

1-退化图的乘积图的线性荫度

刘兆志, 买吐肉孜·买司地克*

(新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 由因子图的退化度来刻画乘积图的退化度, 再结合关于退化图线性荫度的结论, 给出笛卡尔积图和部分直积图、强积图满足线性荫度猜想的退化度条件。证明 2 个 1-退化图字典积图满足线性荫度猜想, 并给出其在大部分情况下的线性荫度。

关键词: 线性荫度猜想; 退化图; 笛卡尔积; 直积; 字典积

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A

引用格式: 刘兆志, 买吐肉孜·买司地克. 1-退化图的乘积图的线性荫度[J]. 山东大学学报(理学版), 2025, 60(2): 51-62.

Linear arboricity of product graphs of 1-degenerate graphs

LIU Zhaozhi, Metrose Metsidik*

(School of Mathematical Science, Xinjiang Normal University, Urumqi 830017, Xinjiang, China)

Abstract: In this paper, we describe the degeneracy of the product graphs by the degeneracy of their factor graphs, combined with conclusions on the linear arboricity of degeneracy graphs, and give the degeneracy conditions for Cartesian product graphs, some direct product graphs and strong product graphs to satisfy the linear arboricity conjecture. Then we prove that the lexicographic product graph of two 1-degenerate graphs satisfies the linear arboricity conjecture and determine its linear arboricity in most cases.

Key words: linear arboricity conjecture; degenerate graph; Cartesian product; direct product; lexicographic product

0 引言

如无特殊说明, 本文中的图是非平凡、简单、有限、无向图, 每个乘积图是非空图。将以路作为分支的图称为线性森林, 记作 F_L 。设 G 是一个图, 其顶点集、边集、最大度、最小度分别记为 $V(G)$ 、 $E(G)$ 、 $\Delta(G)$ 、 $\delta(G)$, G 中顶点 u 的度记为 $\deg_G(u)$, 将 $E(G)$ 划分成 F_L 的最小数称为图 G 的线性荫度, 记作 $la(G)$, 此概念由 Harary^[1] 最先提出。显然对图 $G = \bigcup_{i=1}^k G_i$ 有 $la(G) \leq \sum_{i=1}^k la(G_i)$ 成立。由于图 G 中最大度顶点在 F_L 中的度至多为 2, 因此至少需要 $\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$ 个 F_L 才能覆盖整个图, 则对任意图 G 有 $la(G) \geq \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$ 。而在偶度正则图 G 中 $la(G) \geq \lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \rceil$, 由于 2 正则图的线性荫度是 2, 此下界是最优的, 因此本文涉及线性荫度的证明中只考虑上界。Akiyama 等^[2] 提出被称为线性荫度猜想 (linear arboricity conjecture, LAC) 的猜想并断言其上界是紧的, 而 LAC 也表明每个图 G 都有 $\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil la(G) \leq \lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \rceil$ 成立。

收稿日期: 2023-03-15; 网络出版时间: 2024-05-22 09:06:50

基金项目: 新疆少数民族科技人才特殊培养计划科研项目(2022D03002); 国家自然科学基金资助项目(11961070)

第一作者: 刘兆志(1997—), 男, 硕士研究生, 研究方向为图论与组合数学。E-mail: 1739391400@qq.com

* 通信作者: 买吐肉孜·买司地克(1979—), 男, 副教授, 博士, 研究方向为组合图论。E-mail: metrose@xjnu.edu.cn

猜想 1 (LAC) 对每个图 G , $la(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil$ 。

以正则图 G 的最大度 $\Delta(G)$ 为分类条件, Akiyama 等^[2-3]证实 $\Delta(G) = 3, 4$ 时, Enomoto 等^[4]证实 $\Delta(G) = 5, 6, 8$ 时, Guldán^[5]证实 $\Delta(G) = 10$ 时, 有 $la(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil$ 。在其他分类条件下有诸多进展, 例如吴建良等^[6-7]证实 LAC 对平面图成立。

1 退化图的笛卡尔积图

设 G 是一个图, 对任一非负整数 k , 如果 G 的每一个导出子图 H 满足 $\delta(H) \leq k$, 则 G 被称为 k -退化图。此说法等价于: 设 $|V(G)| = m$ 的图 G 顶点度序列为 $\delta(G) = \deg(u_1) \leq \deg(u_2) \leq \dots \leq \deg(u_m) = \Delta(G)$, G 是 k -退化图当且仅当在图 G 中删除 $\deg_G(u_i) \leq k$ 的所有顶点 u_i 得到的图 G' 是 k -退化图^[8]。容易发现, 0-退化图是空图, 1-退化图是森林, 外平面图是 2-退化图, 平面图是 5-退化图。退化图有如下性质。

性质 1^[8]

- (1) 设 G 是 k -退化图, 对 $\forall p \geq k$, G 也是 p -退化图。
- (2) 每个图 G 都存在非负整数 k 使得 G 是 k -退化图, 且 $k \leq \Delta(G)$ 。
- (3) 图 G 是 k -退化图当且仅当 G 的每个分支是 k -退化图。
- (4) 图 G 是 k -退化图, 则 G 的每个子图也是 k -退化图。

Kainen^[9]证明了图 G 是 k -退化图时 $la(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)+k-1}{2} \right\rceil$, 表明 LAC 对 2-退化图成立。Basavaraju

等^[10]证实 LAC 对 3-退化图成立, 也证明了当 G 是 2-退化图时, 如果 $\Delta(G) \geq 5$, 则 $la(G) = \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$ 。Chen

等^[11]证明 LAC 对满足 $\Delta(G) \geq 2k^2 - 2k$ 的 k -退化图 G 成立, 并且当 $\Delta(G) \geq 2k^2 - k$ 时, $la(G) = \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$ 。

Wdowinski^[12]证明 LAC 对满足 $\Delta(G) \geq 4k - 2$ 的 k -退化图 G 成立。

引理 1 LAC 对 $\Delta(G) \geq 4k - 2$ 的 k -退化图 G 成立^[12], 特别地, $\Delta(G) \geq 2k^2 - k$ 时, $la(G) = \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$ ^[11]。

图 G 和图 H 的笛卡尔积图^[13]记为 $G \square H$, $V(G \square H) = \{(u, v) \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$, $E(G \square H) = \{(u, v), (u', v') \mid uu' \in E(G) \text{ 且 } v = v' \in V(H) \text{ 或 } u = u' \in V(G) \text{ 且 } vv' \in E(H)\}$, 则对 $\forall (u, v) \in V(G \square H)$, 有 $\deg_{G \square H}(u, v) = \deg_G(u) + \deg_H(v)$ 。

图 G 和图 H 的直积图^[13]记为 $G \times H$, $V(G \times H) = \{(u, v) \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$, $E(G \times H) = \{(u, v), (u', v') \mid uu' \in E(G), vv' \in E(H)\}$, 则对 $\forall (u, v) \in V(G \times H)$, 有 $\deg_{G \times H}(u, v) = \deg_G(u) \cdot \deg_H(v)$ 。

图 G 和图 H 的强积图^[13]记为 $G \boxtimes H$, $V(G \boxtimes H) = \{(u, v) \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$, $E(G \boxtimes H) = E(G \square H) \cup E(G \times H)$, 则对 $\forall (u, v) \in V(G \boxtimes H)$, 有 $\deg_{G \boxtimes H}(u, v) = \deg_G(u) + \deg_H(v) + \deg_G(u) \cdot \deg_H(v)$ 。

从定义易知笛卡尔积、直积、强积都满足交换律、结合律、分配律。

令 V_G^0 表示图 $G = G^0$ 中度小于等于 k 的顶点的集合, $|V(G)| = m$, $|V(H)| = n$, 构建迭代过程: $G^i = G^{i-1} - V_G^{i-1}$, 其中 V_G^{i-1} 表示图 G^{i-1} 中度小于等于 k 的顶点的集合, $1 \leq i \leq m - |V_G^0|$ 。当图 G^{s+1} ($1 \leq s \leq m - |V_G^0|$) 是空图时迭代过程结束, 即说明图 G 是 k -退化图, 而迭代过程得以继续进行的条件是 $|V_G^{i-1}| \geq 1$ 。下面利用此方法证明图 $G \square H$ 是 $(k+h)$ -退化图。

设 k -退化图 G 总共进行 s ($0 \leq s \leq m - |V_G^0|$) 次迭代的顶点集依次为 $V_G^0, V_G^1, \dots, V_G^s$, h -退化图 H 总共进行 t ($0 \leq t \leq n - |V_H^0|$) 次迭代的顶点集依次为 $V_H^0, V_H^1, \dots, V_H^t$ 。不妨设 $s \geq t$, 令

$$V_{G \square H}^l = \begin{cases} \bigcup_{j=0}^l (V_G^j V_H^j \cup V_G^j V_H^l), & l \leq t, \\ \bigcup_{j=0}^l (V_G^j V_H^j), & l > t, \end{cases}$$

其中 $0 \leq l \leq s$, 集合 $V_G^l V_H^j = \{(u, v) \mid u \in V_G^l, v \in V_H^j\}$, 容易验证 $|V_{G \square H}^l| \geq 1$, 并且 $\bigcup_{l=0}^s V_{G \square H}^l = V(G \square H)$, 因此图 $(G \square H)^{s+1}$ 是空图, 即图 $G \square H$ 是 $(k+h)$ -退化图, 因此有定理 1 及其推论。

定理 1 k -退化图 G 和 h -退化图 H 的笛卡尔积图 $G \square H$ 是 $(k+h)$ -退化图。

推论 1 设图 $G_i (1 \leq i \leq k, k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2)$ 是 g_i -退化图, 则图 $\square_{i=1}^k G_i$ 是 $(\sum_{i=1}^k g_i)$ -退化图。

结合定理 1 对 k 进行归纳假设容易得出推论 1, 由于过程较为简单, 因此证明细节不再详写。将定理 1 和推论 1 的结果分别代入引理 1 可得定理 2 和推论 2。

定理 2 设 k -退化图 G 和 h -退化图 H 的笛卡尔积图 $G \square H$ 非空, 如果 $\Delta(G \square H) \geq 4(k+h)-2$, 则 LAC 对图 $G \square H$ 成立。特别地, $\Delta(G \square H) \geq 2(k+h)^2 - (k+h)$ 时, $la(G \square H) = \left\lceil \frac{\Delta(G \square H)}{2} \right\rceil$ 。

推论 2 设图 $G_i (1 \leq i \leq k, k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2)$ 是 g_i -退化图且图 $\square_{i=1}^k G_i$ 非空, 如果 $\Delta(\square_{i=1}^k G_i) \geq 4(\sum_{i=1}^k g_i) - 2$, 则 LAC 对图 $\square_{i=1}^k G_i$ 成立。特别地, $\Delta(\square_{i=1}^k G_i) \geq 2(\sum_{i=1}^k g_i)^2 - (\sum_{i=1}^k g_i)$ 时, $la(\square_{i=1}^k G_i) = \left\lceil \frac{\Delta(\square_{i=1}^k G_i)}{2} \right\rceil$ 。

利用上述构建迭代过程的方法下面证明图 $G \times H$ 是 $\min\{k\Delta(H), h\Delta(G)\}$ -退化图。

设 k -退化图 G 总共进行 $s (0 \leq s \leq m - |V_G^0|)$ 次迭代的顶点集依次为 $V_G^0, V_G^1, \dots, V_G^s$, h -退化图 H 总共进行 $t (0 \leq t \leq n - |V_H^0|)$ 次迭代的顶点集依次为 $V_H^0, V_H^1, \dots, V_H^t$ 。由直积图顶点度与各因子图顶点度之间的关系, 可令 $0 \leq i \leq s, V_{G \times H}^i = V_G^i V(H) = \{(u, v) \mid u \in V_G^i, v \in V(H)\}$, 因此在图 $(G \times H)^i$ 中 $\Delta(V_{G \times H}^i) \leq k\Delta(H)$, 即图 $G \times H$ 是 $k\Delta(H)$ -退化图。同理, 图 $G \times H$ 是 $h\Delta(G)$ -退化图, 因此图 $G \times H$ 是 $\min\{k\Delta(H), h\Delta(G)\}$ -退化图。

定理 3 k -退化图 G 和 h -退化图 H 的直积图 $G \times H$ 是 $\min\{k\Delta(H), h\Delta(G)\}$ -退化图。

定理 4 设 k -退化图 G 和 h -退化图 H 的直积图 $G \times H$ 非空, 如果 $\Delta(G \times H) \geq 4(\min\{k\Delta(H), h\Delta(G)\}) - 2$, 则 LAC 对图 $G \times H$ 成立。特别地, $\Delta(G \times H) \geq 2(\min\{k\Delta(H), h\Delta(G)\})^2 - (\min\{k\Delta(H), h\Delta(G)\})$ 时, $la(G \times H) = \left\lceil \frac{\Delta(G \times H)}{2} \right\rceil$ 。

将定理 3 证明过程中的 $k\Delta(H), h\Delta(G)$ 分别替换为 $(k+1)\Delta(H)+k, (h+1)\Delta(G)+h$ 即可得到以下结论。

定理 5 k -退化图 G 和 h -退化图 H 的强积图 $G \boxtimes H$ 是 $\min\{(k+1)\Delta(H)+k, (h+1)\Delta(G)+h\}$ -退化图。

定理 6 设 k -退化图 G 和 h -退化图 H 的强积图 $G \boxtimes H$ 非空, 如果 $\Delta(G \boxtimes H) \geq 4(\min\{(k+1)\Delta(H)+k, (h+1)\Delta(G)+h\}) - 2$, 则 LAC 对图 $G \boxtimes H$ 成立。特别地, $\Delta(G \boxtimes H) \geq 2(\min\{(k+1)\Delta(H)+k, (h+1)\Delta(G)+h\})^2 - (\min\{(k+1)\Delta(H)+k, (h+1)\Delta(G)+h\})$ 时, $la(G \boxtimes H) = \left\lceil \frac{\Delta(G \boxtimes H)}{2} \right\rceil$ 。

2 1-退化图笛卡尔积图、直积图和强积图的线性荫度

结合性质 1 与笛卡尔积图、直积图和强积图的定义, 计算森林 F' 和 F'' 在此 3 种乘积图下的线性荫度时, 只需计算 F' 和 F'' 的最大度顶点所在的任一分支之间乘积图的线性荫度。设集合 $C(G)$ 表示图 G 中所有分支, 设 $T_m \in C(F'), T_n \in C(F'')$ 满足 $\Delta(T_m) = \Delta(F'), \Delta(T_n) = \Delta(F'')$, 其中 T_m, T_n 分别表示 m 个顶点的树与 n 个顶点的树, 则 $la(F' \square F'') = la(T_m \square T_n), la(F' \times F'') = la(T_m \times T_n), la(F' \boxtimes F'') = la(T_m \boxtimes T_n)$ 。令 P_n 表示 n 个顶点的路, N_n 表示 n 个顶点的空图, K_n 表示 n 个顶点的完全图, $K_{n,n}$ 表示 $2n$ 个顶点的均衡完全二部图。

引理 2^[10] 如果 2-退化图 G 满足 $\Delta(G) \geq 5$, 则 $la(G) = \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$ 。

引理 3^[14] 路 P_m 与树 T_n 笛卡尔积图线性荫度

$$\text{la}(P_m \square T_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{\Delta(P_m \square T_n) + 1}{2} \right\rceil, & P_m = T_n = P_2; \\ \left\lceil \frac{\Delta(P_m \square T_n)}{2} \right\rceil, & \text{其他。} \end{cases}$$

由定理1可知,图 $T_m \square T_n$ 是2-退化图,再结合引理2、3可以总结出以下定理。

定理7 森林 F' 和 F'' 的笛卡尔积图线性荫度

$$\text{la}(F' \square F'') = \begin{cases} \left\lceil \frac{\Delta(F' \square F'') + 1}{2} \right\rceil, & \Delta(F') = \Delta(F'') = 1; \\ \left\lceil \frac{\Delta(F' \square F'')}{2} \right\rceil, & \text{其他。} \end{cases}$$

引理4^[2] 树 T 的线性荫度 $\text{la}(T) = \left\lceil \frac{\Delta(T)}{2} \right\rceil$ 。

引理5^[14] 路 P_m 与树 T_n 直积图线性荫度 $\text{la}(P_m \times T_n) = \left\lceil \frac{\Delta(P_m \times T_n)}{2} \right\rceil$ 。

下面计算树 T_m 与树 T_n 直积图线性荫度,其中 $\Delta(T_m) \geq 3, \Delta(T_n) \geq 3$,显然 $m, n \geq 4$ 。

由引理4可设树 T_m 的线性森林为 $F_L^i (1 \leq i \leq \left\lceil \frac{\Delta(T_m)}{2} \right\rceil)$, 因为

$$T_m \times T_n = \left(\bigcup_{i=1}^{\left\lceil \frac{\Delta(T_m)}{2} \right\rceil} F_L^i \right) \times T_n = \bigcup_{i=1}^{\left\lceil \frac{\Delta(T_m)}{2} \right\rceil} (F_L^i \times T_n) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\left\lceil \frac{\Delta(T_m)}{2} \right\rceil} (P_m \times T_n),$$

所以由引理5有

$$\left\lceil \frac{\Delta(T_m)\Delta(T_n)}{2} \right\rceil \leq \text{la}(T_m \times T_n) \leq \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{\Delta(T_m)}{2} \right\rceil} \leq \text{la}(P_m \times T_n) = \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{\Delta(T_m)}{2} \right\rceil} \Delta(T_n) = \left\lceil \frac{\Delta(T_m)}{2} \right\rceil \Delta(T_n)。$$

易知上式等号只在 $\Delta(T_m) \equiv 1 \pmod{2}$ 且 $\Delta(T_n) \equiv 1 \pmod{2}$ 时不成立,下面计算此条件下的线性荫度。

在树 T_m 中每个最大度顶点处只选择一条边,所有选择的边的顶点不交,除非边的2个端点都是最大度顶点(这是容易做到的),记这些边的集合为 F_L^1 ,则图 $T_m - F_L^1$ 是最大度为偶数的森林,则 $\text{la}(T_m - F_L^1) = \frac{\Delta(T_m) - 1}{2}$ 。设其线性森林为 $F_L^i (2 \leq i \leq \frac{\Delta(T_m) + 1}{2})$,则树 T_m 的线性森林为 $F_L^i (1 \leq i \leq \frac{\Delta(T_m) + 1}{2})$ 。因为

$$\begin{aligned} T_m \times T_n &= ((T_m - F_L^1) \cup F_L^1) \times T_n = ((T_m - F_L^1) \times T_n) \cup (F_L^1 \times T_n) \\ &= \left(\left(\bigcup_{i=2}^{\frac{\Delta(T_m)+1}{2}} F_L^i \right) \times T_n \right) \cup (F_L^1 \times T_n) = \bigcup_{i=2}^{\frac{\Delta(T_m)+1}{2}} (F_L^i \times T_n) \cup (F_L^1 \times T_n), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{la}(T_m \times T_n) &\leq \sum_{i=2}^{\frac{\Delta(T_m)+1}{2}} \text{la}(F_L^i \times T_n) + \text{la}(P_2 \times T_n) \leq \sum_{i=2}^{\frac{\Delta(T_m)+1}{2}} \text{la}(P_m \times T_n) + \text{la}(P_2 \times T_n) \\ &= \frac{(\Delta(T_m) - 1)\Delta(T_n)}{2} + \frac{\Delta(T_n) + 1}{2} = \frac{\Delta(T_m)\Delta(T_n) + 1}{2} = \left\lceil \frac{\Delta(T_m)\Delta(T_n)}{2} \right\rceil。 \end{aligned}$$

定理8 森林 F' 和 F'' 的直积图线性荫度 $\text{la}(F' \times F'') = \left\lceil \frac{\Delta(F' \times F'')}{2} \right\rceil$ 。

引理6^[14] 路 P_m 与树 T_n 强积图线性荫度 $\text{la}(T_m \boxtimes P_n) = \left\lceil \frac{\Delta(T_m \boxtimes P_n)}{2} \right\rceil$ 。

下面计算树 T_m 与树 T_n 强积图线性荫度。

当 T_m 和 T_n 中只有一个为空图时,不妨设 $\Delta(T_n) = 0$,则 $\text{la}(T_m \boxtimes T_n) = \text{la}(T_m) = \left\lceil \frac{\Delta(T_m \boxtimes T_n)}{2} \right\rceil$ 。

当 T_m, T_n 均为非空图时, $\Delta(T_m) \geq 3, \Delta(T_n) \geq 3, m, n \geq 4$,结合定理7、8可知, $\left\lceil \frac{\Delta(T_m \boxtimes T_n)}{2} \right\rceil \leq \text{la}(T_m \boxtimes T_n)$ 。

$$T_n) \leq \left\lceil \frac{\Delta(T_m \square T_n)}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{\Delta(T_m \times T_n)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\Delta(T_m \boxtimes T_n)}{2} \right\rceil.$$

引理 6 是其余条件下的线性荫度, 因此有定理 9。

定理 9 森林 F' 和 F'' 的强积图线性荫度 $la(F' \boxtimes F'') = \left\lceil \frac{\Delta(F' \boxtimes F'')}{2} \right\rceil$ 。

3 1-退化图字典积图的线性荫度

任意图 G 和 H 的字典积图^[13] 为 $G[H]$, $V(G[H]) = \{(u, v) \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$, $E(G[H]) = \{(u, v)(u', v') \mid uu' \in E(G) \text{ 或 } u = u' \in V(G) \text{ 且 } vv' \in E(H)\}$, 设 $|V(G)| = m$, $|V(H)| = n$, 则对 $\forall (u, v) \in V(G[H])$, 有 $\deg_{G[H]}(u, v) = n \deg_G(u) + \deg_H(v)$ 。一般地, 字典积不满足交换律。

观察 1 设 $\Delta(T) \geq 3$ 的树 T 的顶点数为 n , 令树 T 中最大度顶点的集合为 Z 且集合 Z 的大小 $|Z| = z \geq 1$, 则有 $(\Delta(T) + 1)z - 2(z - 1) \leq n$, 因此 $1 \leq z \leq \left\lfloor \frac{n - 2}{\Delta(T) - 1} \right\rfloor$ 。

引理 7^[14] 树 T_m 与完全图 K_n 直积图线性荫度

$$la(T_m \times K_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{\Delta(T_m \times K_n) + 1}{2} \right\rceil, & \Delta(T_m) = 1, n > 2, n \equiv 1 \pmod{2}; \\ \left\lceil \frac{\Delta(T_m \times K_n)}{2} \right\rceil, & \text{其他。} \end{cases}$$

引理 8^[14] 树 T_m 与路 P_n 字典积图线性荫度

$$la(T_m [P_n]) = \begin{cases} \left\lceil \frac{\Delta(T_m [P_n]) + 1}{2} \right\rceil, & T_m = P_2, n > 2, n \equiv 0 \pmod{2}; \\ \left\lceil \frac{\Delta(T_m [P_n])}{2} \right\rceil \text{ 或 } \left\lceil \frac{\Delta(T_m [P_n]) + 1}{2} \right\rceil, & \begin{cases} \Delta(T_m) \geq 2, \Delta(T_m) \equiv 1 \pmod{2}, \\ n > 2, n \equiv 0 \pmod{2}; \end{cases} \\ \left\lceil \frac{\Delta(T_m [P_n])}{2} \right\rceil, & \text{其他。} \end{cases}$$

引理 9^[14] 路 P_m 与树 T_n 字典积图线性荫度

$$la(P_m [T_n]) = \begin{cases} \left\lceil \frac{\Delta(P_m [T_n]) + 1}{2} \right\rceil, & m = 2, \Delta(T_n) = 2, n > 2, n \equiv 0 \pmod{2}; \\ \left\lceil \frac{\Delta(P_m [T_n])}{2} \right\rceil \text{ 或 } \left\lceil \frac{\Delta(P_m [T_n]) + 1}{2} \right\rceil, & \begin{cases} m = 2, \Delta(T_n) > 2, n > 2, \\ \Delta(T_n) \equiv 0 \pmod{2}, n \equiv 0 \pmod{2}; \\ m = 2, \Delta(T_n) > 2, n > 2, \\ \Delta(T_n) \equiv 1 \pmod{2}, n \equiv 1 \pmod{2}; \end{cases} \\ \left\lceil \frac{\Delta(P_m [T_n])}{2} \right\rceil, & \text{其他。} \end{cases}$$

引理 8、9 虽然证实 LAC 成立, 但在 3 种条件下的线性荫度没有确定。下面计算此 3 种条件下的线性荫度, 主要方法是将图的边集进行分类后一次或多次合并得到需要的图集。

3.1 图 $T_m [P_n]$ 满足 $\Delta(T_m) \geq 2, \Delta(T_m) \equiv 1 \pmod{2}, n > 2, n \equiv 0 \pmod{2}$

在这一条件下计算图 $T_m [P_n] = (N_m \square P_n) \cup ((T_m \times K_n) \cup (T_m \square N_n))$ 的线性荫度, 先将图 $T_m [P_n]$ 分为 $N_m \square P_n$ 和 $(T_m \times K_n) \cup (T_m \square N_n)$ 2 个部分, 则 $la(T_m [P_n]) \leq 1 + la((T_m \times K_n) \cup (T_m \square N_n))$, 再将 $E(T_m)$ 分类得到树 T_m 的连续路分解, 把得到的路按出现顺序与 K_n 作直积后的图再并上相同路与 N_n 作笛卡尔积后的图, 再将得到的图进行某种合并后分类, 最后计算每个分类的线性荫度的和即是 $la((T_m \times K_n) \cup (T_m \square N_n))$ 。此过程共分 4 步。

第 1 步 在树 T 中任取一顶点作为根顶点, 层次 L_i 表示在树 T 中与根顶点距离为 i 的顶点的集合, 其

中 $0 \leq i < |V(T)|$ 。如果 $u \in L_i, v \in L_{i+1}$ 且 uv 是树 T 中的边, 则称 v 是 u 的后代。设 w 是 v 的后代, 称没有后代的顶点 w 为 u 的末后代, 路 uvw 记为 $P(u)$, $\text{int } P(u)$ 表示 $P(u)$ 中内部顶点组成的集合。

设树 T 包含 s 个叶子顶点, 整数 t 初始值为 0, $T^{(0)} = T$, 下面是树 T 的 $s-1$ 条路分解算法:

(1) 任取一叶子顶点作为根顶点 w , 取 $P(w)$, 输出 $P(w)$, 令 $t=t+1, T^{(t)} = T - E(P(w))$ 。

(2) 如果 $\text{int } P(w)$ 在树 $T^{(t)}$ 中的度全为 0, 结束; 否则, 依层次取 $u \in \text{int } P(w)$ 满足 $\deg_{T^{(t)}}(u) > 0$, 取 $P(u)$, 输出 $P(u)$, 令 $t=t+1, T^{(t)} = T^{(t-1)} - E(P(u))$ 。

(3) 如果 $\text{int } P(u)$ 在树 $T^{(t)}$ 中的度全为 0, 执行第 2 步; 否则, 令 $v=u$ (将 u 代表的顶点转移给 v), 依层次取 $u \in \text{int } P(v)$ 满足 $\deg_{T^{(t)}}(u) > 0$, 取 $P(u)$, 输出 $P(u)$, 令 $t=t+1, T^{(t)} = T^{(t-1)} - E(P(u))$, 执行第 3 步。

在路分解算法中, 第一步是以树的叶子顶点为根顶点输出路 $P(w)$, 路 $P(w)$ 以另一叶子顶点为末后代, 令 $T^{(1)} = T - E(P(w))$, 此时 $\text{int } P(w)$ 中满足 $\deg_{T-E(P(w))}(u) > 0$ 的顶点 u 依照所在层次由近到远排列。下面依照排列顺序先选择顶点 u 为根顶点, 以此根顶点输出路 $P(u)$, 令 $t=t+1, T^{(t)} = T^{(t-1)} - E(P(w))$, 再次判断 $\text{int } P(u)$ 中是否有满足 $\deg_{T-E(P(w))}(u) > 0$ 的顶点 u 。如果存在这样的顶点, 则重复上一步骤, 否则回到顶点 u 所在的排列并以下一个顶点为根顶点直至不存在这样的顶点排列。从而在算法结束时 $T^{(t)}$ 是空图, 否则算法继续。每次循环后剩余图的边数都将减少, 每次输出的路的边均不会重复出现, 并且在 $s-1$ 次循环后得到全部结果。由末后代的定义可知, 每个末后代顶点都是叶子顶点, 因此树 T 分解为 $s-1$ 条路。

假设图 1 中使用此算法: 选取 u_1 作为根顶点, 取路 $P(u_1) = u_1 u_6 u_5$, 则 $\text{int } P(u_1) = \{u_6\}$, 再取路 $P(u_6) = u_6 u_2$ 。因为路 $u_6 u_2$ 没有内部顶点, 所以取另一条路 $P(u_6) = u_6 u_3$ 。同样路 $u_6 u_3$ 没有内部顶点, 从而取另一条路 $P(u_6) = u_6 u_4$ 。至此余下的图为空图, 算法结束, 得到的 4 条路依次为 $u_1 u_6 u_5, u_6 u_2, u_6 u_3, u_6 u_4$ 。

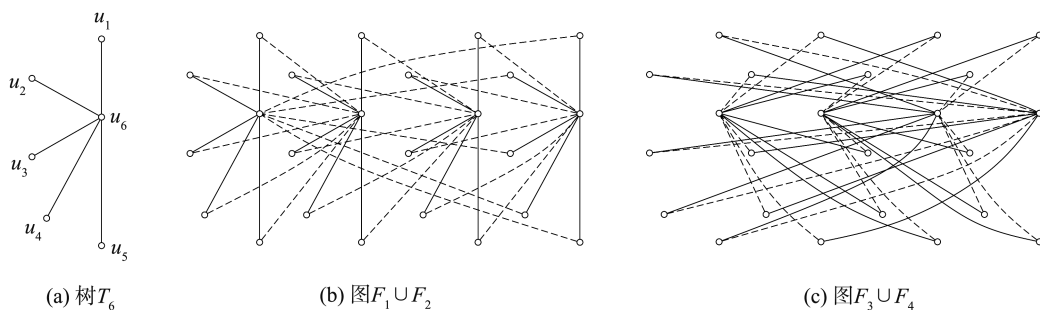


图 1 $(T_6 \times K_4) \cup (T_6 \square N_4)$ 的分类
Fig.1 Classification of $(T_6 \times K_4) \cup (T_6 \square N_4)$

第 2 步 对 $E((P_a \times K_n) \cup (P_a \square N_n)) (a \geq 1)$ 进行如下分类:

$$X_1 = \{(u_i, v_j)(u_{i+1}, v_j) \mid i=1, 2, \dots, a-1; j=1, 2, \dots, n\},$$

$$X_k^1 = \{(u_i, v_j)(u_{i+1}, v_{j+k-1}) \mid i=1, 3, \dots, (\lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{a-1}{2} \rfloor); j=1, 2, \dots, n-k+1\}$$

$$\cup \{(u_i, v_j)(u_{i+1}, v_{j-k+1}) \mid i=2, 4, \dots, 2 \lfloor \frac{a}{2} \rfloor; j=k, k+1, \dots, n\},$$

$$X_k^2 = \{(u_i, v_j)(u_{i+1}, v_{j-k+1}) \mid i=1, 3, \dots, (\lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{a-1}{2} \rfloor); j=k, k+1, \dots, n\}$$

$$\cup \{(u_i, v_j)(u_{i+1}, v_{j+k-1}) \mid i=2, 4, \dots, 2 \lfloor \frac{a}{2} \rfloor; j=1, 2, \dots, n-k+1\},$$

其中 $2 \leq k \leq n$ 。对部分分类进行合并: $X_k = X_k^1 \cup X_{n+2-k}^2, 2 \leq k \leq n$ 。合并后得到 $E((P_a \times K_n) \cup (P_a \square N_n))$ 的新分类 $X_k (1 \leq k \leq n)$ 。

第 3 步 结合第 1 步与第 2 步, 可以将图 $(T_m \times K_n) \cup (T_m \square N_n)$ 分解为 n 个图记为 $F_k (1 \leq k \leq n)$, 其中每个 F_k 都包含 n 个分支且每个分支都是树 T_m 的拷贝, 每个 F_k 的顶点集相同。任意 2 个不同的图 F_k 合并

后得到的 $\frac{n}{2}$ 个图 $F_i \cup F_j (1 \leq i < j \leq n)$ 的所有顶点度变为原先的 2 倍。例如图 1 所示 $(T_6 \times K_4) \cup (T_6 \square N_4)$ 的分类。

下证图 $F_i \cup F_j$ 是 2-退化图。

证明 由图 F_k 的性质可知其是 1-退化图,不妨设其顶点度序列为 $1 = \deg(u_1, v_1) = \dots = \deg(u_1, v_n) \leq \deg(u_2, v_1) = \dots = \deg(u_2, v_n) \leq \dots \leq \deg(u_m, v_1) = \dots = \deg(u_m, v_n) = \Delta(T_m)$, 因此图 $F_i \cup F_j$ 的顶点度序列为 $2 = \deg(u_1, v_1) = \dots = \deg(u_1, v_n) \leq \deg(u_2, v_1) = \dots = \deg(u_2, v_n) \leq \dots \leq \deg(u_m, v_1) = \dots = \deg(u_m, v_n) = 2\Delta(T_m)$ 。在图 $F_i \cup F_j$ 中依顶点度序列逐个删除顶点后得到的图的最小度必为 2, 所以图 $F_i \cup F_j$ 是 2-退化图。

第 4 步 因为 $\Delta(F_i \cup F_j) \geq 6$ 且 $(T_m \times K_n) \cup (T_m \square N_n) = \bigcup_{ij \in D} (F_i \cup F_j)$, 其中集合 D 表示 $1 \sim n$ 正整数中不放回选取 $\frac{n}{2}$ 个数对的一种结果, 根据引理 2 有

$$la((T_m \times K_n) \cup (T_m \square N_n)) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \Delta(T_m) = \frac{\Delta(T_m)n}{2},$$

故 $la(T_m[P_n]) = 1 + \frac{\Delta(T_m)n}{2} = \lceil \frac{\Delta(T_m[P_n])}{2} \rceil$, 从而引理 8 改进为引理 10。

引理 10 树 T_m 与路 P_n 字典积图线性荫度

$$la(T_m[P_n]) = \begin{cases} \lceil \frac{\Delta(T_m[P_n]) + 1}{2} \rceil, & T_m = P_2, n > 2, n \equiv 0 \pmod{2}; \\ \lceil \frac{\Delta(T_m[P_n])}{2} \rceil, & \text{其他。} \end{cases}$$

3.2 图 $P_m[T_n]$ 满足 $m=2, \Delta(T_n) > 2, n > 2, \Delta(T_n) \equiv 0 \pmod{2}, n \equiv 0 \pmod{2}$

此条件下的图为 $P_2[T_n] = (N_2 \square T_n) \cup K_{n,n}, \Delta(T_n) = 4, 6, 8, \dots, n = 6, 8, 10, \dots$ 。设 $V(K_{n,n}) = A \cup B$, 其中 $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, V(P_2[T_n]) = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$, A, B 在图 $P_2[T_n]$ 中的导出子图是树 T_n , 对 $\forall i \in [1, n], u_i$ 与 v_i 在图 $P_2[T_n]$ 中的位置相对应。与 3.1 节计算过程类似, 这里分为两步。

第 1 步 将图 $K_{n,n}$ 分解为 $\frac{n}{2}$ 个哈密顿圈记为 $C_l (1 \leq l \leq \frac{n}{2})$,

$$C_l = u_1 v_{j_1} u_2 v_{j_2} \dots u_k v_{j_k} \dots u_n v_{j_n} u_1,$$

其中 $1 \leq k \leq n, j_k = \begin{cases} n+1-(2l+k), & 2l+k \leq n; \\ 2n+1-(2l+k), & 2l+k > n. \end{cases}$

以下说明这是有效的哈密顿圈分解方法。首先证明图 C_l 是图 $K_{n,n}$ 中的一个哈密顿圈, 再证明这些哈密顿圈两两边不交, 最后证明每条边都位于某个哈密顿圈上。对每个固定的 l 由 j_k 的取值可知 j_1, j_2, \dots, j_n 是每项均不相同的数列, 并且是 $1, 2, \dots, n$ 排列的一种结果, 因此图 C_l 是图 $K_{n,n}$ 中的一个哈密顿圈。要证明哈密顿圈两两边不交只需证明哈密顿圈上的每条边只位于一个哈密顿圈上, 即证 l 的值是唯一的, 为此任取一条哈密顿圈上的边 $u_k v_{j_k}$, 此时 k 和 j_k 的值固定, 由 j_k 的取值可知 l 的值是唯一的。因为

$$|\bigcup_{l=1}^{\frac{n}{2}} E(C_l)| = \sum_{l=1}^{\frac{n}{2}} |E(C_l)| = \frac{n}{2} \times 2n = n^2 = |E(K_{n,n})|, \text{ 所以 } \bigcup_{l=1}^{\frac{n}{2}} E(C_l) = E(K_{n,n}).$$

对 $\forall l \in [1, \frac{n}{2}], \exists u_{\frac{n}{2}+1-l} v_{\frac{n}{2}+1-l} \in E(C_l)$, 使得图 $C_l - u_{\frac{n}{2}+1-l} v_{\frac{n}{2}+1-l}$ 是线性森林, 因此 $la(K_n, n - \bigcup_{l=1}^{\frac{n}{2}} u_{\frac{n}{2}+1-l} v_{\frac{n}{2}+1-l}) =$

$\frac{n}{2}$ 。图 2 所示为图 $K_{6,6}$ 的哈密顿圈分解, 其中虚线表示去除的边。

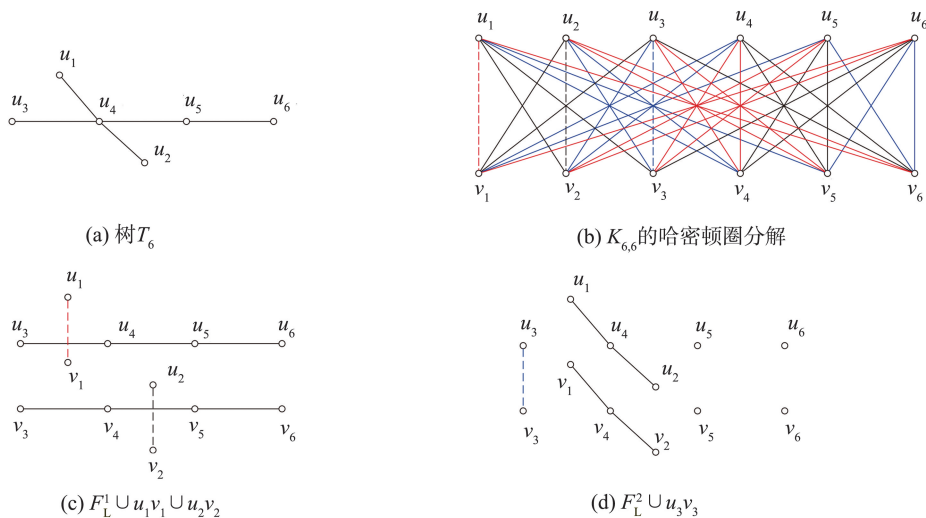


图2 $P_2[T_6]$ 的分解
Fig.2 Decomposition of $P_2[T_6]$

第2步 由观察1树 T_n 满足 $1 \leq z \leq \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor < \frac{n}{2}$, 将顶点 $u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n+1-l}, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{n+1-l}$ 视为以 A, B

为顶点集的树 T_n 中的非最大度顶点, 由引理3的相关证明可知, 非最大度顶点的对应边 $u_{\frac{n}{2}+1-l}v_{\frac{n}{2}+1-l}$ 可以并入图 $N_2 \square T_n$ 的某个线性森林中且不改变线性森林的现状, 如图2中(c)、(d)所示, 因此 $la((N_2 \square T_n) \cup$

$$\bigcup_{l=1}^{\frac{n}{2}} u_{\frac{n}{2}+1-l}v_{\frac{n}{2}+1-l}) = la(N_2 \square T_n) = \frac{\Delta(T_n)}{2}。$$

因为 $(K_{n,n} - \bigcup_{l=1}^{\frac{n}{2}} u_{\frac{n}{2}+1-l}v_{\frac{n}{2}+1-l}) \cup ((N_2 \square T_n) \cup \bigcup_{l=1}^{\frac{n}{2}} u_{\frac{n}{2}+1-l}v_{\frac{n}{2}+1-l}) = P_2[T_n]$, 所以 $la(P_2[T_n]) = \frac{n}{2} + \frac{\Delta(T_n)}{2} =$

$$\left\lceil \frac{\Delta(P_2[T_n])}{2} \right\rceil。$$

3.3 图 $P_m[T_n]$ 满足 $m=2, \Delta(T_n) > 2, n > 2, \Delta(T_n) \equiv 1 \pmod{2}, n \equiv 1 \pmod{2}$

此条件下的图为 $P_2[T_n] = (P_2 \square T_n) \cup (P_2 \times K_n)$, $\Delta(T_n) = 3, 5, 7, \dots, n = 5, 7, 9, \dots$, 设 $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $V(P_2[T_n]) = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$, A, B 在图 $P_2[T_n]$ 中的导出子图是树 T_n , 对 $\forall i \in [1, n]$, u_i 与 v_i 在图 $P_2[T_n]$ 中的位置相对应。与3.2节计算过程类似, 这里也分为两步。

第1步 先将 $E(P_2 \times K_n)$ 进行如下分类:

$$Y_k^1 = \{(u_i, v_{i+k-1}) \mid i=1, 2, \dots, n-(k-1)\}, \quad Y_k^2 = \{(u_{i+k-1}, v_i) \mid i=1, 2, \dots, n-(k-1)\},$$

其中 $2 \leq k \leq n$ 。将图 $P_2 \times K_n$ 分解为 $\frac{n-1}{2}$ 个哈密顿圈,

$$C_l = Y_{2l+1}^1 \cup Y_{2l}^1 \cup Y_{n+1-2l}^2 \cup Y_{n-2l+2}^2,$$

其中 $1 \leq l \leq \frac{n-1}{2}$ 。显然要验证此哈密顿圈分解方法的正确性只须验证每个 C_l 均是哈密顿圈。任选图 C_l , 由于此分解方法是4个集合的并, 每个集合都具有极强的规律, 可以发现图 $Y_{2l+1}^1 \cup Y_{2l}^1$ 是以顶点 $u_{n-(2l-1)}$ 和 v_{2l} 为端点的路, 其包含顶点数为 $2(n-(2l-1))$ 。而图 $Y_{n+1-2l}^2 \cup Y_{n-2l+2}^2$ 也是以顶点 $u_{n-(2l-1)}$ 和 v_{2l} 为端点的路, 包含顶点数为 $4l$, 这2条路除端点外再无其他重复顶点, 因此这2条路的并图是图 $P_2 \times K_n$ 上的一个圈, 并且包含的顶点个数为 $2n$, 即是图 $P_2 \times K_n$ 上的一个哈密顿圈。

为了方便后续处理, 这里将图 $C_1, C_2, \dots, C_{\frac{n-1}{2}}$ 依次代入数列 $\{a_1, a_3, \dots, a_{\frac{n-1}{2}}, \dots, a_4, a_2\}$ 中, 将数列重排为 $\{a_1, a_2, \dots, a_{\frac{n-1}{2}}\}$, 则哈密顿圈的顺序发生相应改变并重新记为 $C'_1, C'_2, \dots, C'_{\frac{n-1}{2}}$, 因此图 $C_l - u_{\frac{n-1}{2}+1} + \sum_{j=1}^{l-1} j(-1)^{j+1} v_{\frac{n-1}{2}+1} + \sum_{j=1}^l j(-1)^{j+1}$ 是线性森林。令图

$$HI = \bigcup_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} u_{\frac{n-1}{2}+1+\sum_{j=1}^{l-1} j(-1)^{j+1}} v_{\frac{n-1}{2}+1+\sum_{j=1}^l j(-1)^{j+1}},$$

因为这 $\frac{n-1}{2}$ 条边互不相交, 前一条边中 v 的下标与后一条边中 u 的下标相同且同一条边中两个下标不同, 因此图 HI 是有 $\frac{n-1}{2}$ 个分支的线性森林。

第 2 步 由观察 1 知树 T_n 满足 $1 \leq z \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor < \frac{n-1}{2}$, 由引理 3 的相关证明可设图 $P_2 \square T_n$ 的线性森林为 $F_L^r (1 \leq r \leq \frac{\Delta(T_n)+1}{2})$, 顶点 u_1, u_2, \dots, u_z 和 v_1, v_2, \dots, v_z 既是树 T_n 中的最大度顶点也是图 $P_2 \square T_n$ 中的最大度顶点。在所有线性森林 F_L^r 中包含边 $u_s v_s (1 \leq s \leq z)$ 的分支总数为 z , 这其中每个分支的端点是不相邻的顶点对 $u_i v_i (i \in [z+1, n])$ 。在所有线性森林 F_L^r 中以非最大度顶点对为端点的边共 $n-z$ 个, 并且这 $n-z$ 条边全是线性森林中的分支。将这些分支记为 $F = \{L_1, L_2, \dots, L_z, L_{z+1}, L_{z+2}, \dots, L_n\}$, 后一部分分支的顶点集包含前一部分分支的端点集, 这些分支 F 分布于部分或全部 F_L^r 中, 不妨设 F 分布于 $F_L^r (1 < r_1 \leq r)$ 。图 HI 的顶点集所占用的类似 $u_i v_i$ 顶点对共 $\frac{n+1}{2}$ 个, $L_{z+1}, L_{z+2}, \dots, L_n$ 所占用类似顶点对至少 $\frac{n+1}{2}$ 个, F_L^r 中 $L_{z+1}, L_{z+2}, \dots, L_n$ 在加入 $\frac{n-1}{2} - (r_1 - 1)$ 条边后线性森林的现状保持不变 ($L_{z+1}, L_{z+2}, \dots, L_n$ 在不考虑图的限制条件下可以加入 $\frac{n-1}{2}$ 条边使得线性森林的现状保持不变), 剩余 $r_1 - 1$ 条边可以逐个加入顶点对 (u_s, v_t) 或 (v_s, u_t) 中, 而 L_s, L_t 在同一个 F_L^r 中, 其中 $s \in [1, z], t \in [z+1, n]$ 。从而 $la((P_2 \square T_n) \cup HI) = la(P_2 \square T_n)$, 因此 $la(P_2[T_n]) \leq la((P_2 \times K_n) - HI) + la((P_2 \square T_n) \cup HI) = \lceil \frac{\Delta(P_m[T_n])}{2} \rceil$ 。图 3 所示为 $P_2[T_5]$ 的线性森林分解, 其中虚线表示从哈密顿圈中去掉的边。

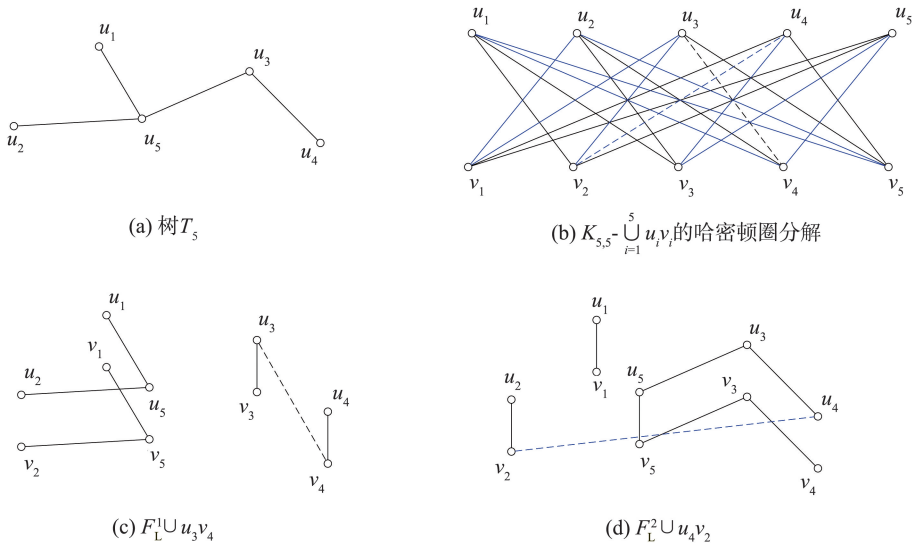


图 3 $P_2[T_5]$ 的分解, 其中 F_L^1, F_L^2 是图 $P_2 \square T_n$ 的线性森林

Fig.3 Decomposition of $P_2[T_5]$, where F_L^1, F_L^2 are the linear forest of the graph $P_2 \square T_n$, respectively

结合 3.2、3.3 节的计算结果可将引理 9 改进为引理 11。

引理 11 路 P_m 与树 T_n 字典积图线性荫度

$$la(P_m[T_n]) = \begin{cases} \lceil \frac{\Delta(P_m[T_n]) + 1}{2} \rceil, & m=2, \Delta(T_n)=2, n>2, n \equiv 0 \pmod{2}; \\ \lceil \frac{\Delta(P_m[T_n])}{2} \rceil, & \text{其他。} \end{cases}$$

3.4 树和树字典积图线性荫度

这一部分计算树 T_m 与树 T_n 字典积图线性荫度, 此时 $\Delta(T_m) \geq 3$, $\Delta(T_n) \geq 3$ 。下面采用类似于 3.1 节的计算过程。

首先图 $T_m[T_n] = ((T_m \square N_n) \cup (T_m \times K_n)) \cup (N_m \square T_n)$, 有

$$\text{la}(T_m[T_n]) \leq \begin{cases} \left\lceil \frac{n\Delta(T_m)}{2} + \left\lceil \frac{\Delta(T_n)}{2} \right\rceil \right\rceil, & n \equiv 0 \pmod{2}; \\ \left\lceil \frac{(n-1)\Delta(T_m)}{2} + \left\lceil \frac{\Delta(T_m)}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{\Delta(T_n)}{2} \right\rceil \right\rceil, & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

此时只在 $n \equiv 1 \pmod{2}$, $\Delta(T_m) \equiv 1 \pmod{2}$, $\Delta(T_n) \equiv 1 \pmod{2}$ 时等号不成立。又图 $T_m[T_n] = (T_m \square T_n) \cup (T_m \times K_n)$, 有

$$\text{la}(T_m[T_n]) \leq \left\lceil \frac{\Delta(T_m) + \Delta(T_n)}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{(n-1)\Delta(T_m)}{2} \right\rceil,$$

因此 $\text{la}(T_m[T_n]) = \left\lceil \frac{\Delta(T_m[T_n])}{2} \right\rceil$, 再结合引理 10、11 可得定理 10。

定理 10 树 T_m 与树 T_n 字典积图线性荫度

$$\text{la}(T_m[T_n]) = \begin{cases} \left\lceil \frac{\Delta(T_m[T_n]) + 1}{2} \right\rceil, & T_m = P_2, \Delta(T_n) = 2, n > 2, n \equiv 0 \pmod{2}; \\ \left\lceil \frac{\Delta(T_m[T_n])}{2} \right\rceil, & \text{其他。} \end{cases}$$

3.5 森林和森林字典积图线性荫度

根据字典积的定义, 要计算森林 F' 和森林 F'' 字典积图 $F'[F'']$ 线性荫度, 只需计算图 $T_m[F''] = ((T_m \times K_n) \cup (T_m \square N_n)) \cup (N_m \square F'')$ 的线性荫度, 其中 T_m 是森林 F' 中满足 $\Delta(T_m) = \Delta(F')$ 的一个分支, 令 $|V(F'')| = n$ 。下面分 3 种情况讨论。

3.5.1 $\Delta(T_m) \geq 3$

$$\text{la}(T_m[F'']) \leq \begin{cases} \left\lceil \frac{n\Delta(T_m)}{2} + \left\lceil \frac{\Delta(F'')}{2} \right\rceil \right\rceil, & n \equiv 0 \pmod{2}; \\ \left\lceil \frac{(n-1)\Delta(T_m)}{2} + \left\lceil \frac{\Delta(T_m)}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{\Delta(F'')}{2} \right\rceil \right\rceil, & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

在 $\Delta(F'') \equiv 1 \pmod{2}$, $n \equiv 1 \pmod{2}$, $\Delta(T_m) \equiv 1 \pmod{2}$ 或 $\Delta(F'') = 0$ 这 2 个条件下等号不成立。又图 $T_m[F''] = (T_m \square F'') \cup (T_m \times K_n)$, 有

$$\text{la}(T_m[F'']) \leq \left\lceil \frac{\Delta(T_m) + \Delta(F'')}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{(n-1)\Delta(T_m)}{2} \right\rceil,$$

因此 $\text{la}(T_m[F'']) = \left\lceil \frac{\Delta(T_m[F''])}{2} \right\rceil$ 。

3.5.2 $\Delta(T_m) = 2$

图 $T_m[F''] = P_m[F''] = (P_m \square F'') \cup (P_m \times K_n)$, 则

$$\text{la}(T_m[F'']) = n - 1 + \left\lceil \frac{2 + \Delta(F'')}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\Delta(T_m[F''])}{2} \right\rceil.$$

3.5.3 $T_m = P_2$

图 $P_2[F''] = (N_2 \square F'') \cup ((P_2 \square N_n) \cup (P_2 \times K_n))$, 令树 T_n 满足 $V(T_n) = V(F'')$, $\Delta(T_n) = \Delta(F'') > 1$, $F'' \subset T_n$, 则 $\text{la}(P_2[F'']) \leq \text{la}(P_2[T_n])$, 因此 LAC 对图 $P_2[F'']$ 是成立的。下面对 $\Delta(F'')$ 分 3 种情况计算线性荫度。

情况 1 $\Delta(F'') \geq 3$ 时, 由 3.2、3.3 节知, $\text{la}(T_m[F'']) = \left\lceil \frac{\Delta(T_m[F''])}{2} \right\rceil$ 。

情况 2 $\Delta(F'')=2$ 时,对 n 分 2 种情况。

情况 2.1 $n \equiv 0 \pmod{2}$, 则 $n=4,6,8,\dots, 1 \leq |C(F'')| \leq n-2$, 图 $N_2 \square F''$ 最多加入 $2|C(F'')|-1$ 条边后仍是线性森林, 采用 3.2 节中图 $(P_2 \square N_n) \cup (P_2 \times K_n)$ 的哈密顿圈分解, 必有 $\frac{n}{2}$ 条边要加入图 $N_2 \square F''$ 中, 显然下列情况必然成立:

$$\text{当 } |C(F'')| < \frac{n+2}{4} \text{ 时, } 2|C(F'')|-1 < \frac{n}{2}, \text{ 此时 } \text{la}(T_m[F'']) = \left\lceil \frac{\Delta(T_m[F''])+1}{2} \right\rceil;$$

$$\text{当 } \frac{n+2}{4} \leq |C(F'')| < \frac{n}{2} \text{ 时, } \left\lceil \frac{\Delta(T_m[F''])}{2} \right\rceil \leq \text{la}(T_m[F'']) \leq \left\lceil \frac{\Delta(T_m[F''])+1}{2} \right\rceil;$$

$$\text{当 } |C(F'')| \geq \frac{n}{2} \text{ 时, } \text{la}(T_m[F'']) = \left\lceil \frac{\Delta(T_m[F''])}{2} \right\rceil.$$

$$\text{情况 2.2 } n \equiv 1 \pmod{2}, \text{la}(T_m[F'']) = \left\lceil \frac{\Delta(T_m[F''])}{2} \right\rceil.$$

情况 3 $\Delta(F'')=1$ 时, $n \geq 2, n-1 \geq |C(F'')| \geq \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \equiv 0 \pmod{2}; \\ \frac{n+1}{2}, & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$ 下面分 2 种情况。

$$\text{情况 3.1 } n \equiv 0 \pmod{2} \text{ 时, } \text{la}(T_m[F'']) = \left\lceil \frac{\Delta(T_m[F''])}{2} \right\rceil.$$

情况 3.2 $n \equiv 1 \pmod{2}$ 时, 对图 $(P_2 \square N_n) \cup (P_2 \times K_n)$ 采用 3.3 节中的哈密顿圈分解方法, 必有 $n + \frac{n-1}{2}$ 条边加入图 $N_2 \square F''$ 中, 因此可以确定:

$$\text{当 } \frac{n+1}{2} \leq |C(F'')| < \frac{3n+1}{4} \text{ 时, } \text{la}(T_m[F'']) = \left\lceil \frac{\Delta(T_m[F''])+1}{2} \right\rceil;$$

$$\text{当 } \frac{3n+1}{4} \leq |C(F'')| \leq n-1 \text{ 时, LAC 对图 } T_m[F''] \text{ 成立.}$$

结合定理 10 与 3.5 节的结果有定理 11。

定理 11 LAC 对森林 F' 和森林 F'' 字典积图 $F'[F'']$ 成立, 特别地,

$$\text{la}(F'[F'']) = \begin{cases} \left\lceil \frac{\Delta(F'[F''])+1}{2} \right\rceil, & \begin{cases} \Delta(F')=1, \Delta(F'')=1, |V(F'')| \equiv 1 \pmod{2}, \\ |C(F'')| < \frac{3n+1}{4}; \end{cases} \\ \left\lceil \frac{\Delta(F'[F''])}{2} \right\rceil \text{ 或 } \left\lceil \frac{\Delta(F'[F''])+1}{2} \right\rceil, & \begin{cases} \Delta(F')=1, \Delta(F'')=2, |V(F'')| \equiv 0 \pmod{2}, \\ |C(F'')| < \frac{n+2}{4}; \\ \Delta(F')=1, \Delta(F'')=0; \end{cases} \\ \left\lceil \frac{\Delta(F'[F''])}{2} \right\rceil, & \begin{cases} \Delta(F')=1, \Delta(F'')=1, |V(F'')| \equiv 1 \pmod{2}, \\ \frac{3n+1}{4} \leq |C(F'')|; \\ \Delta(F')=1, \Delta(F'')=2, |V(F'')| \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{n+2}{4} \leq |C(F'')| < \frac{n}{2}; \end{cases} \\ \text{其他.} & \text{其他.} \end{cases}$$

参考文献:

[1] HARARY F. Covering and packing in graphs. I[J]. Annals of the New York Academy of Sciences, 1970, 175(1):198-205.

- [2] AKIYAMA J, EXOO G, HARARY F. Covering and packing in graphs. III: cyclic and acyclic invariants[J]. *Mathematica Slovaca*, 1980, 30(4):405-417.
- [3] AKIYAMA J, EXOO G, HARARY F. Covering and packing in graphs. IV: linear arboricity[J]. *Networks*, 1981, 11(1):69-72.
- [4] ENOMOTO H, PÉROCHE B. The linear arboricity of some regular graphs[J]. *Journal of Graph Theory*, 1984, 8(2):309-324.
- [5] GULDAN F. The linear arboricity of 10-regular graphs[J]. *Mathematica Slovaca*, 1986, 36(3):225-228.
- [6] WU Jianliang. On the linear arboricity of planar graphs[J]. *Journal of Graph Theory*, 1999, 31(2):129-134.
- [7] WU Jianliang, WU Yuwen. The linear arboricity of planar graphs of maximum degree seven is four[J]. *Journal of Graph Theory*, 2008, 58(3):210-220.
- [8] LICK D R, WHITE A T. k -Degenerate graphs[J]. *Canadian Journal of Mathematics*, 1970, 22(5):1082-1096.
- [9] KAINEN P C. Upper bound for linear arboricity[J]. *Applied Mathematics Letters*, 1991, 4(4):53-55.
- [10] BASAVARAJU M, BISHNU A, FRANCIS M, et al. The linear arboricity conjecture for graphs of low degeneracy[EB/OL]. <https://arxiv.org/pdf/2007.06066.pdf>.
- [11] CHEN Guantao, HAO Yanli, YU Guoning. Linear arboricity of degenerate graphs[J]. arXiv preprint arXiv: 2207.07169, 2022.
- [12] WDOWINSKI R. Orientation-based edge-colorings and linear arboricity of multigraphs[J]. *Journal of Graph Theory*, 2023, 102(4):633-647.
- [13] HAMMACK R, IMRICH W, KLAUVŽAR S. *Handbook of product graphs*[M]. Boca Raton: CRC Press, 2011.
- [14] 刘兆志,买吐肉孜·买司地克. 树和路字典积图的线性荫度[J]. *应用数学进展*, 2022, 11(11):8171-8182.
LIU Zhaozhi, METSIDIK Metrose. Linear arboricity of lexicographic products of trees and paths[J]. *Advances in Applied Mathematics*, 2022, 11(11):8171-8182.

(编辑:祁业卿)

(上接第50页)

- [10] KOSTOCHKA A V. Equitable colorings of outerplanar graphs[J]. *Discrete Mathematics*, 2002, 258(1/2/3):373-377.
- [11] KOSTOCHKA A V, NAKPRASIT K. Equitable colourings of d -degenerate graphs[J]. *Combinatorics, Probability and Computing*, 2003, 12(1):53-60.
- [12] ZHANG Yi, YAP Hianpoh. Equitable colorings of planar graphs[J]. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 1998, 27:97-105.
- [13] NAKPRASIT K. Equitable colorings of planar graphs with maximum degree at least nine[J]. *Discrete Mathematics*, 2012, 312(5):1019-1024.
- [14] KOSTOCHKA A, LIN D, XIANG Z M. Equitable coloring of planar graphs with maximum degree at least eight[J]. *Discrete Mathematics*, 2024, 347(6):113964.
- [15] ZHANG X. On equitable colorings of sparse graphs[J]. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2016, 39(1):257-268.
- [16] ZHANG X, WANG H J, XU L. Equitable coloring of three classes of 1-planar graphs[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica: English Series*, 2018, 34(2):362-372.
- [17] CRANSTON D, MAHMOUD R. Equitable coloring in 1-planar graphs[EB/OL]. <http://arxiv.org/abs/2311.14915>.
- [18] DONG A J, ZOU Q S, LI G J. Equitable and list equitable colorings of graphs with bounded maximum average degree[J]. *ARS Comb*, 2016, 124:303-311.
- [19] DONG A J, ZHANG X. Equitable coloring and equitable choosability of graphs with small maximum average degree[J]. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 2018, 38(3):829.
- [20] ZHU J L, BU Y H. Equitable list colorings of planar graphs without short cycles[J]. *Theoretical Computer Science*, 2008, 407(1/2/3):21-28.

(编辑:祁业卿)