山东大学学报(理学版)2025 年 2 月 第 60 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.60, No.2, 2025

E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2025)02-0105-09　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.400

向量变分不等式的高阶可微性与灵敏性

马权禄[1],薛小维[2*]
(1.重庆交通大学数学与统计学院, 重庆 400074; 2.重庆文理学院数学与大数据学院, 重庆 402160)

摘要:研究向量变分不等式和弱向量变分不等式两类问题的高阶可微性与灵敏性。介绍了相依锥、高阶切集等的基本定义,研究了与向量变分不等式密切相关的一类集值映射的高阶微分性质,得到了其高阶导数的精确计算公式。通过讨论集值映射与其剖面映射二者高阶导数之间的关系,得到了向量变分不等式的高阶可微性与灵敏性。

关键词:向量变分不等式;高阶切集;相依导数;灵敏性
中图分类号:O224　　**文献标志码**:A
引用格式:马权禄,薛小维. 向量变分不等式的高阶可微性与灵敏性[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(2):105-113.

High-order differentiability and sensitivity of vector variational inequalities

MA Quanlu[1], XUE Xiaowei[2*]
(1. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China; 2. College of Mathematics and Big Data, Chongqing University of Arts and Sciences, Chongqing 402160, China)

Abstract: The paper studies the higher-order differentiability and sensitivity of vector variational inequalities and weak vector variational inequalities. The basic definitions of contingent cones, higher-order tangent sets are introduced. The higher-order differential properties of a class of set-valued maps closely related to vector variational inequalities are studied, and the accurate calculation formula of its higher-order derivatives is obtained. By discussing the relationship between the higher-order derivatives of set-valued mapping and its profile mapping, the higher-order differentiability and sensitivity of vector variational inequalities are obtained.

Key words: vector variational inequality; higher-order tangent sets; contingent derivative; sensitivity

0　引言

设 $L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ 是从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的所有线性连续算子的集合,$C\subset\mathbf{R}^m$ 是一个非空点闭凸锥,K 是 $\mathbf{R}^n$ 任意给定的非空紧子集,$F:K\to L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ 是一个向量值函数。

向量变分不等式问题就是求 $x^*\in K$ 使得对任意的 $x\in K$, 有

$$\langle F(x^*),x-x^*\rangle\notin -C\setminus\{0_{\mathbf{R}^m}\}。$$

弱向量变分不等式问题就是求 $x^*\in K$ 使得对任意的 $x\in K$, 有

$$\langle F(x^*),x-x^*\rangle\notin -\mathrm{int}\ C。$$

当 $m=1$、$C=\mathbf{R}_+$ 时,上述向量变分不等式问题就退化为经典的变分不等式问题。

向量变分不等式和弱向量变分不等式一直受到优化领域专家、学者的极大关注。近年来,国内外学者对向量变分不等式问题开展了广泛研究, 得到了关于存在性、稳定性及应用的大量结果[1-8]。

间隙函数是研究变分不等式问题的重要工具。通过引入实值的间隙函数,文献[9]将变分不等式问题

收稿日期:2023-09-15; **网络出版时间**:2024-05-22 10:03:01
基金项目:重庆市教委科学技术研究资助项目(KJQN20220134); 重庆市研究生联合培养基地建设资助项目(JDLHPYJD2021016); 重庆市高校创新研究群体资助项目(CXQT21021)
第一作者:马权禄(1998—),男,硕士研究生,研究方向为复杂系统优化与决策. E-mail:2990494687@qq.com
* **通信作者**:薛小维(1982—), 男, 副教授, 硕士生导师, 博士, 研究方向为复杂系统优化与决策. E-mail:xuexw1@126.com

等价转化为实数学规划问题。在间隙函数可微的情况下,通过下降算法得到该优化问题的广义收敛性质,因此,讨论向量变分不等式问题间隙函数的微分性质是非常有意义的。文献[10]提出了向量变分不等式问题集值形式的间隙函数;文献[11]研究一类集值映射和向量变分不等式的间隙函数的一阶微分性质,讨论了它们相依导数之间的关系,建立了向量变分不等式问题间隙函数的相依导数的显式表达式,讨论了向量变分不等式的灵敏度性质;文献[12] 研究了一类集值映射和 Minty 向量变分不等式问题间隙函数的微分性质,讨论了它们相依导数之间的关系, 并得到了 Minty 向量变分不等式问题的灵敏性;文献[13] 利用二阶相依集, 研究了一类集值映射的二阶微分性质, 然后利用间隙函数讨论了弱向量变分不等式问题的二阶灵敏性。文献[14]使用邻接二阶导数和邻接二阶 Φ 锥研究一类集值映射的微分性质, 建立了弱向量变分不等式邻接二阶导数的显式表达式。

高阶切锥和高阶切集是研究优化问题微分性质的重要工具, 它们可以精确地刻画优化问题可行点集的局部近似。许多学者对二阶或者更高阶切集进行了研究, 得到了许多有趣的结果[15-23]。文献[14]引入了不涉及具体阶数的高阶切锥和高阶切集, 提出一种简单的方法来分析集合和函数的高阶近似, 推导出无约束问题的高阶最优性条件;文献[15]借助高阶切集提出了集值映射的高阶切上图导数并研究了它们的性质,讨论了它们在集值优化中的应用。为了研究向量变分不等式高阶最优性条件, 考虑用高阶切锥和高阶切集来得到向量变分不等式间隙函数的高阶微分性质。

受文献[11-24]中工作的启发,利用 Penot 提出的高阶切锥和高阶切集, 在适当的条件下, 讨论两类向量变分不等式问题解的高阶可微性与灵敏性。对于文中的两类向量变分不等式问题, 均利用集值映射作为向量变分不等式问题的间隙函数, 把向量变分不等式问题转化为求解集值优化问题。研究一类集值映射的高阶微分性质, 在适当的正则条件下, 通过 Taylor 展式分析了一类集值映射的高阶导数的高阶微分性质,并得到了一个高阶导数显示表达式。然后分析向量变分不等式间隙函数和一类集值映射高阶导数之间的关系, 得到两类向量变分不等式间隙函数的高阶导数的显示表达式, 讨论了两类向量变分不等式的灵敏性。

1 预备知识

设 $G:\rightrightarrows\mathbf{R}^n$是一个集值映射,dom $G:=\{x\in\mathbf{R}^n:G(x)\neq\varnothing\}$表示 G 的有效域,G 的图用 graph$(G):=\{(x,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m:y\in G(x)\}$表示,$L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ 表示从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的所有线性连续算子的集合。对任意 $A\in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ ，其模定义为

$$\|A\|_L=\sup\{\|A(x)\|:\|x\|\leqslant 1\}。$$

定义 1[24] 设 $F:\mathbf{R}^n\to L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ 是一个向量值函数, 如果存在 2 个线性连续算子$\Phi_1:\mathbf{R}^n\to L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ 和 $\Phi_2:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$, 及 x 的一个邻域 U, 使得对所有的$x_n\in U$,

$$F(x_n)=F(x)+\Phi_1(x_n-x)+\frac{1}{2}\Phi_2(x_n-x,x_n-x)+o(\|x_n-x\|)^2,$$

那么称 F 在 $x\in\mathbf{R}^n$上是二阶 Fréchet 可微的。Φ_1 和 Φ_2 分别称为 F 在 x 处的一阶 Fréchet 导数和二阶 Fréchet 导数, 分别用$\nabla F(x)$和$\nabla^2 F(x)$来表示。显然, $\mathbf{R}^n\to L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ 和 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$是 2 个向量值函数, 其中 $\mathbf{R}^n\to L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ 表示从 $\mathbf{R}^n$到 $L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ 的所有线性连续算子的集合, 且 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$表示从 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$到 $L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ 的所有线性连续算子的集合。

定义 2[10] 设 D 是 $\mathbf{R}^m$ 的一个非空子集,

$$\mathrm{Max}_C(D):=\{\hat{y}\in D:\nexists\, y\in D,\ \text{s.t. } y-\hat{y}\in C\setminus\{0_{\mathbf{R}^m}\}\}$$

称为 D 的最大点集;

$$\mathrm{Max}_{\mathrm{int}\,C}(D):=\{\hat{y}\in D:\nexists\, y\in D,\ \text{s.t. } y-\hat{y}\in \mathrm{int}\,C\}$$

称为 D 的弱最大点集。显然,$\mathrm{Max}_C(D)\subseteq\mathrm{Max}_{\mathrm{int}\,C}(D)$。

定义 3[12,14] 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集, $\hat{x}\in\mathrm{cl}\,S$ 且有 $u\in\mathbf{R}^n$, $r\in[0,\infty)$,则

（ⅰ）S 在 $\hat{x}$ 处的相依锥定义为

$$T(S,\hat{x}):=\{x\in\mathbf{R}^n:\exists\, t_n\to 0_+,\ \exists\,\{x_n\}\to x.\ \text{s.t. } \hat{x}+t_nx_n\in S\};$$

(ⅱ) S 在 $\hat{x}$ 处沿方向 u 关于 r 的高阶切集定义为

$$T_r^{\mathrm{h}}(S,\hat{x},u):=\left\{x\in\mathbf{R}^n:\exists\, t_n\to 0_+,\ s_n\to 0_+,\ \left(\frac{s_n}{t_n}\right)\to\frac{1}{2r},\ \exists\,(x_n)\to x \right.$$
$$\left.\text{s.t. } \hat{x}+t_nu+t_ns_nx_n\in S\right\};$$

(ⅲ) S 在 $\hat{x}$ 处沿方向 u 关于 r 的邻接高阶切集定义为

$$T_r^{\mathrm{hi}}(S,\hat{x},u):=\left\{x\in\mathbf{R}^n:\forall\, t_n\to 0_+,\ s_n\to 0_+,\ \left(\frac{s_n}{t_n}\right)\to\frac{1}{2r},\ \exists\,\{x_n\}\to x \right.$$
$$\left.\text{s.t. } \hat{x}+t_nu+t_ns_nx_n\in S\right\}。$$

定义 4[14]　给定集值映射 $G:\mathbf{R}^n\rightrightarrows\mathbf{R}^m$ 及 $r\in[0,+\infty)$,G 在 (x,y) 处沿 (u,v) 方向上关于 r 的高阶导数定义为

$$D_r^{\mathrm{h}}G((x,y),(u,v))(w):=\left\{z\in\mathbf{R}^m:(w,z)\in T_r^{\mathrm{h}}(\mathrm{graph}(G),(x,y),(u,v))\right\}。$$

类似地,

$$D_r^{\mathrm{hi}}G((x,y),(u,v))(w):=\left\{z\in\mathbf{R}^m:(w,z)\in T_r^{\mathrm{hi}}(\mathrm{graph}(G),(x,y),(u,v))\right\}。$$

2　一类集值映射的高阶微分性质

在下文中,总假设 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个紧子集,$F:\mathbf{R}^n\to L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ 二阶连续 Fréchet 可微,且

$$G(x):=\langle F(x),x-K\rangle=\bigcup_{z\in K}\langle F(x),x-z\rangle,\quad \forall x\in K。$$

下面将讨论 $G(x)$ 的高阶微分性质。

定理 1　设 $\hat{x},\bar{x}\in K$,$\hat{y}=\langle F(\hat{x}),\hat{x}-\bar{x}\rangle\in G(\hat{x})$ 且 $(u,v)\in T(\mathrm{graph}(G),(\hat{x},\hat{y}))$,$r\in[0,\infty)$,如果

$$\lim_{\|z\|\to\infty,\ z\in\mathbf{R}^n}\|\langle F(\hat{x}),z\rangle\|=\infty,\tag{1}$$

那么对任意的 $x\in\mathrm{dom}(D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v)))$,

$$\begin{aligned}D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)=&\bigcup_{x^*\in T_r^{\mathrm{h}}(K,\bar{x},\omega)}[\langle F(\hat{x}),x-x^*\rangle+2r\langle\nabla F(\hat{x})u,(u-\omega)\rangle]\\&+r\langle\nabla^2F(\hat{x})(u,u),\hat{x}-\bar{x}\rangle+\langle\nabla F(\hat{x})x,\hat{x}-\bar{x}\rangle,\end{aligned}$$

其中 $\omega\in T(K,\bar{x})$ 满足 $\langle F(\hat{x}),\omega\rangle=-v+\langle F(\hat{x}),u\rangle+\langle\nabla F(\hat{x})u,\hat{x}-\bar{x}\rangle$。

证明　假设 $y\in D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$,由高阶导数的定义,存在序列 $(x_n,y_n)\to(x,y)$,$t_n\to 0_+$,$s_n\to 0_+$,$\dfrac{s_n}{t_n}\to\dfrac{1}{2r}$,使得

$$\hat{y}+t_nv+t_ns_ny_n\in G(\hat{x}+t_nu+t_ns_nx_n)=\langle F(\hat{x}+t_nu+t_ns_nx_n),\hat{x}+t_nu+t_ns_nx_n-K\rangle,$$

因此,存在 $\bar{x}_n\in K$,使得

$$\hat{y}+t_nv+t_ns_ny_n=\langle F(\hat{x}+t_nu+t_ns_nx_n),\hat{x}+t_nu+t_ns_nx_n-\bar{x}_n\rangle。\tag{2}$$

由于 F 二阶连续 Fréchet 可微,因此可得 F 在 $\hat{x}$ 处的 Taylor 展开式为

$$\begin{aligned}F(\hat{x}+t_nu+t_ns_nx_n)=&F(\hat{x})+t_n\nabla F(\hat{x})u+t_ns_n\nabla F(\hat{x})x_n\\&+\frac{1}{2}t_n^2\nabla^2F(\hat{x})(u+s_nx_n,u+s_nx_n)+o(\|t_nu+t_ns_nx_n\|)^2。\end{aligned}\tag{3}$$

由式(2)、(3)可得

$$\begin{aligned}\hat{y}+t_nv+t_ns_ny_n=&\langle F(\hat{x}),\hat{x}-\bar{x}_n\rangle+t_n\langle F(\hat{x}),u\rangle+t_ns_n\langle F(\hat{x}),x_n\rangle\\&+t_n\langle\nabla F(\hat{x})u,\hat{x}-\bar{x}_n\rangle+t_n^2\langle\nabla F(\hat{x})u,u+s_nx_n\rangle\\&+t_ns_n\langle\nabla F(\hat{x})x_n,\hat{x}+t_nu+t_ns_nx_n-\bar{x}_n\rangle\\&+\frac{1}{2}t_n^2\langle\nabla^2F(\hat{x})(u+s_nx_n,u+s_nx_n),\hat{x}+t_nu+t_ns_nx_n-\bar{x}_n\rangle\end{aligned}$$

$$+t_n s_n\left\langle\frac{o(\|t_n u+t_n s_n x_n\|)^2}{t_n s_n},\hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n-\bar{x}_n\right\rangle。\tag{4}$$

K 是紧集，不失一般性，可以假设 $\bar{x}_n \to x' \in K$。由式(4)以及 $\hat{y}=\langle F(\hat{x}),\hat{x}-\bar{x}\rangle$，可得

$$\left\langle F(\hat{x}),\frac{\bar{x}_n-\bar{x}}{t_n}\right\rangle \to -v+\langle F(\hat{x}),u\rangle+\langle\nabla F(\hat{x})u,\hat{x}-x'\rangle。\tag{5}$$

现在证明 $\left\{\frac{\bar{x}_n-\bar{x}}{t_n}\right\}$ 是有界的。事实上，如果不是，那么存在一个子序列 $\left\|\frac{\bar{x}_{n_k}-\bar{x}}{t_{n_k}}\right\| \to \infty$。通过式(1)，可得 $\left\|\left\langle F(\hat{x}),\frac{\bar{x}_{n_k}-\bar{x}}{t_{n_k}}\right\rangle\right\| \to \infty$，与式(5)相矛盾，因此，$\left\{\frac{\bar{x}_n-\bar{x}}{t_n}\right\}$ 是有界的。又因为 $t_n \to 0_+$，有 $\bar{x}_n \to \bar{x}$，所以 $x'=\bar{x}$。$\mathbf{R}^n$ 是有限维的，不失一般性，可以假设 $\left\{\frac{\bar{x}_n-\bar{x}}{t_n}\right\} \to \omega$，那么 $\omega \in T(K,\bar{x})$。由式(5)可知，$\langle F(\hat{x}),\omega\rangle=-v+\langle F(\hat{x}),u\rangle+\langle\nabla F(\hat{x})u,\hat{x}-\bar{x}\rangle$。又由式(4)、(5)，可得

$$\begin{aligned}\left\langle F(\hat{x}),\frac{(\bar{x}_n-\bar{x})/t_n-\omega}{s_n}\right\rangle=&-y_n-\left\langle\nabla F(\hat{x})u,\frac{\bar{x}_n-\bar{x}}{s_n}\right\rangle+\langle F(\hat{x}),x_n\rangle\\&+\left\langle\nabla F(\hat{x})u,\frac{t_n}{s_n}u+t_n x_n\right\rangle+\langle\nabla F(\hat{x})x_n,\hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n-\bar{x}_n\rangle\\&+\frac{t_n}{2s_n}\langle\nabla^2 F(\hat{x})(u+s_n x_n,u+s_n x_n),\hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n-\bar{x}_n\rangle\\&+\left\langle\frac{o(\|t_n\hat{u}+t_n s_n x_n\|)^2}{t_n s_n},\hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n-\bar{x}_n\right\rangle,\end{aligned}$$

因此，

$$\left\langle F(\hat{x}),\frac{(\bar{x}_n-\bar{x})/t_n-\omega}{s_n}\right\rangle\to\langle F(\hat{x}),x\rangle+2r\langle\nabla F(\hat{x})u,u-\omega\rangle+\langle\nabla F(\hat{x})x,\hat{x}-\bar{x}\rangle+r\langle\nabla^2F(\hat{x})(u,u),\hat{x}-\bar{x}\rangle-y。$$

用类似于上面的证明和式(1)，可以假设 $\frac{(\bar{x}_n-\bar{x})/t_n-\omega}{s_n}\to x^*$，那么，$x^*\in T_r^{\mathrm{h}}(K,\hat{x},\omega)$，即有

$$\begin{aligned}y\in&\bigcup_{x^*\in T_r^{\mathrm{h}}(K,x,\omega)}[\langle F(\hat{x}),x-x^*\rangle+2r\langle\nabla F(\hat{x})u,(u-\omega)\rangle]\\&+r\langle\nabla^2F(\hat{x})(u,u),\hat{x}-\bar{x}\rangle+\langle\nabla F(\hat{x})x,\hat{x}-\bar{x}\rangle。\end{aligned}$$

反过来，可以假设

$$y=\langle F(\hat{x}),x-x^*\rangle+2r\langle\nabla F(\hat{x})u,(u-\omega)\rangle+\langle\nabla F(\hat{x})x,\hat{x}-\bar{x}\rangle+r\langle\nabla^2F(\hat{x})(u,u),\hat{x}-\bar{x}\rangle,$$

其中 $\omega\in T(K,\bar{x})$ 满足 $\langle F(\hat{x}),\omega\rangle=-v+\langle F(\hat{x}),u\rangle+\langle\nabla F(\hat{x})u,\hat{x}-\bar{x}\rangle$ 且 $x^*\in T_r^{\mathrm{h}}(K,\bar{x},\omega)$。由相依锥和高阶切集的定义，存在序列 $\bar{x}_n\subset K$，$\bar{x}_n\to\bar{x}$ 和 $t_n\to0_+$，$s_n\to0_+$ 使得

$$\frac{\bar{x}_n-\bar{x}}{t_n}\to\omega \text{ 和 } \frac{(\bar{x}_n-\bar{x})/t_n-\omega}{s_n}\to x^*。$$

由于 F 二阶连续 Fréchet 可微，因此可以取序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$，使得 $x_n\to x$，

$$\begin{aligned}y_n=&\left\langle F\left(\hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n,x_n-\frac{(\bar{x}_n-\bar{x})/t_n-\omega}{s_n}\right)\right\rangle+\langle\nabla F(\hat{x})x_n,\hat{x}-\bar{x}\rangle\\&+\left\langle\frac{F(\hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n)-F(\hat{x})}{t_n},2r(u-\omega)\right\rangle\\&+\left\langle\frac{F(\hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n)-F(\hat{x})-\nabla F(\hat{x})(t_n u+t_n s_n x_n)}{t_n s_n},r(\hat{x}-\bar{x})\right\rangle。\end{aligned}$$

易知，$y_n\to y$ 且

$$\begin{aligned}&\hat{y}+t_n(\langle\nabla F(\hat{x})u,\hat{x}-\bar{x}\rangle+\langle F(\hat{x}),u-\omega\rangle)+t_n s_n y_n\\=&\langle F(\hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n),\hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n-\bar{x}_n\rangle\in G(\hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n)。\end{aligned}$$

显然 $v=\langle \nabla F(\hat{x})u,\hat{x}-\bar{x}\rangle+\langle F(\hat{x}),u-\omega\rangle$，故 $y\in D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$。

注 1　(1) 当 $r=0$，$u=0_{\mathbf{R}^m}$，$v=0_{\mathbf{R}^n}$时，高阶切集退化为相依锥，有

$$D_0^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(0,0))(x)=DG((\hat{x},\hat{y}))(x)=\bigcup_{x^*\in T(K,\bar{x})}[\langle F(\hat{x}),x-x^*\rangle]+\langle \nabla F(\hat{x})x,\hat{x}-\bar{x}\rangle,$$

此结论与文献[11]中定理 3.1 中的结论相同。

(2) 当 $r=0$，u、v 不同时等于 0 时，高阶切集可退化为渐进二阶相依锥，定理 1 的结论与文献[14]中定理 4.1 的(ⅰ)的结论相同。

(3) 当 $r=1$ 时，高阶切集就退化为二阶相依集，有

$$D_1^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)=\bigcup_{x^*\in T^2(K,\bar{x},\omega)}[\langle F(\hat{x}),x-x^*\rangle+2\langle \nabla F(\hat{x})u,(u-\omega)\rangle]$$
$$+\langle \nabla^2F(\hat{x})(u,u),\hat{x}-\bar{x}\rangle+\langle \nabla F(\hat{x})x,\hat{x}-\bar{x}\rangle。$$

此结论与文献[13]中的定理 3.1 的结论相同。

下面给出一个例子来说明定理 1。

例 1　设 $K=\{x\in\mathbf{R}:-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$F(x)=x^2+1$，易知，对于任意 $x\in K$，

$$G(x)=\bigcup_{z\in K}\langle F(x),x-z\rangle=\bigcup_{z\in K}\langle x^2+1,x-z\rangle=[x^3-x^2+x-1,x^3+x^2+x+1]。$$

取 $\hat{x}=0$，$\bar{x}=1$，$(u,v)=(1,1)$，则 $\hat{y}=-1$。显然，$(\hat{x},\hat{y})\in\mathrm{graph}(G)$，$(u,v)\in T(\mathrm{graph}(G),(\hat{x},\hat{y}))$ 且 $\nabla F(\hat{x})=0$，满足定理 1 的条件。一方面，对于任意 $x\in\mathbf{R}$，

$$D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)=[x-2r,+\infty);\tag{6}$$

另一方面，直接计算可得 $\omega=0$，$T_r^{\mathrm{h}}(K,\bar{x},\omega)=\mathbf{R}^-$，从而对于任意 $x\in\mathbf{R}$，

$$\bigcup_{x^*\in T_r^{\mathrm{h}}(K,\bar{x},\omega)}[\langle F(\hat{x}),x-x^*\rangle+2r\langle \nabla F(\hat{x})u,(u-\omega)\rangle]=x+\mathbf{R}^+。\tag{7}$$

又由 $r\langle \nabla^2F(\hat{x})(u,u),\hat{x}-\bar{x}\rangle=-2r$，$\langle \nabla F(\hat{x})x,\hat{x}-\bar{x}\rangle=0$，因此对于任意 $x\in\mathbf{R}$，

$$\bigcup_{x^*\in T_r^{\mathrm{h}}(K,\bar{x},\omega)}[\langle F(\hat{x}),x-x^*\rangle+2r\langle \nabla F(\hat{x})u,(u-\omega)\rangle]$$
$$+r\langle \nabla^2F(\hat{x})(u,u),\hat{x}-\bar{x}\rangle+\langle \nabla F(\hat{x})x,\hat{x}-\bar{x}\rangle=[x-2r,+\infty)。\tag{8}$$

由式(6)、(7)、(8)可知，定理 1 的结果成立。

3　向量变分不等式与弱向量变分不等式间隙函数的可微性与灵敏性

本章将讨论向量变分不等式的间隙函数的可微性与灵敏性。首先回顾间隙函数的定义。

定义 5[9]

(ⅰ) 一个集值映射 $N:\mathbf{R}^n\to 2^{\mathbf{R}^m}$被称是向量变分不等式的间隙函数，如果满足：

(a) $0_{\mathbf{R}^m}\in N(\hat{x})$当且仅当 $\hat{x}$ 是向量变分不等式的解；

(b) $N(x)\cap(-C)=\{0_{\mathbf{R}^m}\}$。

(ⅱ) 一个集值映射 $W:\mathbf{R}^n\to 2^{\mathbf{R}^m}$被称是弱向量变分不等式的间隙函数，如果满足

(a) $0_{\mathbf{R}^m}\in W(\hat{x})$当且仅当 $\hat{x}$ 是弱向量变分不等式的解；

(b) $W(x)\cap(-\mathrm{int}\ C)=\varnothing$。

考虑 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 上的集值映射：

$$N(x):=\mathrm{Max}_C\langle F(x),x-K\rangle,$$
$$W(x):=\mathrm{Max}_{\mathrm{int}\ C}\langle F(x),x-K\rangle。$$

由文献[10]知，N 和 W 分别是向量变分不等式和弱向量变分不等式的间隙函数。

首先讨论 W 的高阶导数与 G 的高阶导数之间的关系。

定理 2　设 $\hat{x}\in K$，$\hat{y}\in W(\hat{x})$且$(u,v)\in T(\mathrm{graph}\ W,(\hat{x},\hat{y}))$，若

$$D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)=D_r^{\mathrm{hi}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x),$$

则对于任意 $x\in\mathrm{dom}\ D_r^{\mathrm{h}}W((\hat{x},\hat{y}),(u,v))$，有

$$D_r^{\mathrm{h}} W((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x) \subseteq \mathrm{Max}_{\mathrm{int}\,C} D_r^{\mathrm{h}} G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)。 \tag{9}$$

证明 设 $y \in D_r^{\mathrm{h}} W((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$, 如果 $y \notin \mathrm{Max}_{\mathrm{int}\,C} D_r^{\mathrm{h}} G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$, 那么存在 $\bar{y} \in D_r^{\mathrm{h}} G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$ 使得

$$\bar{y}-y \in \mathrm{int}\ C。 \tag{10}$$

由 $y \in D_r^{\mathrm{h}} W((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$, 存在序列 $t_n \to 0_+$, $s_n \to 0_+$, $\frac{s_n}{t_n} \to \frac{1}{2r}$, 及 $(x_n, y_n) \to (x, y)$ 使得

$$\hat{y}+t_n v+t_n s_n y_n \in W(\hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n)。 \tag{11}$$

由于 $\bar{y} \in D_r^{\mathrm{h}} G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$ 且 $D_r^{\mathrm{h}} G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x) = D_r^{\mathrm{hi}} G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$, 对上述序列 t_n、s_n 存在序列 $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \to (x, \bar{y})$ 使得 $\hat{y}+t_n v+t_n s_n \bar{y}_n \in G(\hat{x}+t_n u+t_n s_n \bar{x}_n)$,因此,存在$x_n' \in K$ 使得

$$\hat{y}+t_n v+t_n s_n \bar{y}_n = \langle F(\hat{x}+t_n u+t_n s_n \bar{x}_n), \hat{x}+t_n u+t_n s_n \bar{x}_n - x_n' \rangle。 \tag{12}$$

由于 F 二阶连续 Fréchet 可微,因此可得 F 在 $\hat{x}$ 的 Taylor 展开式为

$$\begin{aligned} F(\hat{x}+t_n u+t_n s_n \bar{x}_n) &= F(\hat{x}) + t_n \nabla F(\hat{x}) u + t_n s_n \nabla F(\hat{x}) \bar{x}_n \\ &+ \frac{1}{2} t_n^2 \nabla^2 F(\hat{x})(u+s_n \bar{x}_n, u+s_n \bar{x}_n) + o(\| t_n \hat{u}+t_n s_n \bar{x}_n \|)^2。 \end{aligned} \tag{13}$$

由于 $\{x_n\}$ 和 $\{\bar{x}_n\}$ 是 2 个收敛的序列,因此

$$\frac{o(\| t_n u+t_n s_n x_n \|)^2}{t_n s_n} \to 0_{\mathbf{R}^n} \text{且} \frac{o(\| t_n u+t_n s_n \bar{x}_n \|)^2}{t_n s_n} \to 0_{\mathbf{R}^n},$$

从而

$$\frac{[o(\| t_n u+t_n s_n \bar{x}_n \|)^2 - o(\| t_n u+t_n s_n x_n \|)^2]}{t_n s_n} \to 0_{\mathbf{R}^n}。$$

用 $o(t_n s_n)$ 简记 $o(\| t_n u+t_n s_n \bar{x}_n \|)^2 - o(\| t_n u+t_n s_n x_n \|)^2$。根据式(3)、(13), 可以推导出

$$\begin{aligned} \hat{y}+t_n v+t_n s_n \bar{y}_n &= \langle F(\hat{x}+t_n u+t_n s_n \bar{x}_n), \hat{x}+t_n u+t_n s_n \bar{x}_n - x_n' \rangle \\ &= \langle F(\hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n), \hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n - x_n' \rangle \\ &\quad + t_n s_n \langle F(\hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n), (\bar{x}_n - x_n) \rangle \\ &\quad + t_n s_n \langle \nabla F(\hat{x})(\bar{x}_n - x_n), \hat{x}+t_n u+t_n s_n \bar{x}_n - x_n' \rangle \\ &\quad + t_n^2 s_n \langle \nabla^2 F(\hat{x})(u, \bar{x}_n - x_n), \hat{x}+t_n u+t_n s_n \bar{x}_n - x_n' \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} t_n^2 s_n^2 \langle \nabla^2 F(\hat{x})((\bar{x}_n, \bar{x}_n) - (x_n, x_n)), \hat{x}+t_n u+t_n s_n \bar{x}_n - x_n' \rangle \\ &\quad + \langle o(t_n s_n), \hat{x}+t_n u+t_n s_n \bar{x}_n - x_n' \rangle。 \end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned} \alpha(n) = &\langle F(\hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n), (\bar{x}_n - x_n) \rangle \\ &+ \langle \nabla F(\hat{x})(\bar{x}_n - x_n), \hat{x}+t_n u+t_n s_n \bar{x}_n - x_n' \rangle \\ &+ t_n \langle \nabla^2 F(\hat{x})(u, \bar{x}_n - x_n), \hat{x}+t_n u+t_n s_n \bar{x}_n - x_n' \rangle \\ &+ \frac{1}{2} t_n s_n \langle \nabla^2 F(\hat{x})((\bar{x}_n, \bar{x}_n) - (x_n, x_n)), \hat{x}+t_n u+t_n s_n \bar{x}_n - x_n' \rangle \\ &+ \left\langle \frac{o(t_n s_n)}{t_n s_n}, \hat{x}+t_n u+t_n s_n \bar{x}_n - x_n' \right\rangle, \end{aligned} \tag{14}$$

由于 $\bar{x}_n - x_n \to 0_{\mathbf{R}^n}$ 并且 $\frac{o(t_n s_n)}{t_n s_n} \to 0_{\mathbf{R}^n}$,因此 $\alpha(n) \to 0_{\mathbf{R}^m}$。根据式(12)、(14), 得到

$$\begin{aligned} \hat{y}+t_n v+t_n s_n [\bar{y}_n - \alpha(n)] &= \langle F(\hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n), \hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n - x_n' \rangle \\ &\in G(\hat{x}+t_n u+t_n s_n x_n)。 \end{aligned}$$

由 W 的定义和式(11),可得

$$[\hat{y}+t_n v+t_n s_n(\bar{y}_n - \alpha(n))] - [\hat{y}+t_n v+t_n s_n y_n] \notin \mathrm{int}\ C, \text{ i.e.}, \ \bar{y}_n - \alpha(n) - y_n \notin \mathrm{int}\ C,$$

即, $\bar{y}-y \notin \mathrm{int}\ C$,与式(10)相矛盾,故式(9)式成立。

由上述定理, 可以得到 N 的高阶导数与 G 的高阶导数之间的关系。

定理 3　设 $\hat{x}\in K$, $\hat{y}\in N(\hat{x})$, 对于 $x\in \mathrm{dom}\ D_r^{\mathrm{h}}N((\hat{x},\hat{y}),(u,v))$, 有

$$D_r^{\mathrm{h}}N((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)\subseteq \mathrm{Max}_{\mathrm{int}\,C}D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)。$$

证明　由于 $N\subseteq W$,

$$D_r^{\mathrm{h}}N((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)\subseteq D_r^{\mathrm{h}}W((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x),$$

因此,根据定理 2,定理 3 得证。

下面讨论 $G-C$ 的高阶导数与 G 的高阶导数之间的关系。在此之前, 先回顾锥上有界的定义。

定义 6[17]　如果存在一个点 $a\in \mathbf{R}^m$ 使得 $D\subset a-C$, 则称 D 为 C 上有界的。

定理 4　设 $\hat{x}\in K$, $\hat{y}\in G(\hat{x})$ 且 $(u,v)\in T(\mathrm{graph}\ G, (\hat{x},\hat{y}))$, C 是序列正则锥, 如果 $D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$ 是 C 上有界的, 那么对任意的 $x\in \mathrm{dom}\ D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))$,

$$D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)=D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)-C, \tag{15}$$

其中 $(G-C)(x)=G(x)-C$。

证明　先证 $D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)-C\subseteq D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$。设 $z\in D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$, 由高阶导数定义知,存在序列 $t_n\to 0_+$, $s_n\to 0_+$, $\dfrac{s_n}{t_n}\to\dfrac{1}{2r}$ 和 $(x_n,z_n)\to(x,z)$ 使得

$$\hat{z}+t_nv+t_ns_nz_n\in G(\hat{x}+t_nu+t_ns_nx_n)。$$

对任意 $d\in C$, 设 $\bar{z}_n=z_n-d$, 则有 $\bar{z}_n\to z-d$ 及

$$\hat{z}+t_nv+t_ns_n\bar{z}_n=\hat{z}+t_nv+t_ns_nz_n-t_ns_nd\in G(\hat{x}+t_nu+t_ns_nx_n)-C,$$

因此

$$z-d\in D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x),$$

故

$$D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)-C\subseteq D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)。$$

下面说明

$$D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)\subseteq D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)-C。$$

由于 $D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$ 是闭的, 且是 C 上有界的,因此根据文献[17]中的定理 2.1,可得

$$D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)\subseteq \mathrm{Max}\ D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)-C。$$

只须证

$$\mathrm{Max}\ D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)\subseteq D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x), \tag{16}$$

当 $\mathrm{Max}\ D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)=\varnothing$ 时, 式(16)显然成立。假设

$$y\in \mathrm{Max}\ D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x), \tag{17}$$

由高阶导数的定义, 存在序列 $t_n\to 0_+$, $s_n\to 0_+$, $\dfrac{s_n}{t_n}\to\dfrac{1}{2r}$, $\{d_n\}\subseteq C$, $(x_n,y_n)\to(x,y)$ 使得

$$\hat{y}+t_nv+t_ns_n(y_n+d_n)\in G(\hat{x}+t_nu+t_ns_nx_n)。\tag{18}$$

由于 C 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点闭凸锥,因此 C 有一个紧基, 设为 Q, 则存在 $\alpha_n>0$ 且 $b_n\in Q$, 使得 $d_n=\alpha_nb_n$。由于 Q 是一个紧基,因此,不失一般性,假设 $b_n\to b\in Q$,说明 $\alpha_n\to 0$。若 $\alpha_n\nrightarrow 0$, 则存在 $\varepsilon>0$, 不失一般性, 设 $\alpha_n\geqslant\varepsilon$, 记 $\bar{d}_n=\left(\dfrac{\varepsilon}{\alpha_n}\right)d_n\in C$, 则

$$\hat{y}+t_nv+t_ns_n(y_n+\bar{d}_n)\in G(\hat{x}+t_nu+t_ns_nx_n)-C。\tag{19}$$

由于 $\bar{d}_n=\left(\dfrac{\varepsilon}{\alpha_n}\right)d_n=\varepsilon b_n$, $\bar{d}_n\to\varepsilon b\neq 0$, 因此 $y_n+\bar{d}_n\to y+\varepsilon b$。由式(19),得

$$y+\varepsilon b\in D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x),$$

与式(17)矛盾,因此 $\alpha_n\to 0$ 且 $y_n+d_n\to y$。由式(18),得 $y\in D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$,因此

$$D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)\subseteq \mathrm{Max}\ D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)-C$$

$$\subseteq D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)-C$$
$$\subseteq D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)。$$

证毕。

下面讨论 Max G 与 Max$(G-C)$的高阶导数之间的关系。

定理 5 设 $\hat{y}$ 是 $G(\hat{x})$ 的一个最大值点, $D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$ 是 C 上有界的, 对于 $x\in \mathrm{dom}(D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v)))$,有

$$\mathrm{Max}_C D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)=\mathrm{Max}_C D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)。$$

证明 从定理 4 可以看出

$$D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)=D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)-C,$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Max}_C D_r^{\mathrm{h}}(G-C)((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)&=\mathrm{Max}_C(D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)-C)\\&=\mathrm{Max}_C D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)。\end{aligned}$$

证毕。

注 2 对任意的集值映射 G, 定理 4、5 均成立。

结合以上的定理, 研究 $G-C$ 和 $N-C$ 的高阶导数的关系, 再通过定理 4 分析 $N-C$ 与 N 的高阶导数之间的关系, 最后就得出 N 和 W 的高阶导数与 G 的高阶导数之间的关系。

定理 6 设 $\hat{x},\bar{x}\in K$, $\hat{y}=\langle F(\hat{x}),\hat{x}-\bar{x}\rangle\in G(\hat{x})$, $(u,v)\in T(\mathrm{graph}(G),(\hat{x},\hat{y}))$, $r\in[0,\infty)$, 如果以下条件均满足:

(ⅰ) $\hat{y}$ 是 $G(\hat{x})$的一个弱最大值点;

(ⅱ) 存在一个非空的闭凸序列正则锥 $\tilde{C}$ 使得 $\tilde{C}\setminus\{0_{\mathbf{R}^m}\}\subset \mathrm{int}\ C$;

(ⅲ) $\lim_{\|z\|\to\infty,z\in\mathbf{R}^n}\|\langle F(\hat{x},z)\rangle\|=\infty$;

(ⅳ) $D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)=D_r^{\mathrm{hi}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$;

(ⅴ) $D_r^{\mathrm{h}}(G-\tilde{C})((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$是 $\tilde{C}$ 上有界的,

那么, 对于任意 $x\in\mathrm{dom}\ D_r^{\mathrm{h}}N((\hat{x},\hat{y}),(u,v))$,

$$\begin{aligned}D_r^{\mathrm{h}}N((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)=D_r^{\mathrm{h}}W((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)&=\mathrm{Max}_{\mathrm{int}\ C}D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)\\&=\langle\nabla F(\hat{x})x,\hat{x}-\bar{x}\rangle+r\langle\nabla^2F(\hat{x})(u,u),\hat{x}-\bar{x}\rangle\\&\quad+\mathrm{Max}_{\mathrm{int}\ C}\bigcup_{x^*\in T_r^{\flat}(K,\bar{x},\omega)}[\langle F(\hat{x}),x-x^*\rangle+2r\langle\nabla F(\hat{x})u,(u-\omega)\rangle],\end{aligned}$$

其中 $\omega\in T(K,\bar{x})$满足 $\langle F(\hat{x}),\omega\rangle=-v+\langle F(\hat{x}),u\rangle+\langle\nabla F(\hat{x})u,\hat{x}-\bar{x}\rangle$。

证明 由于 $N(x)\subseteq W(x)$,因此,根据定理 2, 只须要证

$$\mathrm{Max}_{\mathrm{int}\ C}D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)\subseteq D_r^{\mathrm{h}}N((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)。$$

由于 K 是一个紧集,因此 $G(x)$对任意 $x\in K$ 来说也是一个紧集。通过文献[23]中的引理 2.3 和文献[24]中的引理 2.4 可知,$G(x)-\tilde{C}=N(x)-\tilde{C}$。另外, 由 $N-C\subseteq G-C$ 及条件(ⅴ)可得,$D_r^{\mathrm{h}}(N-\tilde{C})((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)$是 $\tilde{C}$ 上有界的,因此,由定理 5,可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Max}_{\tilde{C}}D_r^{\mathrm{h}}N((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)&=\mathrm{Max}_{\tilde{C}}D_r^{\mathrm{h}}(N-\tilde{C})((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)\\&=\mathrm{Max}_{\tilde{C}}D_r^{\mathrm{h}}(G-\tilde{C})((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)\\&=\mathrm{Max}_{\tilde{C}}D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)。\end{aligned}$$

由于 $\tilde{C}\setminus\{0_{\mathbf{R}^m}\}\subset\mathrm{int}\ C$,

$$\mathrm{Max}_{\mathrm{int}\ C}D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)\subseteq\mathrm{Max}_{\tilde{C}}D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x),$$

因此,

$$\mathrm{Max}_{\mathrm{int}\ C}D_r^{\mathrm{h}}G((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)\subseteq\mathrm{Max}_{\tilde{C}}D_r^{\mathrm{h}}N((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)\subseteq D_r^{\mathrm{h}}N((\hat{x},\hat{y}),(u,v))(x)。$$

结果成立。

参考文献:

[1] GIANNESSI F. Theorems of alternative, quadratic programs and complementarity problems[J]. Variational Inequalities and Complementarity Problems, 1980, 1:151-186.

[2] CHEN Guangya. Existence of solutions for a vector variational inequality: an extension of the Hartmann−Stampacchia theorem [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1992, 74(3):445-456.

[3] DANIILIDIS A, HSDJISAVVAS N. Existence theorems for vector variational inequalities[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1996, 54(3):473-481.

[4] LEE G M, KIM D S, LEE B S, et al. Vector variational inequality as a tool for studying vector optimization problems[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications, 1998, 34(5):745-765.

[5] DANIELE P, MAUGERI A. Vector variational inequalities and modelling of a continuum traffic equilibrium problem[J]. Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria, 2000.

[6] HUANG Xuexiang, YANG Xiaoqi. Further study on the Levitin−Polyak well-posedness of constrained convex vector optimization problems [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2012, 75(3):1341-1347.

[7] AHMAD M, VERMA R U. Existence solutions to mixed vector variational-type inequalities[J]. Advances in Nonlinear Variational Inequalities, 2013, 16(1):115-123.

[8] XUE Xiaowei, LIAO Chunmei, LI Minghua, et al. Coderivatives and Aubin properties of solution mappings for parametric vector variational inequality problems[J]. Journal of Nonlinear and Variational Analysis, 2022, 6(2):125-137.

[9] AUSLENDER A. Optimisation: Mdthodes Numdriques[M]. Paris: Masson, 1976.

[10] CHEN G Y, GOH C J, YANG X Q. On gap functions for vector variational inequalities[M]// GIANNESS F. Vector Variational Inequality and Vector Equilibria. Mathematical Theories, Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000:55-70.

[11] LI Shengjie, YAN Hong, CHEN Guangya. Differential and sensitivity properties of gap functions for vector variational inequalities[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2003, 57:377-391.

[12] MENG Kaiwen, LI Shengjie. Differential and sensitivity properties of gap functions for Minty vector variational inequalities [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 337(1):386-398.

[13] LI Minghua, LI Shengjie. Second-order differential and sensitivity properties of weak vector variational inequalities[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2010, 144:76-87.

[14] LI Shengjie, ZHAI Jia. Second-order asymptotic differential properties and optimality conditions for weak vector variational inequalities[J]. Optimization Letters, 2012, 6(3):503-523.

[15] PENOT J P. Higher-order optimality conditions and higher-order tangent sets[J]. SIAM Journal on Optimization, 2017, 27(4):2508-2527.

[16] KHAI T T, ANH N L H, GIANG N M T. Higher-order tangent epiderivatives and applications to duality in set-valued optimization[J]. Positivity, 2021, 25(5):1699-1720.

[17] PENOT J P. Second-order conditions for optimization problems with constraints[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1998, 37(1):303-318.

[18] LEDZEWICZ U, SCHATTLER H. High-order approximations and generalized necessary conditions for optimality[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1998, 37(1):33-53.

[19] KHANH P Q, TUNG N M. Higher-order Karush−Kuhn−Tucker conditions in nonsmooth optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2018, 28(1):820-848.

[20] KHANH P Q, TUAN N D. Higher-order variational sets and higher-order optimality conditions for proper efficiency in set-valued nonsmooth vector optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2008, 139(2):243-261.

[21] BONNANS J F, SHAPIRO A. Perturbation analysis of optimization problem[M]. New York: Springer, 2000.

[22] TANINO T, SAWARAGI Y. Conjugate maps and duality in multiobjective optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1980, 31:473-499.

[23] LI S J, CHEN G Y, LEE G M. Minimax theorems for set-valued mappings[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, 106(1):183-200.

[24] TANAKA T. Some minimax problems of vector-valued functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1988, 59:505-524.

(编辑:陈丽萍)