

文章编号: 1671-9352(2025)01-0101-10 DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.4.2023.0181

广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集及其多属性决策

吴维^{1,2}, 张贤勇^{1,2*}, 杨霖琳^{2,3}

(1. 四川师范大学数学科学学院, 四川 成都 610066; 2. 四川师范大学智能信息与量子信息研究所, 四川 成都 610066; 3. 四川师范大学计算机科学学院, 四川 成都 610101)

摘要: 提出广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集, 定义并、交、补、且、或运算并研究相关性质。针对广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集, 提取关联区间值的平均隶属度和平均非隶属度, 定义相关性和相关系数, 得到扩张原则与基本性质。采用广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集的相关系数优化排序, 从而实施多属性决策, 采用医疗资源实例及能源项目投资案例验证新建决策方法的有效性。结果表明, 相关的建模、度量及决策有利于不确定分析与应用。

关键词: q 阶 orthopair 犹豫模糊集; 广义区间值模糊软集; 广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集; 相关系数; 多属性决策

中图分类号: O159 **文献标志码:** A

引用格式: 吴维, 张贤勇, 杨霖琳. 广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集及其多属性决策[J]. 山东大学学报(理学版), 2025, 60(1): 101-110.

Generalized interval-valued q -rung orthopair hesitant fuzzy soft sets and their multi-attribute decision making

WU Wei^{1,2}, ZHANG Xianyong^{1,2*}, YANG Jilin^{2,3}

(1. School of Mathematical Sciences, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, Sichuan, China; 2. Institute of Intelligent Information and Quantum Information, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, Sichuan, China; 3. College of Computer Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610101, Sichuan, China)

Abstract: Generalized interval-valued q -rung orthopair hesitant fuzzy soft sets (GIV q -ROHFSSs) are proposed, and their operations of union, intersection, complement, and, or are defined to gain relevant properties. Regarding GIV q -ROHFSSs, average membership and non-membership degrees associated with interval values are extracted, and correlations and correlation coefficients are defined to acquire an extended principle and several basic properties. Correlation coefficients of GIV q -ROHFSSs are adopted, and optimal sorting is performed to motivate multi-attribute decision making. The practical example of medical resources and the energy project investment case show the effectiveness of new decision method. The related modeling, measurement and decision facilitate uncertainty analysis and applications.

Key words: q -rung orthopair hesitant fuzzy sets; generalized interval-valued fuzzy soft sets; generalized interval-valued q -rung orthopair hesitant fuzzy soft sets; correlation coefficient; multi-attribute decision making

0 引言

软集理论于 1999 年由 Molodtsov 提出^[1]。该理论采用参数化视角处理不确定性, 广泛应用于决策问题^[2]及数据挖掘^[3]等方面。近年来, 软集与其他不确定性数学模型相结合并迅速发展, 形成了概率软集^[4]及软粗糙集^[5]等多种智能处理模型。其中, 软集与模糊集的数据集成与信息融合成为重要主题, 建立了模糊软集^[6]、犹豫模糊软集^[7]、对偶犹豫模糊软集^[8]、广义对偶犹豫模糊软集^[9]等扩展模型。

相关系数能够有效表征对象之间的相似程度, 广泛应用于多属性决策^[10-11]。特别地, 相关系数及其多

收稿日期: 2023-06-27; 网络出版时间: 2024-04-24 11:48:39

基金项目: 四川省自然科学基金资助项目(2022NSFC0929); 四川省科技计划资助项目(2021YJ0085, 2022ZYD0001)

第一作者: 吴维(1997—), 女, 硕士研究生, 研究方向为模糊集与软集. E-mail: 2394315654@qq.com

* 通信作者: 张贤勇(1978—), 男, 教授, 博士生导师, 博士, 研究方向为不确定分析与信息处理. E-mail: xianyongzh@sina.com

属性决策已经深度关联于模糊软集及其扩展模型。例如,文献[12]将模糊集的广义相关系数引入到模糊软集,并应用于多属性群决策;文献[13]提出犹豫模糊软集的相关系数及加权相关系数,并实施决策应用。文献[14]在对偶犹豫模糊软集环境中开发相关系数和加权相关系数,提出一种基于相关系数的多准则决策方法;文献[9]提出广义对偶犹豫模糊软集,定义广义对偶犹豫模糊软集的相关性与相关系数,并应用于多属性决策。

区间值关联于数据分析与认知学习,对应的模糊处理与软计算具有需求与价值,且模糊软集的系列模型在区间值形式的扩张上迅速发展(包括在多属性决策方面)^[15-16],但是,区间值模糊软集及其扩展模型对相关系数及多属性决策的研究较少,文献[17]提出区间直觉模糊软集的相关系数并用于决策制定。由此,本文依托广义对偶犹豫模糊软集现有模型^[9]进行关于区间值的扩张研究,构建广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集 (generalized interval-valued q -rung orthopair hesitant fuzzy soft sets, GIV q -ROHFSSs) 新模型,该集合简记为 $K_{\text{GIV}q\text{-ROHFSSs}}$,研究其中的相关系数并应用于多属性决策。

1 广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集

本文统一设 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 是一个初始论域, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 是一个参数集。设 $K_{\text{DHFS}(U)}$ 表示论域 U 上的对偶犹豫模糊子集的集合, $A \subseteq E$, $\tilde{F}: A \rightarrow K_{\text{DHFS}(U)}$ 是一个映射, $(\mu, \nu): A \rightarrow I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ 为另一映射, 映射 $\tilde{F}_{\mu\nu}: A \rightarrow K_{\text{DHFS}(U)} \times I^2$ 满足对 $\forall e \in A$, 有 $\tilde{F}_{\mu\nu}(e) = (\tilde{F}(e), \mu(e), \nu(e))$, 其中 $\tilde{F}(e) \in K_{\text{DHFS}(U)}$, $(\mu(e), \nu(e)) \in I^2$ 表示参数 e 的重要程度, 用直觉模糊数表示, 则序对 $(\tilde{F}_{\mu\nu}, A)$ 称为 U 上的广义对偶犹豫模糊软集 (简记为 K_{GDHFSS})。

因为文献[9]提出的广义对偶犹豫模糊软集不适用于隶属度和非隶属度为区间值的情况且适用范围有限, 所以本章将广义对偶犹豫模糊软集扩展为区间值形式并扩大定义域, 提出广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集。

定义 1 设 $K_{\tilde{I}\tilde{V}(U)}$ 表示论域 U 上的区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊集的集合, $P \subseteq E$, ψ 是参数集 P 上的模糊集, $\tilde{W}: P \rightarrow K_{\tilde{I}\tilde{V}(U)}$ 是一个映射, 其中 $\hat{W}_{\psi}: P \rightarrow K_{\tilde{I}\tilde{V}(U)} \times [0, 1]^2$, $\hat{W}_{\psi}(e) = (\tilde{W}(e), \psi(e)) = (\langle \langle w, I_{\tilde{W}(e)}(w) \rangle | w \in U \rangle, \psi(e)) = (\langle \langle w, (\alpha_{I_{\tilde{W}(e)}}(w), \beta_{I_{\tilde{W}(e)}}(w)) \rangle | w \in U \rangle, \psi(e)) \in K_{\tilde{I}\tilde{V}(U)} \times [0, 1]^2$, $(\hat{W}_{\psi}, P) = \langle \langle e, \tilde{W}(e), \psi(e) \rangle | e \in P \rangle$, $\tilde{W}(e)$ 是参数 e 对应的区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊集, $\psi(e) = (\mu(e), \nu(e)) = ([\mu_e^-, \mu_e^+], [\nu_e^-, \nu_e^+]) \in [0, 1]^2$ 表示参数 e 的重要程度, 用区间值 q 阶 orthopair 模糊数表示, 则序对 (\hat{W}_{ψ}, P) 称为 U 上的一个广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集。设 $K_{\text{GIV}q\text{-ROHFSSs}(U)}$ 表示论域 U 上所有广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集的集簇。

下面定义 $K_{\text{GIV}q\text{-ROHFSSs}}$ 的基本概念。

定义 2 设 $(\hat{W}_{\psi}, P) \in K_{\text{GIV}q\text{-ROHFSSs}(U)}$, 若对于 $\forall e_j \in P, u_i \in U$, 都有 $\alpha_{I_{\tilde{W}(e_j)}}(u_i) = 0, \beta_{I_{\tilde{W}(e_j)}}(u_i) = 1$ 且 $\mu(e_j) = 0, \nu(e_j) = 1$, 则称 (\hat{W}_{ψ}, P) 是一个空值广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集, 记为 $\hat{\Phi}_p$ 。同时, 若对于 $\forall e_j \in P, u_i \in U$, 都有 $\alpha_{I_{\tilde{W}(e_j)}}(u_i) = 1, \beta_{I_{\tilde{W}(e_j)}}(u_i) = 0$ 且 $\mu(e_j) = 1, \nu(e_j) = 0$, 则称 (\hat{W}_{ψ}, P) 是一个满值广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集, 记为 \hat{U}_p 。

定义 3 设 $(\hat{W}_{\psi}, P) \in K_{\text{GIV}q\text{-ROHFSSs}(U)}$, $\hat{W}_{\psi}(e_j) = (\hat{W}(e_j), \mu(e_j), \nu(e_j))$, $\hat{W}(e_j) = \langle \langle u_i, h_{\hat{W}(e_j)}(\mu_i) \rangle | u_i \in U \rangle \in K_{\tilde{I}\tilde{V}(U)}$, 记映射 $\hat{W}_{\psi}^c: P \rightarrow K_{\tilde{I}\tilde{V}(U)} \times I^2$, 其中 $\hat{W}_{\psi}^c(e_j) = (\hat{Z}(e_j), \delta(e_j), \varepsilon(e_j))$, $\hat{Z}(e_j) = \langle \langle u_i, h_{\hat{W}(e_j)}(u_i) \rangle | u_i \in U \rangle \in K_{\tilde{I}\tilde{V}(U)}$, $(\delta(e_j), \varepsilon(e_j)) \in I^2$ 。对于 $\forall e_j \in P, u_i \in U$, 有 $h_{\hat{W}(e_j)}(u_i) = g_{\hat{W}(e_j)}(u_i)$, $g_{\hat{W}(e_j)}(u_i) = h_{\hat{W}(e_j)}(u_i)$ 以及 $\delta_{\hat{W}(e_j)}(u_i) = \nu_{\hat{W}(e_j)}(u_i)$, $\varepsilon_{\hat{W}(e_j)}(u_i) = \mu_{\hat{W}(e_j)}(u_i)$ 成立, 则称 (\hat{W}_{ψ}^c, P) 为 (\hat{W}_{ψ}, P) 的补集, 记为 $(\hat{W}_{\psi}, P)^c$ 。

定义 4 设 $(\hat{W}_{\psi}, P), (\hat{Z}_{\xi}, Q) \in K_{\text{GIV}q\text{-ROHFSSs}(U)}$, 则 (\hat{W}_{ψ}, P) 和 (\hat{Z}_{ξ}, Q) 的并是广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集, 记为 $(\hat{W}_{\psi}, P) \hat{\cup} (\hat{Z}_{\xi}, Q) = (\hat{T}_r, R)$, 其中 $R = P \cup Q$, 对 $\forall r \in R$, 有

$$\tilde{T}(r) = \begin{cases} \tilde{W}(r), & r \in P-Q, \\ \tilde{Z}(r), & r \in Q-P, \\ \tilde{W}(r) \cup \tilde{Z}(r), & r \in P \cap Q, \end{cases} \quad (1)$$

$$\tau(r) = \begin{cases} \psi(r), & r \in P-Q, \\ \xi(r), & r \in Q-P, \\ \psi(r) \vee \xi(r), & r \in P \cap Q. \end{cases} \quad (2)$$

类似地, (\hat{W}_ψ, P) 和 (\hat{Z}_ξ, Q) 的交也是广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集, 记为 $(\hat{W}_\psi, P) \hat{\cap} (\hat{Z}_\xi, Q) = (\hat{T}_\tau, R)$, 其中 $R = P \cap Q \neq \emptyset$, 对于 $\forall r \in R$, 有 $\tilde{T}(r) = \tilde{W}(r) \cap \tilde{Z}(r)$, 且 $\tau(r) = \psi(r) \wedge \xi(r)$, 即

$$\tilde{T}(r) = \begin{cases} \tilde{W}(r), & r \in P-Q, \\ \tilde{Z}(r), & r \in Q-P, \\ \tilde{W}(r) \cap \tilde{Z}(r), & r \in P \cap Q, \end{cases} \quad (3)$$

$$\tau(r) = \begin{cases} \psi(r), & r \in P-Q, \\ \xi(r), & r \in Q-P, \\ \psi(r) \wedge \xi(r), & r \in P \cap Q. \end{cases} \quad (4)$$

定义 5 设 $(\hat{W}_\psi, P), (\hat{Z}_\xi, Q) \in K_{GIVq\text{-ROHFSSs}(U)}$, 则

(1) 设 $\hat{W}_\psi(p) = (\tilde{W}(p), \psi(p)), \hat{Z}_\xi(q) = (\tilde{Z}(q), \xi(q))$, 当 $P \subseteq Q$ 、对于 $\forall p \in P$ 有 $\psi(p) \leq \xi(p)$ 、 $\tilde{W} \subseteq \tilde{Z}$ 三个条件成立时, (\hat{W}_ψ, P) 称为 (\hat{Z}_ξ, Q) 的广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软子集, 记为 $(\hat{W}_\psi, P) \hat{\subset} (\hat{Z}_\xi, Q)$ 。进而, 若 $(\hat{W}_\psi, P) \hat{\subset} (\hat{Z}_\xi, Q)$ 且 $(\hat{Z}_\xi, Q) \hat{\subset} (\hat{W}_\psi, P)$, 则称 (\hat{W}_ψ, P) 和 (\hat{Z}_ξ, Q) 相等, 记为 $(\hat{W}_\psi, P) = (\hat{Z}_\xi, Q)$ 。

(2) $K_{GIVq\text{-ROHFSSs}}$ 的“且”及“或”运算定义如下:

① (\hat{W}_ψ, P) 且 (\hat{Z}_ξ, Q) 定义为 $(\hat{W}_\psi, P) \wedge (\hat{Z}_\xi, Q) = (\hat{T}_\gamma, P \times Q)$, 其中对于 $\forall (p, q) \in (P, Q)$, 有 $\hat{T}_\gamma: P \times Q \rightarrow \tilde{IV}(U) \times [0, 1]^2, \gamma: P \times Q \rightarrow [0, 1]^2, \tilde{T}(p, q) = \tilde{W}(p) \cap \tilde{Z}(q), \gamma(p, q) = \psi(p) \wedge \xi(q)$ 。

② (\hat{W}_ψ, P) 或 (\hat{Z}_ξ, Q) 定义为 $(\hat{W}_\psi, P) \vee (\hat{Z}_\xi, Q) = (\hat{N}_\beta, P \times Q)$, 其中对于 $\forall (p, q) \in (P, Q)$, 有 $\hat{N}_\beta: P \times Q \rightarrow \tilde{IV}(U) \times [0, 1]^2, \beta: P \times Q \rightarrow [0, 1]^2, \tilde{N}(p, q) = \tilde{W}(p) \cup \tilde{Z}(q), \beta(p, q) = \psi(p) \vee \xi(q)$ 。

下面研究 $K_{GIVq\text{-ROHFSSs}}$ 的基本运算性质。

定理 1 设 $(\hat{W}_\psi, P), (\hat{Z}_\xi, Q) \in K_{GIVq\text{-ROHFSSs}(U)}$, 若 $(\hat{W}_\psi, P) \hat{\subset} (\hat{Z}_\xi, Q)$, 则下列结论成立:

- (1) $(\hat{W}_\psi, P) \hat{\cup} (\hat{W}_\psi, P) = (\hat{W}_\psi, P), (\hat{W}_\psi, P) \hat{\cap} (\hat{W}_\psi, P) = (\hat{W}_\psi, P)$;
- (2) $(\hat{W}_\psi, P) \hat{\cup} \hat{U}_P = \hat{U}_P, (\hat{W}_\psi, P) \hat{\cap} \hat{U}_P = (\hat{W}_\psi, P)$;
- (3) $(\hat{W}_\psi, P) \hat{\cup} (\hat{Z}_\xi, Q) = (\hat{Z}_\xi, Q) \hat{\cup} (\hat{W}_\psi, P), (\hat{W}_\psi, P) \hat{\cap} (\hat{Z}_\xi, Q) = (\hat{Z}_\xi, Q) \cap (\hat{W}_\psi, P)$;
- (4) $(\hat{W}_\psi, P)^c \hat{\cap} (\hat{Z}_\xi, Q)^c \hat{\subseteq} [(\hat{W}_\psi, P) \hat{\cap} (\hat{Z}_\xi, Q)]^c, [(\hat{W}_\psi, P) \hat{\cup} (\hat{Z}_\xi, Q)]^c \hat{\subseteq} (\hat{W}_\psi, P)^c \hat{\cup} (\hat{Z}_\xi, Q)^c$;
- (5) $\hat{\Phi}_P^c = \hat{U}_P, \hat{U}_P^c = \hat{\Phi}_P$;
- (6) $[(\hat{W}_\psi, P) \hat{\cap} (\hat{Z}_\xi, Q)]^c = (\hat{W}_\psi, P)^c \hat{\cup} (\hat{Z}_\xi, Q)^c, [(\hat{W}_\psi, P) \hat{\cup} (\hat{Z}_\xi, Q)]^c = (\hat{W}_\psi, P)^c \hat{\cap} (\hat{Z}_\xi, Q)^c$;
- (7) $[(\hat{W}_\psi, P) \wedge (\hat{Z}_\xi, Q)]^c = (\hat{W}_\psi, P)^c \vee (\hat{Z}_\xi, Q)^c, [(\hat{W}_\psi, P) \vee (\hat{Z}_\xi, Q)]^c = (\hat{W}_\psi, P)^c \wedge (\hat{Z}_\xi, Q)^c$ 。

下面采用一个例子, 验证 2 个 $K_{GIVq\text{-ROHFSSs}}$ 的并、交、补、且、或运算的性质。

例 1 设 $P \subseteq E$, 论域 U 上的 2 个 $K_{GIVq\text{-ROHFSSs}}$ (\hat{W}_ψ, P) 和 (\hat{Z}_ξ, Q) 分别如表 1、2 所示, (\hat{W}_ψ, P) 和 (\hat{Z}_ξ, Q) 的并、交、补、且、或运算部分结果如表 3 所示。显然, $[(\hat{W}_\psi(u_1), P) \hat{\cap} (\hat{Z}_\xi(u_1), Q)]^c = (\hat{W}_\psi(u_1), P)^c \hat{\cup} (\hat{Z}_\xi(u_1), Q)^c$, 即定理 1 中(6)成立。其余运算与性质可以类似地观测与验证。

表1 广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集 (\hat{W}_ψ, P)

Table 1 Generalized interval-valued q -rung orthopair hesitant fuzzy soft sets (\hat{W}_ψ, P)

论域	e_1	e_2
u_1	$\{[0.4, 0.5], [0.4, 0.6]\}, \{[0.3, 0.5], [0.4, 0.5]\}$	$\{[0.6, 0.7], [0.5, 0.7]\}, \{[0.4, 0.5], [0.4, 0.6]\}$
u_2	$\{[0.6, 0.7], [0.5, 0.6]\}, \{[0.4, 0.5], [0.4, 0.6]\}$	$\{[0.5, 0.6], [0.5, 0.7]\}, \{[0.4, 0.5], [0.2, 0.3]\}$
u_3	$\{[0.6, 0.7], [0.5, 0.6]\}, \{[0.4, 0.5], [0.3, 0.4]\}$	$\{[0.6, 0.7], [0.7, 0.8]\}, \{[0.4, 0.5], [0.3, 0.4]\}$
(μ_1, ν_1)	$([0.6, 0.8], [0.2, 0.4])$	$([0.5, 0.7], [0.1, 0.3])$

表2 广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集 (\hat{Z}_ξ, Q)

Table 2 Generalized interval-valued q -rung orthopair hesitant fuzzy soft sets (\hat{Z}_ξ, Q)

论域	e_1	e_2
u_1	$\{[0.5, 0.7], [0.6, 0.7]\}, \{[0.4, 0.5], [0.3, 0.4]\}$	$\{[0.5, 0.6], [0.6, 0.7]\}, \{[0.4, 0.5], [0.3, 0.4]\}$
u_2	$\{[0.6, 0.7], [0.5, 0.6]\}, \{[0.4, 0.5], [0.3, 0.4]\}$	$\{[0.5, 0.6], [0.5, 0.7]\}, \{[0.4, 0.5], [0.3, 0.4]\}$
u_3	$\{[0.6, 0.7], [0.5, 0.6]\}, \{[0.4, 0.5], [0.3, 0.4]\}$	$\{[0.6, 0.7], [0.7, 0.8]\}, \{[0.4, 0.5], [0.3, 0.4]\}$
(μ_2, ν_2)	$([0.6, 0.8], [0.4, 0.6])$	$([0.5, 0.7], [0.1, 0.3])$

表3 (\hat{W}_ψ, P) 和 (\hat{Z}_ξ, Q) 的部分运算结果

Table 3 The partial operation results of (\hat{W}_ψ, P) and (\hat{Z}_ξ, Q)

运算	e_1	e_2
$\hat{W}_\psi(u_1) \cup \hat{Z}_\psi(u_1)$	$\{[0.5, 0.7], [0.6, 0.7], [0.6, 0.7], [0.5, 0.7]\}, \{[0.3, 0.5], [0.3, 0.4], [0.3, 0.4], [0.4, 0.5]\}$	$\{[0.6, 0.7], [0.6, 0.7], [0.6, 0.7], [0.5, 0.6]\}, \{[0.4, 0.5], [0.3, 0.4], [0.3, 0.4], [0.4, 0.5]\}$
$\hat{W}_\psi(u_1) \cap \hat{Z}_\psi(u_1)$	$\{[0.4, 0.5], [0.4, 0.6], [0.4, 0.5], [0.4, 0.6]\}, \{[0.4, 0.5], [0.4, 0.5], [0.3, 0.5], [0.4, 0.5]\}$	$\{[0.5, 0.6], [0.5, 0.7], [0.5, 0.6], [0.5, 0.7]\}, \{[0.4, 0.5], [0.4, 0.6], [0.4, 0.5], [0.4, 0.6]\}$
$\hat{W}_\psi(u_1) \vee \hat{Z}_\psi(u_1)$	$\{[0.5, 0.7], [0.6, 0.7], [0.6, 0.7], [0.5, 0.7]\}, \{[0.3, 0.5], [0.3, 0.4], [0.3, 0.4], [0.4, 0.5]\}$	$\{[0.6, 0.7], [0.6, 0.7], [0.6, 0.7], [0.5, 0.6]\}, \{[0.4, 0.5], [0.3, 0.4], [0.3, 0.4], [0.4, 0.5]\}$
$\hat{W}_\psi(u_1) \wedge \hat{Z}_\psi(u_1)$	$\{[0.4, 0.5], [0.4, 0.6], [0.4, 0.5], [0.4, 0.6]\}, \{[0.4, 0.5], [0.4, 0.5], [0.3, 0.5], [0.4, 0.5]\}$	$\{[0.5, 0.6], [0.5, 0.7], [0.5, 0.6], [0.5, 0.7]\}, \{[0.4, 0.5], [0.4, 0.6], [0.4, 0.5], [0.4, 0.6]\}$
$[\hat{W}_\psi(u_1) \cap \hat{Z}_\psi(u_1)]^c$	$\{[0.4, 0.5], [0.4, 0.5], [0.3, 0.5], [0.4, 0.5]\}, \{[0.4, 0.5], [0.4, 0.6], [0.4, 0.5], [0.4, 0.6]\}$	$\{[0.4, 0.5], [0.4, 0.6], [0.4, 0.5], [0.4, 0.6]\}, \{[0.5, 0.6], [0.5, 0.7], [0.5, 0.6], [0.5, 0.7]\}$
$\hat{W}_\psi(u_1)^c$	$\{[0.3, 0.5], [0.4, 0.5]\}, \{[0.4, 0.5], [0.4, 0.6]\}$	$\{[0.4, 0.5], [0.4, 0.6]\}, \{[0.6, 0.7], [0.5, 0.7]\}$
$\hat{Z}_\xi(u_1)^c$	$\{[0.4, 0.5], [0.3, 0.4]\}, \{[0.5, 0.7], [0.6, 0.7]\}$	$\{[0.4, 0.5], [0.3, 0.4]\}, \{[0.5, 0.6], [0.6, 0.7]\}$
$\hat{Z}_\xi(u_1)^c \cup \hat{W}_\psi(u_1)^c$	$\{[0.4, 0.5], [0.4, 0.5], [0.3, 0.5], [0.4, 0.5]\}, \{[0.4, 0.5], [0.4, 0.6], [0.4, 0.5], [0.4, 0.6]\}$	$\{[0.4, 0.5], [0.4, 0.6], [0.4, 0.5], [0.4, 0.6]\}, \{[0.5, 0.6], [0.5, 0.7], [0.5, 0.6], [0.5, 0.7]\}$

2 广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集的相关系数

相关系数能够有效衡量 2 个变量之间的相关性,是不确定度量的重要指标。本节先回顾 K_{GDHFSS} 的相关性与相关系数,再提取关联于区间值的平均隶属度与平均非隶属度,进而扩展定义 $K_{\text{GIV}q\text{-ROHFSS}}$ 的相关性与相关系数。

定义 6^[9] 2 个 K_{GDHFSS} 的 $\alpha = (\tilde{F}_{\mu\nu}, A)$ 和 $\beta = (\tilde{G}_{\delta\varepsilon}, B)$ 的相关性和相关系数分别为

$$C_{K_{\text{GDHFSS}}}(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{k_{ij}} \frac{\mu(e_j) + \delta(e_j)}{2} \sum_{\theta=1}^{k_{ij}} h_{\tilde{F}_{\mu\nu}, \sigma(\theta)}(x_i, e_j) h_{\tilde{G}_{\delta\varepsilon}, \sigma(\theta)}(x_i, e_j) + \frac{1}{l_{ij}} \frac{\nu(e_j) + \varepsilon(e_j)}{2} \sum_{\eta=1}^{l_{ij}} g_{\tilde{F}_{\mu\nu}, \zeta(\eta)}(x_i, e_j) g_{\tilde{G}_{\delta\varepsilon}, \zeta(\eta)}(x_i, e_j) \right], \quad (5)$$

$$\rho_{K_{\text{GDHFSS}}}(\alpha, \beta) = \frac{C_{K_{\text{GDHFSS}}}(\alpha, \beta)}{\sqrt{C_{K_{\text{GDHFSS}}}(\alpha, \alpha)} \sqrt{C_{K_{\text{GDHFSS}}}(\beta, \beta)}}, \quad (6)$$

其中,对于 $\forall x_i \in X$, 有 $k_{ij} = \max \{k(h_{\bar{f}}(x_i, e_j)), k(h_{\bar{g}}(x_i, e_j))\}$, $l_{ij} = \max \{l(g_{\bar{f}}(x_i, e_j)), l(g_{\bar{g}}(x_i, e_j))\}$; 这里的 $k(h_{\bar{f}}(x_i, e_j))$ 和 $k(h_{\bar{g}}(x_i, e_j))$ 分别表示 $h_{\bar{f}}(x_i, e_j)$ 和 $h_{\bar{g}}(x_i, e_j)$ 中元素的个数, $l(g_{\bar{f}}(x_i, e_j))$ 和 $l(g_{\bar{g}}(x_i, e_j))$ 分别表示 $g_{\bar{f}}(x_i, e_j)$ 和 $g_{\bar{g}}(x_i, e_j)$ 中元素的个数。

首先对 $K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}$ 中元素的排序与补位进行定义,再定义关联于区间值的平均隶属度和平均非隶属度,最后将 K_{GDHFSS} 的相关性和相关系数分别扩展为 $K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}$ 的相关性和相关系数。

$P \subseteq E, \alpha' = (\hat{W}_\psi, P), \beta' = (\hat{Z}_\xi, Q) \in K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}(U)$, 其包含的区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊元一般是无序的。为了方便计算,本文采用升序排列,即对 $\alpha' = (\hat{W}_\psi, P)$ 中的区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊元 $d_{\alpha'}(u_i, e_j) = d_{\alpha'}(\alpha(u_i, e_j), \beta(u_i, e_j))$, 令 $\sigma: (1, 2, \dots, s) \rightarrow (1, 2, \dots, s)$ 是满足 $\alpha_{\hat{W}_\psi\sigma(\theta)} \leq \alpha_{\hat{W}_\psi\sigma(\theta+1)}$ 的一个序列, $\alpha_{\hat{W}_\psi\sigma(\theta)}$ 是 $\alpha'(u_i, e_j)$ 中第 θ 大的值 ($\theta = 1, 2, \dots, s-1$), 其中 s 是 $\alpha'(u_i, e_j)$ 中元素的个数; 令 $\zeta: (1, 2, \dots, t) \rightarrow (1, 2, \dots, t)$ 是满足 $\beta_{\hat{W}_\psi\zeta(\eta)} \leq \beta_{\hat{W}_\psi\zeta(\eta+1)}$ 的一个序列, 且 $\beta_{\hat{W}_\psi\zeta(\eta)}$ 是 $\beta'(u_i, e_j)$ 中第 η 大的值 ($\eta = 1, 2, \dots, t-1$), 其中 t 是 $\beta'(u_i, e_j)$ 中元素的个数。不同的 $K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}$ 中元素个数可能不同, 为了方便计算, 本文采取乐观主义原则统一在元素个数少的集合中添加该集合的最大元素, 从而使 2 个集合的元素个数一致。

定义 7 设 $(\hat{W}_\psi, P) \in K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}(U)$, $e_j \in P$, $\text{Int}[0, 1]$ 表示 $[0, 1]$ 的子区间。 $\hat{W}_\psi(e_j) = (\tilde{W}(e_j), \psi(e_j))$, $\tilde{W}(P) = \{ \langle w, I_{\tilde{W}(e_j)}(w) \rangle \mid w \in U \} = \{ \langle w, (\alpha_{I_{\tilde{W}(e_j)}}(w), \beta_{I_{\tilde{W}(e_j)}}(w)) \rangle \mid w \in U \}$, $\alpha_{I_{\tilde{W}(e_j)}}(w) = \{ a = [\alpha_a^-, \alpha_a^+] \mid a \in \text{Int}[0, 1] \}$, $\beta_{I_{\tilde{W}(e_j)}}(w) = \{ b = [\beta_a^-, \beta_a^+] \mid b \in \text{Int}[0, 1] \}$ 。定义 $K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}(\hat{W}_\psi, P)$ 的平均隶属度和平均非隶属度分别为

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{I_{\tilde{W}\sigma(\theta)}}(u_i, e_j) &= \frac{1}{2} [\alpha_{I_{\tilde{W}\sigma(\theta)}}^-(u_i, e_j) + \alpha_{I_{\tilde{W}\sigma(\theta)}}^+(u_i, e_j)], \\ \bar{\beta}_{I_{\tilde{W}\zeta(\eta)}}(u_i, e_j) &= \frac{1}{2} [\beta_{I_{\tilde{W}\zeta(\eta)}}^-(u_i, e_j) + \beta_{I_{\tilde{W}\zeta(\eta)}}^+(u_i, e_j)]. \end{aligned} \quad (7)$$

定义 8 2 个 $K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}$ 中 $\alpha = (\hat{W}_\psi, P)$ 和 $\beta = (\hat{Z}_\xi, Q)$ 的相关性和相关系数分别为

$$\begin{aligned} C_{K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}}(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{k_{ij}} \frac{\bar{\mu}(e_j) + \bar{\delta}(e_j)}{2} \left[\sum_{\theta=1}^{k_{ij}} \bar{\alpha}_{I_{\tilde{W}\sigma(\theta)}}^q(u_i, e_j) \bar{\alpha}_{I_{\tilde{Z}\sigma(\theta)}}^q(u_i, e_j) \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{l_{ij}} \frac{\bar{\nu}(e_j) + \bar{\varepsilon}(e_j)}{2} \left[\sum_{\eta=1}^{l_{ij}} \bar{\beta}_{I_{\tilde{W}\zeta(\eta)}}^q(u_i, e_j) \bar{\beta}_{I_{\tilde{Z}\zeta(\eta)}}^q(u_i, e_j) \right]^{\frac{1}{q}} \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\rho_{K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}}(\alpha, \beta) = \frac{C_{K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}}(\alpha, \beta)}{\sqrt{C_{K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}}(\alpha, \alpha)} \sqrt{C_{K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}}(\beta, \beta)}}, \quad (9)$$

其中, q 为正整数, $\bar{\mu}(e_j) = \frac{\mu(e_j)^- + \mu(e_j)^+}{2}$, $\bar{\delta}(e_j) = \frac{\delta(e_j)^- + \delta(e_j)^+}{2}$, $\bar{\nu}(e_j) = \frac{\nu(e_j)^- + \nu(e_j)^+}{2}$, $\bar{\varepsilon}(e_j) = \frac{\varepsilon(e_j)^- + \varepsilon(e_j)^+}{2}$ 。对于 $\forall u_i \in U$, 有 $k_{ij} = \max \{k(\alpha_{\tilde{w}}(u_i, e_j)), k(\alpha_{\tilde{z}}(u_i, e_j))\}$, $l_{ij} = \max \{l(\beta_{\tilde{w}}(u_i, e_j)), l(\beta_{\tilde{z}}(u_i, e_j))\}$, 这里的 $k(\alpha_{\tilde{w}}(u_i, e_j))$ 和 $k(\alpha_{\tilde{z}}(u_i, e_j))$ 分别表示 $\alpha_{\tilde{w}}(u_i, e_j)$ 和 $\alpha_{\tilde{z}}(u_i, e_j)$ 中元素的个数, $l(\beta_{\tilde{w}}(u_i, e_j))$ 和 $l(\beta_{\tilde{z}}(u_i, e_j))$ 分别表示 $\beta_{\tilde{w}}(u_i, e_j)$ 和 $\beta_{\tilde{z}}(u_i, e_j)$ 中元素的个数。

定理 2 若 $\alpha = (\hat{W}_\psi, P)$, $\beta = (\hat{Z}_\xi, Q) \in K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}(U)$, 则

(1) $\rho_{K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}}(\alpha, \beta)$ 满足: ① $\rho_{K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}}(\alpha, \beta) = \rho_{K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}}(\beta, \alpha)$; ② $0 \leq \rho_{K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}}(\alpha, \beta) \leq 1$; ③ 若 $\alpha = \beta$, 则 $\rho_{K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}}(\alpha, \beta) = 1$ 。

(2) 在 $C_{K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}}(\alpha, \beta)$ 中, 当 $q = 1$ 且 $\mu(e_j)^- = \mu(e_j)^+$, $\delta(e_j)^- = \delta(e_j)^+$, $\nu(e_j)^- = \nu(e_j)^+$, $\varepsilon(e_j)^- = \varepsilon(e_j)^+$ 时, $C_{K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}}(\alpha, \beta) = C_{K_{\text{GDHFSS}}}(\alpha, \beta)$, 进而有 $\rho_{K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}}(\alpha, \beta) = \rho_{K_{\text{GDHFSS}}}(\alpha, \beta)$ 。

对于 K_{GDHFSS} 的相关性见式(5), 将 K_{GDHFSS} 扩展为 $K_{\text{GIV}_q\text{-ROHFSS}}$ 后, 通过式(7)提取区间数据的平均值作为新的隶属度和非隶属度, 并在式(5)中隶属度和非隶属度的指数位置添加参数 q , 在两处求和的指数位置都

加 $\frac{1}{q}$,由此得到了式(8),进而, K_{GDHFSS} 的相关系数扩张为 $K_{GIVq-ROHFSS}$ 的相关系数,见式(6)、(9)。相反地,定理2(2)中当 $q=1$ 且隶属度、非隶属度的区间上下限分别相等时,式(8)、(9)分别退化为式(5)、(6)。将式(5)、(6)扩张为式(8)、(9)后,不仅能度量隶属度和非隶属度为区间值时对象间的相关性,还能度量隶属函数区域更大时对象间的相关性,适用范围更广。

下面采用一个例子,演示2个 $K_{GIVq-ROHFSS}$ 的相关性及相关系数的计算过程。

例2 考虑例1的2个 $K_{GIVq-ROHFSS}$ 中的 $\alpha=(\hat{W}_\psi, P)$ 和 $\beta=(\hat{Z}_\xi, Q)$,利用定义8可得 q 取不同值时的相关系数, $q=1,2,\dots,5$,5个相关系数见表4所示。作为示范,此处提供 $q=2$ 时 α 和 β 间相关系数的计算过程,即

$$\begin{aligned}
 & C_{K_{GIVq-ROHFSS}}(\alpha, \beta) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{(0.6+0.8)/2+(0.6+0.8)/2}{2} \times \left[\left(\frac{0.4+0.5}{2} \right)^2 \times \left(\frac{0.5+0.7}{2} \right)^2 + \left(\frac{0.4+0.6}{2} \right)^2 \times \left(\frac{0.6+0.7}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &+ \frac{1}{2} \times \frac{(0.2+0.4)/2+(0.4+0.6)/2}{2} \times \left[\left(\frac{0.3+0.5}{2} \right)^2 \times \left(\frac{0.4+0.5}{2} \right)^2 + \left(\frac{0.4+0.5}{2} \right)^2 \times \left(\frac{0.3+0.4}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &+ \dots + \frac{1}{2} \times \frac{(0.1+0.3)/2+(0.1+0.3)/2}{2} \times \left[\left(\frac{0.4+0.5}{2} \right)^2 \times \left(\frac{0.4+0.5}{2} \right)^2 + \left(\frac{0.3+0.4}{2} \right)^2 \times \left(\frac{0.3+0.4}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= 1.1436。
 \end{aligned}$$

同理可得 $C_{K_{GIVq-ROHFSS}}(\alpha, \alpha) = 1.0500$, $C_{K_{GIVq-ROHFSS}}(\beta, \beta) = 1.2990$, 因此有

$$\begin{aligned}
 \rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(\alpha, \beta) &= \frac{C_{K_{GIVq-ROHFSS}}(\alpha, \beta)}{\sqrt{C_{K_{GIVq-ROHFSS}}(\alpha, \alpha)} \times \sqrt{C_{K_{GIVq-ROHFSS}}(\beta, \beta)}} \\
 &= \frac{1.1436}{\sqrt{1.0500} \times \sqrt{1.2990}} = 0.9792。
 \end{aligned}$$

表4 广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集 (\hat{W}_ψ, P) 和 (\hat{Z}_ξ, Q) 的相关系数

Table 4 Correlation coefficient of generalized interval-valued q -rung orthopair hesitant fuzzy soft sets (\hat{W}_ψ, P) and (\hat{Z}_ξ, Q)

q	$C_{K_{GIVq-ROHFSS}}(\alpha, \alpha)$	$C_{K_{GIVq-ROHFSS}}(\beta, \beta)$	$C_{K_{GIVq-ROHFSS}}(\alpha, \beta)$	$\rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(\alpha, \beta)$
1	1.478 2	1.815 4	1.613 3	0.984 8
2	1.050 0	1.299 0	1.143 6	0.979 2
3	0.939 6	1.170 2	1.021 4	0.974 0
4	0.890 7	1.115 7	0.966 4	0.969 4
5	0.864 0	1.087 3	0.935 7	0.965 4

3 基于广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集相关系数的多属性决策

相关系数度量了对象之间的相关程度,已经成功应用于多属性决策。本章采用上章提出的 $K_{GIVq-ROHFSS}$ 的相关系数,设计一种相应的多属性决策方法。

3.1 决策步骤

设 U 是一个初始论域, E 是一个参数集,广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集理想对象由决策者给出,广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集 $\zeta_k=(\tilde{W}_\psi, \beta_k)$ 为可供选择的对象。相关的多属性决策算法步骤如下:

- 步骤1 采用广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集,表示理想对象和备选对象 ζ_k 的评估结果;
- 步骤2 利用式(7),将上述评估结果转化为其对应的平均隶属度和平均非隶属度;
- 步骤3 利用式(8)、(9),计算每个候选对象与理想对象之间的相关系数;
- 步骤4 根据相关系数的大小排序,选择最优对象。

3.2 实例分析

为了便于分析与对比,通过文献[9]中的医疗资源实例及文献[18]中的能源项目投资案例分别对上述

新建决策方法进行演示与验证。

定义 9 设定单数值到区间值的转换公式:

$$\begin{aligned} \alpha_{I_{\tilde{w}(p)}(w)}^- &= \max \{0, \alpha_{I_{\tilde{w}(p)}(w)} \times (1-r)\}, & \alpha_{I_{\tilde{w}(p)}(w)}^+ &= \min \{1, \alpha_{I_{\tilde{w}(p)}(w)} \times (1+r)\}, \\ \beta_{I_{\tilde{w}(p)}(w)}^- &= \max \{0, \beta_{I_{\tilde{w}(p)}(w)} \times (1-r)\}, & \beta_{I_{\tilde{w}(p)}(w)}^+ &= \min \{1, \beta_{I_{\tilde{w}(p)}(w)} \times (1+r)\}, \end{aligned} \tag{10}$$

其中, $r \in [0, 1]$, $\alpha_{I_{\tilde{w}(p)}(w)}$ 为隶属度, $\beta_{I_{\tilde{w}(p)}(w)}$ 为非隶属度。

例 3 针对文献[9]的医疗资源实例,相关的比照样本及 4 家医院的数据如表 5 所示。本文先采取乐观主义原则将表 5 的隶属度与非隶属度均补充为 3 个,其次取 $r=0.05$ 并按照定义 9 进行区间值扩充变换,转换后医院 A^* 的评估结果如表 6 所示,类似地可得转换后 4 家医院 A_1, A_2, A_3, A_4 的评估数据,此处省略。式(8)中, $q = 2$, 则由式(8)、(9), 可得 $\rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(A^*, A_1) = 0.9224$, $\rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(A^*, A_2) = 0.8997$, $\rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(A^*, A_3) = 0.9602$, $\rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(A^*, A_4) = 0.8129$, 排序得 $\rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(A^*, A_3) > \rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(A^*, A_1) > \rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(A^*, A_2) > \rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(A^*, A_4)$, 与文献[9]的排序一致,即医院 A_3 在优化资源配置上采取的措施最有效。

表 5 文献[9]中比照样本及 4 家医院的评估结果

Table 5 The evaluation results of the comparison sample and four hospitals in reference [9]

论域	医院	卫生服务环境评估结果	个性化诊断评估结果	社会资源优化配置评估结果
x_1	A^*	{0.3,0.4,0.6}, {0.2,0.3,0.4}	{0.4,0.7,0.8}, {0.1,0.2}	{0.4,0.5,0.6}, {0.1,0.2}
x_2	A^*	{0.4,0.5,0.7}, {0.1,0.2,0.3}	{0.3,0.5,0.6}, {0.2,0.3,0.4}	{0.5,0.7,0.8}, {0.1,0.2,0.2}
x_3	A^*	{0.1,0.2,0.4}, {0.1,0.4,0.5}	{0.1,0.4,0.8}, {0.1,0.1,0.2}	{0.5,0.6,0.7}, {0.1,0.2,0.3}
$\tilde{\mu}_0$	A^*	<0.2,0.5>	<0.1,0.3>	<0.7,0.2>
x_1	A_1	{0.2,0.4,0.8}, {0.1,0.2}	{0.1,0.3,0.5}, {0.3,0.4}	{0.2,0.6,0.8}, {0.1,0.1,0.2}
x_2	A_1	{0.5,0.6,0.8}, {0.1,0.2,0.2}	{0.3,0.4,0.4}, {0.4,0.5,0.6}	{0.1,0.1,0.7}, {0.2,0.2,0.3}
x_3	A_1	{0.2,0.3,0.6}, {0.2,0.3,0.4}	{0.2,0.5,0.7}, {0.1,0.2,0.3}	{0.4,0.7,0.8}, {0.1,0.2,0.2}
$\tilde{\mu}_1$	A_1	<0.5,0.4>	<0.3,0.6>	<0.2,0.4>
x_1	A_2	{0.2,0.5,0.7}, {0.1,0.2,0.3}	{0.1,0.7,0.8}, {0.1,0.2}	{0.1,0.2,0.3}, {0.3,0.4,0.6}
x_2	A_2	{0.3,0.5,0.7}, {0.1,0.3,0.3}	{0.2,0.3,0.5}, {0.3,0.4,0.5}	{0.1,0.6,0.8}, {0.1,0.2,0.2}
x_3	A_2	{0.1,0.4,0.4}, {0.3,0.5,0.5}	{0.1,0.2,0.8}, {0.1,0.2,0.2}	{0.1,0.3,0.3}, {0.3,0.6,0.7}
$\tilde{\mu}_2$	A_2	<0.3,0.2>	<0.4,0.2>	<0.3,0.6>
x_1	A_3	{0.2,0.4,0.6}, {0.1,0.2,0.3}	{0.4,0.6,0.8}, {0.1,0.1,0.2}	{0.3,0.5,0.8}, {0.1,0.2,0.2}
x_2	A_3	{0.4,0.5,0.6}, {0.2,0.3,0.4}	{0.1,0.5,0.7}, {0.2,0.2,0.3}	{0.6,0.7,0.8}, {0.1,0.1,0.2}
x_3	A_3	{0.1,0.3,0.4}, {0.3,0.5,0.6}	{0.3,0.4,0.7}, {0.2,0.3,0.3}	{0.4,0.7,0.8}, {0.1,0.2,0.2}
$\tilde{\mu}_3$	A_3	<0.1,0.3>	<0.3,0.3>	<0.4,0.4>
x_1	A_4	{0.6,0.7,0.7}, {0.1,0.2,0.3}	{0,0.2,0.3}, {0.4,0.6,0.7}	{0.1,0.3,0.4}, {0.4,0.5,0.6}
x_2	A_4	{0.4,0.5,0.6}, {0.2,0.3,0.4}	{0.1,0.2,0.5}, {0.3,0.4,0.5}	{0,0.1,0.2}, {0.6,0.7,0.8}
x_3	A_4	{0.2,0.4,0.5}, {0.1,0.3,0.5}	{0.1,0.2,0.2}, {0.4,0.5,0.5}	{0.1,0.1,0.1}, {0.6,0.8,0.9}
$\tilde{\mu}_4$	A_4	<0.2,0.3>	<0.3,0.4>	<0.5,0.3>

表 6 转换到区间值时($r=0.05$)比照样本 A^* 的评估结果

Table 6 The evaluation results of comparison sample A^* when converting to interval values ($r=0.05$)

论域	卫生服务环境评估结果	个性化诊断评估结果
x_1	{ [0.285,0.315], [0.380,0.420], [0.570,0.630] }, { [0.190,0.210], [0.285,0.315], [0.380,0.420] }	{ [0.380,0.420], [0.665,0.735], [0.760,0.840] }, { [0.095,0.105], [0.190,0.210], [0.190,0.210] }
x_2	{ [0.380,0.420], [0.475,0.525], [0.665,0.735] }, { [0.095,0.105], [0.190,0.210], [0.285,0.315] }	{ [0.285,0.315], [0.475,0.525], [0.570,0.630] }, { [0.190,0.210], [0.285,0.315], [0.380,0.420] }
x_3	{ [0.095,0.105], [0.190,0.210], [0.380,0.420] }, { [0.095,0.105], [0.380,0.420], [0.475,0.525] }	{ [0.095,0.105], [0.380,0.420], [0.760,0.840] }, { [0.095,0.105], [0.095,0.105], [0.190,0.210] }
$\tilde{\mu}_0$	< [0.190,0.210], [0.475,0.525] >	< [0.095,0.105], [0.285,0.315] >
论域	社会资源优化配置评估结果	
x_1	{ [0.380,0.420], [0.475,0.525], [0.570,0.630] }, { [0.095,0.105], [0.190,0.210], [0.380,0.420] }	
x_2	{ [0.475,0.525], [0.665,0.735], [0.760,0.840] }, { [0.095,0.105], [0.190,0.210], [0.190,0.210] }	
x_3	{ [0.475,0.525], [0.570,0.630], [0.665,0.735] }, { [0.095,0.105], [0.190,0.210], [0.285,0.315] }	
$\tilde{\mu}_0$	< [0.665,0.735], [0.190,0.210] >	

此外,图 1(a)直观地展示了 $q=2$ 且 $r \in [0, 0.4]$ 时这 4 家医院与比照样本之间的相关系数。由图 1(a) 可知, 取得相同排序结果, 即 $\rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_3) > \rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_1) > \rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_2) > \rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_4)$, 与文献[9]的排序一致。显然, 相关系数 $\rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_i)$ ($i=1, 2, 3, 4$) 具有鲁棒性。图 1(b) 为 $q \in [1, 5]$ 且 $q \in \mathbf{N}^*$ 时的相关系数变化二维图。同时, 图 2 所示为 (λ, q) 二元变化的测量及排序结果。显然 $q=1$ 或 $q=2, r \in [0, 0.4]$ 时, 排序为 $\rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_3) > \rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_1) > \rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_2) > \rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_4)$, 而当 $q > 2$ 时, 无论 r 取 $[0, 0.4]$ 间的任意值, 都有 $\rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_1) = \rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_2)$, 而对结果排序都有 $\rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_3) > \rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_1) = \rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_2) > \rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_4)$, 表明了决策结果关于参数的鲁棒性。

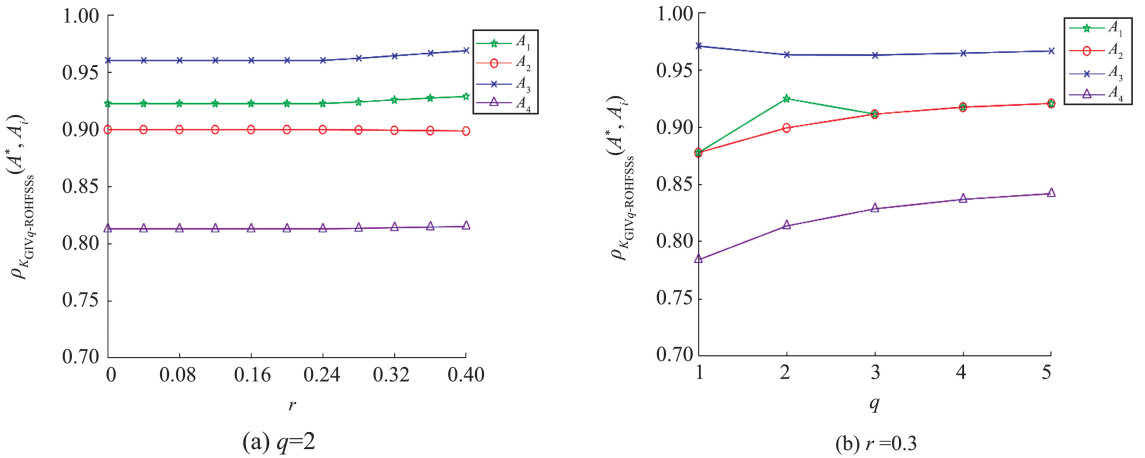


图 1 关于 r, q 一元变化的 $\rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_i)$ 与排序结果二维图

Fig.1 $\rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_i)$ on the monadic variation of r and q and its two-dimensional graph of the sorting results

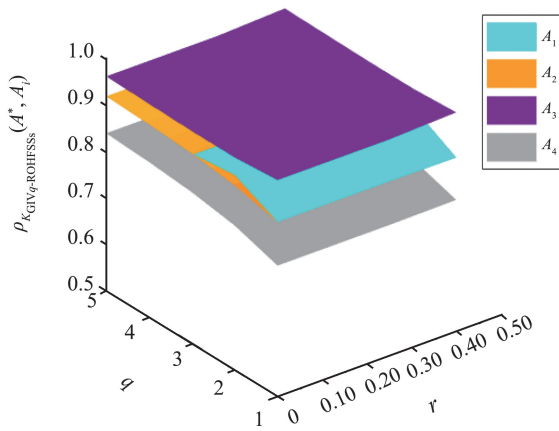


图 2 关于 r, q 二元变化的 $\rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_i)$ 与排序结果三维图

Fig.2 $\rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(A^*, A_i)$ on the binary variation of r and q and its three-dimensional graph of the sorting results

例 4 针对文献[18]的能源项目投资案例, 相关的 5 个备选方案的评估数据如表 7 所示, 理想能源项目的评估数据如表 8 所示。式 (8) 中, $q=2$, 则由式 (8)、(9), 可得 $\rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(x^*, x_1) = 0.8499$, $\rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(x^*, x_2) = 0.8510$, $\rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(x^*, x_3) = 0.9122$, $\rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(x^*, x_4) = 0.8626$, $\rho_{K_{GIVq-ROHFSSs}}(x^*, x_5) = 0.9162$, 排序得 $x_5 > x_3 > x_4 > x_2 > x_1$, 与文献[18]中 $\lambda=6$ 的排序一致。此外, $q=2$ 时, x_5 为最佳选择, 而文献[18]中 $\lambda=1, 2, 6, 10$ 时, x_5 均是最佳选择, x_3, x_5 分别与文献[18]的次优先选择、最优选择一致。

此外, 当 $q \in [1, 10]$ 且 $q \in \mathbf{N}^*$ 时, 5 个备选项目与理想项目的相关系数值, 如表 9 所示, 图 3 是表 9 的二维直观呈现。由表 9 可知: 当 $1 \leq q \leq 3$ 时, 项目 x_5 为最优选择, 项目 x_3 为次优选择, 与文献[18]的最优选择及次优选择一致; 当 $4 \leq q \leq 10$ 时, 项目 x_3 为最优选择, 项目 x_5 为次优选择, 表明决策结果关于参数的鲁棒性。

表 7 文献[18]中能源项目评分表
Table 7 Energy project score sheet in reference [18]

备选方案	资源项目评分	生产项目评分
x_1	$\{[0.2,0.4],[0.5,0.6],[0.4,0.7]\},\{[0.1,0.2],[0.2,0.3]\}$	$\{[0.1,0.2],[0.3,0.6],[0.4,0.8]\},\{[0.1,0.2]\}$
x_2	$\{[0.2,0.4],[0.4,0.6]\},\{[0.1,0.3],[0.2,0.6]\}$	$\{[0.3,0.5],[0.6,0.8],[0.7,0.9]\},\{[0,0.1]\}$
x_3	$\{[0.5,0.7],[0.4,0.7]\},\{[0.1,0.2],[0.2,0.3]\}$	$\{[0.4,0.6],[0.5,0.9]\},\{[0,0.1]\}$
x_4	$\{[0.2,0.4],[0.3,0.5],[0.4,0.6]\},\{[0.1,0.2],[0.2,0.4]\}$	$\{[0.1,0.3],[0.4,0.6],[0.5,0.7]\},\{[0.1,0.2],[0.2,0.3]\}$
x_5	$\{[0.2,0.4],[0.5,0.6],[0.4,0.7]\},\{[0.1,0.2],[0.2,0.3]\}$	$\{[0.4,0.5],[0.5,0.6],[0.4,0.7]\},\{[0.1,0.3],[0.2,0.3]\}$
$\tilde{\mu}_0$	$\langle[0.1,0.3],[0.2,0.5]\rangle$	$\langle[0.3,0.5],[0.2,0.4]\rangle$

备选方案	消费项目评分	环境项目评分
x_1	$\{[0.1,0.3],[0.3,0.5],[0.4,0.5]\},\{[0.1,0.3],[0.3,0.4]\}$	$\{[0.2,0.4],[0.5,0.7],[0.5,0.8]\},\{[0,0.1],[0.1,0.2]\}$
x_2	$\{[0.1,0.2],[0.3,0.6],[0.5,0.7]\},\{[0.1,0.2],[0.2,0.3]\}$	$[0.1,0.4],[0.3,0.5],[0.4,0.8]\},\{[0,0.2]\}$
x_3	$\{[0.2,0.5],[0.4,0.6]\},\{[0.2,0.3],[0.2,0.4]\}$	$\{[0.2,0.4],[0.4,0.8]\},\{[0,0.1],[0.1,0.2]\}$
x_4	$\{[0.1,0.2],[0.3,0.8]\},\{[0,0.1],[0.1,0.2]\}$	$\{[0.2,0.5],[0.4,0.7],[0.8,0.9]\},\{[0,0.1]\}$
x_5	$\{[0.4,0.6],[0.5,0.8],[0.7,0.9]\},\{[0,0.1]\}$	$\{[0.2,0.4],[0.4,0.7],[0.6,0.8]\},\{[0,0.1],[0.1,0.2]\}$
$\tilde{\mu}_0$	$\langle[0.1,0.4],[0.3,0.5]\rangle$	$\langle[0.4,0.7],[0.1,0.3]\rangle$

表 8 理想能源项目评分表
Table 8 Ideal energy project score sheet

理想方案	资源项目评分	生产项目评分	消费项目评分	环境项目评分
x^*	$\{[1,1],[1,1],[1,1]\},\{[0,0],[0,0],[0,0]\}$	$\{[1,1],[1,1],[1,1]\},\{[0,0],[0,0],[0,0]\}$	$\{[1,1],[1,1],[1,1]\},\{[0,0],[0,0],[0,0]\}$	$\{[1,1],[1,1],[1,1]\},\{[0,0],[0,0],[0,0]\}$
$\tilde{\mu}_0$	$\langle[0.1,0.3],[0.2,0.5]\rangle$	$\langle[0.3,0.5],[0.2,0.4]\rangle$	$\langle[0.1,0.4],[0.3,0.5]\rangle$	$\langle[0.4,0.7],[0.1,0.3]\rangle$

表 9 q 取不同值时 $\rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(x^*, x_i)$ 的值及排序
Table 9 The value and ordering of $\rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(x^*, x_i)$ when q takes different values

q	$\rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(x^*, x_1)$	$\rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(x^*, x_2)$	$\rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(x^*, x_3)$	$\rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(x^*, x_4)$	$\rho_{K_{GIVq-ROHFSS}}(x^*, x_5)$	排序
1	0.853 6	0.861 2	0.918 3	0.876 4	0.927 4	$x_5 > x_3 > x_4 > x_2 > x_1$
2	0.849 9	0.851 0	0.912 2	0.862 6	0.916 2	$x_5 > x_3 > x_4 > x_2 > x_1$
3	0.855 3	0.851 8	0.911 4	0.862 8	0.912 5	$x_5 > x_3 > x_4 > x_1 > x_2$
4	0.861 9	0.856 4	0.912 7	0.867 4	0.912 2	$x_3 > x_5 > x_4 > x_1 > x_2$
5	0.867 6	0.861 9	0.914 6	0.872 9	0.913 2	$x_3 > x_5 > x_4 > x_1 > x_2$
6	0.872 4	0.867 1	0.916 7	0.878 3	0.914 7	$x_3 > x_5 > x_4 > x_1 > x_2$
7	0.876 3	0.871 9	0.918 7	0.883 2	0.916 4	$x_3 > x_5 > x_4 > x_1 > x_2$
8	0.879 6	0.876 1	0.920 4	0.887 6	0.918 3	$x_3 > x_5 > x_4 > x_1 > x_2$
9	0.882 3	0.879 7	0.921 9	0.891 4	0.920 1	$x_3 > x_5 > x_4 > x_1 > x_2$
10	0.884 7	0.882 8	0.923 3	0.894 8	0.921 8	$x_3 > x_5 > x_4 > x_1 > x_2$

4 结语

针对区间值数据分析需求,本文将广义对偶犹豫模糊软集^[9]扩张为广义区间值 q 阶 orthopair 犹豫模糊软集(即 $K_{GIVq-ROHFSS}$),获得了基本的数学性质,进而,提出 $K_{GIVq-ROHFSS}$ 的相关系数并得到其扩张特性,由此建立一种多属性决策方法。关于决策验证,本文设立单数值到区间值的特定转换规则(即定义 9),从而将文献[9]的医疗资源优化配置问题进行了扩展排序与决策对比,揭示了 r 、 q 变化对相关系数的影响,同时,将本文新建决策方法应用于文献[18]的能源项目投资案例。2 个实例分析结果都表明了新建决策方法的有效性。本文只将 $K_{GIVq-ROHFSS}$ 的相关系数应用于决策分析,后续还可以将其应用于聚类分析及参数约简等方面,并结合医疗诊断及水质检测等进行研究。

参考文献:

[1] MOLODTSOV D. Soft set theory-first results[J]. Computer and Mathematics with Applications, 1999, 37:19-31.

- [2] LIU Y, QIN K, MARTINEZ L. Improving decision making approaches based on fuzzy soft sets and rough soft sets[J]. *Applied Soft Computing*, 2018, 65:320-332.
- [3] FENG F, CHO J, PEDRYCZ W, et al. Soft set based association rule mining[J]. *Knowledge-based Systems*, 2016, 111:268-282.
- [4] FATIMAH F, ROSADI D, HAKIM R F, et al. Probabilistic soft sets and dual probabilistic soft sets in decision-making[J]. *Neural Computing and Applications*, 2019, 31:397-407.
- [5] 路怡瑶. 新型软粗糙集:软粗糙半群[D]. 无锡: 江南大学, 2019.
LU Yiyao. New soft rough sets: soft rough semigroups[D]. Wuxi: Jiangnan University, 2019.
- [6] BASKARAN N, ESWARI R. Efficient VM selection strategies in cloud datacenter using fuzzy soft set[J]. *Journal of Organizational and End User Computing*, 2021, 33(5):153-179.
- [7] 文喜. 犹豫模糊软集的综合相关系数及其应用[J]. *南昌大学学报(理科版)*, 2018, 42(6):541-547.
WEN Xi. Comprehensive correlation coefficient of hesitant fuzzy soft set and its application[J]. *Journal of Nanchang University (Natural Science)*, 2018, 42(6):541-547.
- [8] GARG H, ARORA R. Maclaurin symmetric mean aggregation operators based on t -norm operations for the dual hesitant fuzzy soft set[J]. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 2020, 11(6):375-410.
- [9] 江立辉, 陈华友, 马成芸. 广义对偶犹豫模糊软集及其在决策中的应用[J]. *运筹与管理*, 2022, 31(8):109-115.
JIANG Lihui, CHEN Huayou, MA Chengyun. Generalized dual hesitant fuzzy soft set and its application in decision making[J]. *Operations Research and Management Science*, 2022, 31(8):109-115.
- [10] ULLAH K, GARG H, MAHMOOD T, et al. Correlation coefficients for T -spherical fuzzy sets and their applications in clustering and multi-attribute decision making[J]. *Soft Computing*, 2020, 24(3):1647-1659.
- [11] MAHMOOD T, ALI Z. Entropy measure and TOPSIS method based on correlation coefficient using complex q -rung orthopair fuzzy information and its application to multi-attribute decision making[J]. *Soft Computing*, 2021, 25(2):1249-1275.
- [12] SHARMA S, SINGH S. On some generalized correlation coefficients of the fuzzy sets and fuzzy soft sets with application in cleanliness ranking of public health centres[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2019, 36(4):3671-3683.
- [13] 黄先玖, 汤静. 犹豫模糊软集的相关系数及其在决策中的应用[J]. *控制与决策*, 2019, 34(4):821-826.
HUANG Xianjiu, TANG Jing. Correlation coefficient of hesitant fuzzy soft set and its application in decision making[J]. *Control and Decision*, 2019, 34(4):821-826.
- [14] ARORA R, GARG H. A robust correlation coefficient measure of dual hesitant fuzzy soft sets and their application in decision making[J]. *Engineering Application of Artificial Intelligence*, 2018, 72:80-92.
- [15] YIARAYONG P. On interval-valued fuzzy soft set theory applied to semigroups[J]. *Soft Computing*, 2020, 24(5):3113-3123.
- [16] 赵海燕, 马卫民, 孙秉珍, 等. 考虑风险偏好的区间直觉模糊软集型多属性决策方法[J]. *计算机应用研究*, 2018, 35(2):453-458.
ZHAO Haiyan, MA Weiming, SUN Bingzhen, et al. Multi-attribute decision making method based on interval intuitionistic fuzzy soft set considering risk preference[J]. *Application Research of Computers*, 2018, 35(2):453-458.
- [17] ZULQARNAIN R M, XIN X L, SAQLAIN M, et al. TOPSIS method based on the correlation of interval-valued intuitionistic fuzzy soft sets and aggregation operators with their application in decision-making[J]. *Journal of Mathematics*, 2021, 2021:1-16.
- [18] 江立辉, 马成芸, 陈华友. 一类新的广义模糊软集及其在多属性决策中的应用[J]. *淮阴师范学院学报(自然科学版)*, 2022, 21(2):107-114.
JIANG Lihui, MA Chengyun, CHEN Huayou. A new kind of generalized fuzzy soft set and its application in multi-attribute decision making[J]. *Journal of Huaiyin Teachers College(Natural Science Edition)*, 2022, 21(2):107-114.

(编辑:陈丽萍)