim v$,则图 G 中一定存在一个既不相邻于 u 也不相邻于 v 的点 w,所以 $d_{G^c}(u,v)=2$。若 $u\nsim v$,则 $d_{G^c}(u,v)=1$,表明 $\boldsymbol{D}(G^c)=\boldsymbol{J}_n-\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}(G)$。

当 $d(G)=3$ 时,考察图 G 中任意 2 个点 u 和 v 之间的关系。在 $u\sim v$ 的情况下:如果 $G\backslash\{u,v\}$ 中所有的点都相邻于 u 或 v,那么 $d_{G^c}(u,v)=3$;如果 $G\backslash\{u,v\}$ 中存在一个既不相邻于 u 也不相邻于 v 的点 w,那么 $d_{G^c}(u,v)=2$。而 $u\nsim v$ 时,$d_{G^c}(u,v)=1$,表明 $\boldsymbol{D}(G^c)\geqslant\boldsymbol{J}_n-\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}(G)$。

令 uv 是点 u 和点 v 连接的边,图 G 的点集为 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}(G)$ 关于特征值的特征向量,将特征向量 $\boldsymbol{x}$ 中的分量 x_i 对应点 v_i,使得 $\boldsymbol{x}(v_i)=x_i(i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(G)\boldsymbol{x}=2\sum_{v_iv_j\in G}x_ix_j。\tag{1}$$

如果图 G 中至少包含 2 个点,那么称图 G 是一个非平凡的图。令图 G_1 和图 G_2 是 2 个非平凡且不相交的连通图,设 $u_1\in G_1$ 和 $u_2\in G_2$,可以称 $G_1(u_1)\cdot G_2(u_2)$ 是图 G_1 中点 u_1 和图 G_2 中点 u_2 粘在一起而得到的图,见图 1。

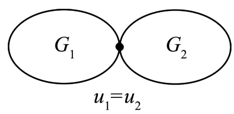

图 1 $G=G_1(u_1)\cdot G_2(u_2)$
Fig.1 $G=G_1(u_1)\cdot G_2(u_2)$

引理 1.2 设图 G_1 和图 G_2 是 2 个非平凡且不相交的连通图,令 $\{v_1,v_2\}\in V(G_1)$ 和 $u\in V(G_2)$,记 $G=G_1(v_1)\cdot G(u)$ 和 $\widetilde{G}=G_1(v_2)\cdot G_2(u)$,设 $\boldsymbol{x}$ 是关于图 G 的补图的距离谱半径 $\lambda_1(G^c)$ 的单位 Perron 向量,如果 $\boldsymbol{x}(v_1)\leqslant\boldsymbol{x}(v_2)$ 和 $d(G)>3$,那么 $\lambda_1(G^c)\leqslant\lambda_1(\widetilde{G}^c)$。

证明 根据式(1)可知

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(G)\boldsymbol{x}=2\sum_{v_iv_j\in E(G)}\boldsymbol{x}(v_i)\boldsymbol{x}(v_j)\leqslant 2\sum_{v_iv_j\in E(\widetilde{G})}\boldsymbol{x}(v_i)\boldsymbol{x}(v_j)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\widetilde{G})\boldsymbol{x}。$$

因为图 G 中含有 2 个割点,所以 $d(G)>3$ 和 $d(\widetilde{G})\geqslant 3$,根据引理 1.1 可得

$$\begin{aligned}\lambda_1(G^c)&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(G^c)\boldsymbol{x}\\&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}_n-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(G)\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

$$\leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}_n-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\widetilde{G})\boldsymbol{x}$$
$$\leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\widetilde{G}^{\mathrm{c}})\boldsymbol{x}。$$

由 Rayleigh 定理可知,$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\widetilde{G}^{\mathrm{c}})\boldsymbol{x}\leqslant\lambda_1(\widetilde{G}^{\mathrm{c}})$,所以 $\lambda_1(G^{\mathrm{c}})\leqslant\lambda_1(\widetilde{G}^{\mathrm{c}})$。

令集合 α_n^k 是包含所有带有 n 个点和 k 个割点的连通图。记 S_n^k 是集合 α_n^k 中最大的距离谱半径。

引理 1.3　$S_n^k S_n^k$是关于 $k\geqslant3$, 有 $S_n^k\leqslant S_n^{k-1}$。

证明　设 $\boldsymbol{x}$ 是关于带有 k 个割点图 G 的补图中最大的距离谱半径 $\lambda_1(G^{\mathrm{c}})$ 的单位 Perron 向量,即 $\lambda_1(G^{\mathrm{c}})=S_n^k$。因为 $k\geqslant3$,所以图 G 中存在包含 2 个割点 u、v 的团 B,不失一般性地,可以假设 $\boldsymbol{x}(u)\geqslant\boldsymbol{x}(v)$。图 G 可视为 2 个非平凡且不相交的连通图 G_1 和 G_2 在割点 v 处粘贴而得到的图,则 $G=G_1(v)\cdot G_2(v)$,其中团 B 是包含于图 G_1,但点 v 不是图 G_1 的割点。通过构造图 $\widetilde{G}=G_1(u)\cdot G_2(v)$,显然图 $\widetilde{G}\in\alpha_n^{k-1}$。根据引理 2.2 可知,$\lambda_1(G^{\mathrm{c}})\leqslant\lambda_1(\widetilde{G}^{\mathrm{c}})$,所以 $S_n^k=\lambda_1(G^{\mathrm{c}})\leqslant\lambda_1(\widetilde{G}^{\mathrm{c}})\leqslant S_n^{k-1}$。

记 M_n^k 是 α_n^k 中最小的距离谱半径。

引理 1.4　M_n^k 关于 $k\geqslant2$,有 $M_n^k\leqslant M_n^{k-1}$。

同引理 1.3 证明一样可得引理 1.4 结论。

引理 1.5　令 $\widetilde{G}$ 是在图 G 中删除一个边而得到的连通图,如果 $d(G)>3$,那么 $\lambda_1(G^{\mathrm{c}})>\lambda_1(\widetilde{G}^{\mathrm{c}})$。

证明　因为 $d(G)>3$,所以 $d(\widetilde{G})\geqslant d(G)>3$。设 $\boldsymbol{x}$ 是关于图 $\widetilde{G}$ 的补图的距离谱半径 $\lambda_1(\widetilde{G}^{\mathrm{c}})$ 的单位 Perron向量,根据式(1)可知

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(G)\boldsymbol{x}=2\sum_{uv\in E(\widetilde{G})}\boldsymbol{x}(u)\boldsymbol{x}(v)<2\sum_{uv\in E(G)}\boldsymbol{x}(u)\boldsymbol{x}(v)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\widetilde{G})\boldsymbol{x},$$

所以根据引理 1.1 可得

$$\begin{aligned}\lambda_1(\widetilde{G}^{\mathrm{c}})&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\widetilde{G}^{\mathrm{c}})\boldsymbol{x}\\&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}_n-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\widetilde{G})\boldsymbol{x}\\&<\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}_n-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(G)\boldsymbol{x}\\&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(G^{\mathrm{c}})\boldsymbol{x}。\end{aligned}$$

根据 Rayleigh 定理可知 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(G^{\mathrm{c}})\boldsymbol{x}\leqslant\lambda_1(G^{\mathrm{c}})$,所以 $\lambda_1(G^{\mathrm{c}})>\lambda_1(\widetilde{G}^{\mathrm{c}})$。

令集合 β_n^l 是包含所有带有 n 个点和 l 个边的连通图,设 T_n^l是 β_n^l 中最小的距离谱半径。

引理 1.6　$T_n^l>T_n^{l-1}$。

证明　设 $\boldsymbol{x}$ 是关于带有 n 个点和 l 个边的图 G 的补图中最小距离谱半径 $\lambda_1(G^{\mathrm{c}})=T_n^l$的单位 Perron 向量,即 $\lambda_1(G^{\mathrm{c}})=T_n^l$, $G\in\beta_n^l$。令 $\overline{G}$ 是在图 G 中删除一个边而得到的连通图,显然 $\overline{G}\in\beta_n^{l-1}$。根据引理 1.5 可得 $\lambda_1(G^{\mathrm{c}})>\lambda_1(\overline{G}^{\mathrm{c}})$,所以 $T_n^l=\lambda_1(G^{\mathrm{c}})>\lambda_1(\overline{G}^{\mathrm{c}})\geqslant T_n^{l-1}$。

2　带有割点的图的补图的距离谱半径

通过使用在引理 1.1 中已经证明的 $D(G^{\mathrm{c}})$和 $\boldsymbol{A}(G)$之间的关系, 本文确定了团树的补图中距离谱半径分别是最大和最小的图,和带有割点的图的补图中距离谱半径分别是最大和最小的图。

将图 G 中每一个块由团(团和块的点数相同)取代,得到的图称为团树,简单记为 C。设有且只有一个割点的团称为团树的悬挂团,以下涉及的所有带有 k 个割点的图都是带有 s 个块。如果团树 C 中恰巧只有 3 个割点 v_1、v_2 和 v_3,且割点 v_1 带有 p 个悬挂团,割点 v_2 带有 q 个悬挂团,割点 v_3 带有 l 个悬挂团,那么该团树可以记为 $C_{p,q,l}$, $p+q+l=s-2$。如果团树 C 中恰巧只有 2 个割点 w 和 w',且割点 w 带有 $s-2$ 个悬挂团,割点 w'带有 1 个悬挂团,那么该团树可以记为 $C_{s-2,1}$,见图 2。

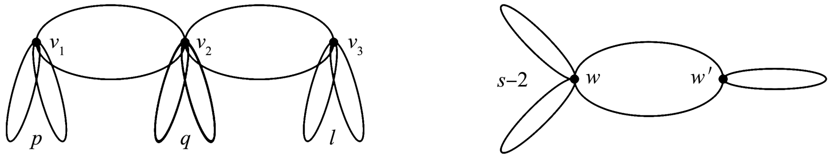

图 2　$C_{p,q,l}$和 $C_{s-2,1}$
Fig.2　$C_{p,q,l}$ and $C_{s-2,1}$

引理 2.1 $\lambda_1(C^c) \leqslant \lambda_1(C^c_{s-2,1})$。

证明 因为团树 C 是带有 2 个不相邻的割点,所以 $d(C)>3$。设 $\boldsymbol{x}$ 是关于团树 C 的补图的距离谱半径 $\lambda_1(C^c)$ 的单位 Perron 向量,根据引理 1.3 可得 $\lambda_1(C^c) \leqslant \lambda_1(C^c_{p,q,l})$。取割点 v_1、v_2 和 v_3 中最大的分量,下面分成 2 种情况进行讨论。

情况 1 如果 $\max\{\boldsymbol{x}(v_1),\boldsymbol{x}(v_3)\} \geqslant \boldsymbol{x}(v_2)$,由于具有对称性,因此不妨设 $\boldsymbol{x}(v_1) \geqslant \boldsymbol{x}(v_2)$,根据引理 1.2、1.3 可得 $\lambda_1(C^c_{p,q,l}) \leqslant \lambda_1(C^c_{s-4,1,1}) \leqslant \lambda_1(C^c_{s-2,1})$。

情况 2 如果 $\boldsymbol{x}(v_2) \geqslant \max\{\boldsymbol{x}(v_1),\boldsymbol{x}(v_2)\}$,那么根据引理 1.2、1.3 可得,$\lambda_1(C^c_{p,q,l}) \leqslant \lambda_1(C^c_{1,s-4,1}) \leqslant \lambda_1(C^c_{s-2,1})$。

综上,结论成立。

令 P_{s+1}是一个带有 $s+1$ 个点的路,显然 P_{s+1}带有 s 个边,将每一个边用一个团取代,得到的图称为团路,简单记为 P_K。根据引理 1.4、2.1 可得下面团树的补图中距离谱半径分别是最大和最小的结论。

定理 2.1 $\lambda_1(P^c_K) \leqslant \lambda_1(C^c) \leqslant \lambda_1(C^c_{s-2,1})$。

令 B 是一个带有 s 个块 B^1、B^2、…、B^s 的块图,将块图 B 中的块 B^i 用带有 $|V(B^i)|$个点的团 K^i替换而得到的图是团树 $C_B(i=1,2,\cdots,s)$。

引理 2.2 如果块图 B 中有 2 个不相邻的割点,那么 $\lambda_1(B^c) \leqslant \lambda_1(C^c_B)$,等号成立当且仅当 $B \cong C_B$。

证明 设 $\boldsymbol{x}$ 是关于图 B 的补图的距离谱半径 $\lambda_1(B^c)$ 的单位 Perron 向量,通过连接块图 B 中的块 B^i 中所有不相邻的点对而得到的图是团树 $C_B(i=1,2,\cdots,n)$,根据式(1)可以得到

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(B)\boldsymbol{x} = 2\sum_{v_iv_j \in E(B)} x_ix_j \leqslant 2\sum_{v_iv_j \in E(C_B)} x_ix_j = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(C_B)\boldsymbol{x}。$$

因为块图 B 中包含 2 个不相邻的割点, 所以 $d(B)>d(C_B) \geqslant 3$。根据引理 1.1 可以得到

$$\begin{aligned}\lambda_1(B^c) &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(B^c)\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}_n-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(B)\boldsymbol{x} \\ &\leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}_n-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(C_B)\boldsymbol{x} \\ &\leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(C^c_B)\boldsymbol{x}。\end{aligned}$$

根据 Rayleigh 定理可知,$\lambda_1(C^c_B) \geqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}D(C^c_B)\boldsymbol{x}$, 所以 $\lambda_1(B^c) \leqslant \lambda_1(C^c_B)$。

用反证法。假设 $B \ncong C_B$,由于 $\lambda_1(B^c)=\lambda_1(C^c_B)$,因此

$$\begin{aligned}0 &= \lambda_1(C^c_B)-\lambda_1(B^c) \\ &\geqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}(C_B)-\boldsymbol{A}(B))\boldsymbol{x} \\ &= \sum_{v_iv_j \in E((C_B)-E(B))} x_ix_j。\end{aligned}$$

由假设可知,$E(C_B)-E(B) \neq \varnothing$,所以 $\sum_{v_iv_j \in E((C_B)-E(B))} x_ix_j>0$。该矛盾表明必要性是成立的。

结合引理 2.1、2.2 可得以下结论。

引理 2.3 如果块图 B 中有 2 个不相邻的割点, 那么 $\lambda_1(B^c) \leqslant \lambda_1(C^c_{s-2,1})$。

将带有 n_i 个点的团 B^i 取代路 $P_{s+1}=v_1v_2\cdots v_{s+1}$中边 $e_i=v_iv_{i+1}$,记得到的图是块路 $P_B(n_1,n_2,\cdots,n_s)$,将 n_i 个点的圈 C_i 取代块路 $P_B(n_1,n_2,\cdots,n_s)$中团 B^i,得到图圈路,记 $P_C(n_1,n_2,\cdots,n_s)$, $i=1,2,\cdots,s$。

引理 2.4 $\lambda_1(P^c_B(n_1,n_2,\cdots,n_s)) \geqslant \lambda_1(P^c_C(n_1,n_2,\cdots,n_s))$。

证明 块路 $P_B(n_1,n_2,\cdots,n_s)$中存在 s 个块 B^1、B^2、…、B^s,对于任意块$B^i \in P_B(n_1,n_2,\cdots,n_s)$, $i=1,2,\cdots,s$,令 $V(B^i)=\{v_i,u_1,u_2,\cdots,u_{n_i-1}\}$,由于 B^i 中没有割点,所以块 B^i 中存在 $v_i \sim u_1 \sim u_2 \sim \cdots \sim u_{n_i-1} \sim v_i$,显然存在一个圈包含块 B^i 的每一个点。设 x 是关于块图 $\mathrm{P}_B(n_1,n_2,\cdots,n_s)$的补图中最小的距离谱半径 $\lambda_1(P^c_B(n_1,n_2,\cdots,n_s))$的单位 Perron 向量,在块 B^i 中删除圈 $v_i \sim u_1 \sim u_2 \sim \cdots \sim u_{n_i-1} \sim v_i$ 之外所有边而得到的图是圈路 $P_C(n_1,n_2,\cdots,n_s)$, $i=1,2,\cdots,s$。根据引理 1.6 可知,$\lambda_1(P^c_B(n_1,n_2,\cdots,n_s))$与块路 $P_B(n_1,n_2,\cdots,n_s)$中的边数同增或者同减,所以 $\lambda_1(P^c_B(n_1,n_2,\cdots,n_s)) \geqslant \lambda_1(P^c_C(n_1,n_2,\cdots,n_s))$。

根据引理 1.4 可得 $\lambda_1(B^c) \geqslant \lambda_1(P^c_B(n_1,n_2,\cdots,n_s))$,结合引理 2.3、2.4 可得以下结论。

定理 2.2　如果块图 B 中有 2 个不相邻的割点,那么 $\lambda_1(P_C^c(n_1,n_2,\cdots,n_s))\leqslant\lambda_1(B^c)\leqslant\lambda_1(C_{s-2,1}^c)$。

参考文献:

[1] BOSE S S, NATH M, PAUL S. On the maximal distance spectral radius of graphs without a pendent vertex[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2013, 438(11):4260-4278.

[2] ALEKSANDAR I. Distance spectral radius of trees with given matching number[J]. Discrete Applied Mathematics, 2010, 158(16):1799-1806.

[3] NING W J, OUYANG L Q, LU M. Distance spectral radius of trees with fixed number of pendent vertices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2013, 439(8):2240-2249.

[4] AOUCHICHE M, HANSEN P. Distance spectra of graphs: a survey[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2014, 458:301-386.

[5] FAN Y Z, ZHANG F F, WANG Y. The least eigenvalue of the complements of trees[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2011, 435(9):2150-2155.

[6] JIANG G, YU G D, SUN W, et al. The least eigenvalue of graphs whose complements have only two pendent vertices[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 331:112-119.

[7] LI S C, WANG S J. The least eigenvalue of the signless Laplacian of the complements of trees[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2012, 436(7):2398-2405.

[8] YU G D, FAN Y Z, YE M L. The least signless Laplacian eignvalue of the complements of unicyclic graphs[J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 306:13-21.

[9] 冯小芸,陈旭,王国平. 仅有三个悬挂点的图的补图的最小特征值[J]. 华中师范大学学报(自然科学版),2021,55(6):1000-1006.
FENG Xiaoyun, CHEN Xu, WANG Guoping. The least eigenvalue of the complements of graphs having exactly three pendent vertices[J]. Journal of Huazhong Normal University (Natural Sciences), 2021, 55(6):1000-1006.

[10] CHEN X, WANG G P. The distance spectrum of the complements of graphs of diameter greater than three[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2023, 54:959-965.

[11] LIN H Q, DRURY S. The distance spectrum of complements of trees[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2017, 530:185-201.

[12] QIN R, LI D, CHEN Y Y, et al. The distance eigenvalues of the complements of unicyclic graphs[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2020, 598:49-67.

[13] CHEN X, WANG G P. The distance spectrum of the complements of graphs with two pendent vertices[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2023, 54:1069-1080.

(编辑:祁业卿)