山东大学学报(理学版)2025 年 1 月 第 60 卷 第 1 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.1, 2025

E-mail:xblxb@ sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2025)01-0111-09　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.305

直觉犹豫模糊软专家集及其在决策中的应用

郑颖春,周婉婷*
(西安科技大学理学院, 陕西 西安 710054)

摘要:对直觉模糊软专家集(intuitive fuzzy soft expert set, IFSES)理论进行扩展,提出直觉犹豫模糊软专家集的概念,定义直觉犹豫模糊软专家集的基本运算并研究其一系列重要的性质,给出直觉犹豫模糊软专家集决策算法,该算法充分考虑了决策者在评估备选方案时表现出的犹豫性,并为参数集赋予相应的权重,本文将直觉犹豫模糊专家集决策算法应用于实际招聘问题中,通过得分函数计算各个候选人的综合得分,再按照得分从大到小顺序排序,得到最佳候选人。相比于其他软集决策模型,直觉犹豫模糊软专家集决策模型计算简单,准确性高。通过对比分析实验可知,直觉犹豫模糊软专家集决策算法具有更好的结合性、决策性及应用性。
关键词:直觉犹豫模糊集;软专家集;直觉犹豫模糊软专家集;决策分析
中图分类号:O159　　**文献标志码**:A
引用格式:郑颖春,周婉婷. 直觉犹豫模糊软专家集及其在决策中的应用[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(1):111-119.

Intuitive hesitation blur soft expert set and its application to decision making

ZHENG Yingchun, ZHOU Wanting*
(School of Science, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, Shaanxi, China)

Abstract: Theory of intuitive fuzzy soft expert set (IFSES) is expanded, the concept of intuitive hesitation fuzzy soft expert set is improved. The basic operation of the fuzzy soft expert set is defined and a series of important properties is studied. The intuitive hesitation fuzzy soft expert set decision algorithm is given. In the algorithm, evaluation information to the alternative is considered based on the decision maker and weight to the parameter set is given. And the intuitive hesitation fuzzy soft expert set decision algorithm is applied to practical recruitment problems. The composite score of each candidate is calculated by the score function. The best candidate is obtained from large to small. Compared with other soft set decision models, soft expert set decision model is simple and accurate. Through comparative analysis, intuitive hesitation fuzzy soft expert set decision model has better combination, decision-making and application.
Key words: intuitive hesitation fuzzy set; soft expert set; intuitive hesitation fuzzy soft expert set; decision analysis

0　引言

近年来,模糊集理论发展迅速,广泛应用于数字经济、医药制造、物流服务等领域[1-3]。Zadeh[4]最早提出模糊集,很快就发展出各种拓展模型。冯雪等[5]定义了加权犹豫模糊偏好关系和乘性一致的加权犹豫模糊偏好关系,并设计了一致性调整算法;Kazanci 等[6]将双极模糊集进行推广,使用多极模糊集的概念研究半超群中的模糊理想。Atanassov 等[7]提出直觉模糊集,考虑从属关系的隶属度和非隶属度,直觉模糊集相比传统的模糊集在处理模糊性和不确定性等方面更有效,目前已广泛地应用于管理学、社会科学等学科[8];王金波等[9]定义一种新的双论域上的直觉模糊粗糙集模型,并研究直觉模糊近似算子的构造定义及其性

收稿日期:2023-07-13; **网络出版时间**:2024-04-19 10:27:34
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12001420)
第一作者:郑颖春(1979—),女,副教授,研究方向粗糙集与人工智能、最优化理论. E-mail: 649732352@ qq.com
* **通信作者**:周婉婷(1999—),女,硕士研究生,研究方向粗糙集与人工智能. E-mail: 714024834@ qq.com

质;Torra 等[10]提出犹豫模糊集理论,用于处理决策者在 N 个可能的数据之间徘徊的情况,解决多个决策专家集很难达成一致意见的问题;Xiao 等[11]将模糊矩阵扩展到模糊决策中,构建犹豫模糊矩阵,并结合犹豫模糊索引熵和评分函数定义模糊矩阵的映射函数;华维灿等[12]引入概率犹豫模糊数(fuzzy number of probability hesitation, PHFN)的基本定义和相关运算,提出一种交互式群体评价算法。而软集理论最初是由 Maji 等[13]提出,用于处理传统数学工具无法处理的不确定性。许多学者将软集与模糊集理论进行创新结合,Maji 等[14]结合直觉模糊集和软集,提出直觉模糊软集的概念;Leina 等[15]将球面模糊集嵌入到软集中,提出球面模糊软粗糙平均聚合算子,应用在多准则决策中。

Alkhazaleh 等[16]定义了软专家集的概念,在软专家集中用户可以知道一个模型中所有专家的意见,并将其应用于实际决策问题中;许宏伟等[17]将区间软集与软专家集相结合,提出区间软专家集的概念,并研究其运算性质;Ashraf 等[18]提出立方软专家集(cube soft expert set, CSES)的概念,定义立方软专家集的运算定律,将其应用到多准则决策问题中;Sathiyaseelan 等[19]将软专家集推广到逆软结构,得到逆软专家集;Ali 等[20]将 N-软集与软专家集进行组合,并应用于实际决策问题中证明其有效性;Akram 等[21]将犹豫模糊与软专家集的特征相结合得到犹豫模糊软专家集,并应用于多属性组决策(multi-attribute group decision making, MAGDM)问题中;Ali 等[22]提出模糊双极软专家集,用于描述不确定模糊软信息的双极性并进行了测试。

本文将直觉犹豫模糊集和软专家集相结合,提出一种全新的直觉犹豫模糊软专家集(intuitive hesitation fuzzy soft expert set, IHFSES),研究其基本运算规律和一些重要的性质;相比其他软集模型在决策中的应用,考虑决策者对成员评估信息产生犹豫不决的情况,提出直觉犹豫模糊软专家集决策算法,并将提出的直觉犹豫模糊软专家集决策算法应用到实际决策问题中,并与其他模型进行对比,通过对比分析可得其更适合现实决策问题且具有准确性、真实性。

1 预备知识

设 U 为对象的初始论域,E 为 U 中对象的相关参数集,参数通常为对象的属性、特征或特性,$P(U)$ 表示 U 的幂集。

定义 1[4] 设 U 为非空有限论域,U 上的一个模糊集 $F=\{(x,\mu_F(x)),\ x\in U\}$,其中 $\mu_F:U\to[0,1]$,隶属函数记为 $\mu_F(x)$,在区间[0,1]上取值,论域 U 上全体模糊集合用 $F(U)$ 来表示。

定义 2[7] 设 U 为非空有限论域,A 是 U 上的一个直觉模糊集且满足 $\mu_A(X):U\to[0,1]$, $\nu_A(X):U\to[0,1]$, $\mu_A(X)$ 和 $\nu_A(X)$ 分别表示元素 X 属于直觉模糊集 A 的隶属度和非隶属度,论域 U 上全体直觉模糊集记为 $\mathrm{IF}(U)$,其中 $0\leqslant\mu_A(X)+\nu_A(X)\leqslant 1$, $\forall X\in A$,称 $\Pi_A=1-\mu_A(X)-\nu_A(X)$ $(0\leqslant\Pi_A\leqslant 1)$ 为直觉模糊集 A 的犹豫度或犹豫指数。

定义 3[10] 设 U 为直觉犹豫模糊集,E 是一个参数集且 $A\subseteq E$,若 $F:A\to\mathrm{IHF}(U)$ 是一个映射,则称序对 (F,A) 为软论域 (U,E) 上的一个直觉犹豫模糊软集。

定义 4[13] 设 U 为论域,E 是一个参数集且 $A\subseteq E$,若 $F:A\to P(U)$,则称 (F,A) 为 U 上的一个软集。

定义 5[14] 设 U 为论域,E 是一个参数集且 $A\subseteq E$,若 $F:A\to\mathrm{IF}(U)$ 是一个映射,则称序对 (F,A) 为软论域 (U,E) 上的一个直觉模糊软集。

定义 6[16] 设 U 为论域,E 是一个参数集,X 是专家集,$O=\{1=$同意$,0=$不同意$\}$ 为意见集,$Z=E\times X\times O$, $A\subseteq Z$,若 $F:A\to P(U)$,则称 (F,A) 为 U 上的一个软专家集。

定义 7[16] 设 (F,A) 和 (G,B) 是 U 上 2 个软专家集,称 (F,A) 是 (G,B) 的软专家子集,若

(1) $A\subseteq B$;

(2) $\forall\varepsilon\subseteq A$, $F(\varepsilon)\subseteq G(\varepsilon)$。

定义 8[16] 设 (F,A) 和 (G,B) 是 U 上 2 个软专家集,若 (F,A) 是 (G,B) 的软专家子集且 (G,B) 是 (F,A) 的软专家子集,则称 (F,A) 与 (G,B) 相等。

定义 9[23] (F,A) 称为 U 上的模糊软专家集,其中 F 是一个映射且 $F\to I^U$,I^U 表示 U 的所有模糊子集的集合。

定义 10[23]　设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 为元素集,$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 为参数集,$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_i\}$ 为专家集,$O=\{1=$同意$,0=$不同意$\}$ 为意见集,设 $Z=E\times X\times O$,$A\subseteq Z$,若 $F:Z\to \mathrm{IF}^U$,则称(F,A)为软论域 U 上的直觉模糊软专家集。

定义 11[23]　设(F,A)和(G,B)是软论域(U,Z)上 2 个直觉模糊软专家集,称(F,A)是(G,B)的软专家子集,表示为$(F,A)\in(G,B)$,其中(G,B)称为(F,A)的直觉模糊软专家(intuitive fuzzy soft expert set, IFSES)超集,$\varepsilon\in A$,若满足:

(1) $B\subseteq A$;

(2) $F(\varepsilon)$是 $G(\varepsilon)$的一个直觉模糊子集。

定义 12[23]　软论域(U,Z)上的 2 个直觉模糊软专家集(F,A)和(G,B)称为相等的,若(F,A)是(G,B)的直觉模糊软专家子集,且(G,B)是(F,A)的直觉模糊软专家子集。

定义 13[23]　设(F,A)是软论域(U,Z)上的直觉模糊软专家集,U 上的一致直觉模糊软专家集(agree-IFSES)表示为(F,A)的直觉模糊软专家子集,其中$(F,A)_1=\{F(\alpha)\mid\alpha\in\alpha\times X\times\{1\}\}$。

定义 14[23]　设(F,A)是软论域(U,Z)上的直觉模糊软专家集,U 上的不一致直觉模糊软专家集(disagree-IFSES)表示为(F,A)的直觉模糊软专家子集,其中$(F,A)_0=\{F(\alpha)\mid\alpha\in\alpha\times X\times\{0\}\}$。

2　直觉犹豫模糊软专家集

设 U 为元素集,E 为参数集,X 为专家集,$O=\{1=$同意$,0=$不同意$\}$ 为意见集,$Z=E\times X\times O$ 且 $A\subseteq Z$。

定义 15　设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 为元素集,$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 为参数集,$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_i\}$ 为专家集,$O=\{1=$同意$,0=$不同意$\}$ 为意见集,$Z=E\times X\times O$ 且 $A\subseteq Z$,若 $F:Z\to \mathrm{IHF}^U$,称(F,A)为软论域 U 上的直觉犹豫模糊软专家集,则有

$$Z_{\mathrm{IHFSES}}=\{\langle x,\Gamma_{\mathrm{IHFSES}}(x),\Phi_{\mathrm{IHFSES}}(x)\rangle\mid x\in X\},$$

式中,$\mathrm{IHF}(U)$表示 U 中的所有直觉犹豫模糊子集的集合,$F:Z\to \mathrm{IHF}^U$,Z 是一个映射;$\Gamma_{\mathrm{IHFSES}}(x)$和 $\Phi_{\mathrm{IHFSES}}(x)$是$[0,1]$中的有限非空值集,分别表示元素 $x\in X$ 对集合 $Z_{\mathrm{IHFSES}}\subseteq X$ 的隶属度和非隶属度的集合,并且对于每一个元素$x\in X$,$\forall\mu_{\mathrm{IHFSES}}(x)\in\Gamma_{\mathrm{IHFSES}}(x)$,$\exists\nu_{\mathrm{IHFSES}}(x)\in\Phi_{\mathrm{IHFSES}}(x)$且 $\exists\mu_{\mathrm{IHFSES}}(x)\in\Gamma_{\mathrm{IHFSES}}(x)$,$\forall\nu_{\mathrm{IHFSES}}(x)\in\Phi_{\mathrm{IHFSES}}(x)$,则 $0\leqslant\mu_{\mathrm{IHFSES}}(x)+\nu_{\mathrm{IHFSES}}(x)\leqslant 1$。对 $\forall x\in X$,$\Pi_{\mathrm{IHFSES}}(x)=1-\mu_{\mathrm{IHFSES}}(x)+\nu_{\mathrm{IHFSES}}(x)$,其中 $1-\mu_{\mathrm{IHFSES}}(x)-\nu_{\mathrm{IHFSES}}(x)\geqslant 0$,$\Pi_{\mathrm{IHFSES}}(x)$称为 x 的直觉犹豫度。

直觉犹豫模糊集(intuitive hesitation fuzzy set, IHFS)是犹豫模糊集(hesitation fuzzy set, HFS)和直觉模糊集(intuitive fuzzy set, IFS)的推广,其元素的隶属度和非隶属度是$[0,1]$中的有限非空值集,软专家集(soft expert set, SES)由专家集和意见集构成,意见集分为同意和不同意两部分。相比其他软集,将两者结合得到的 IHFSES 既考虑到多位专家评价的犹豫模糊信息,又将犹豫度引入其中,解决参数的不确定性和犹豫性。

例 1　设 $U=\{u_1,u_2\}$ 为元素集,$E=\{e_1,e_2\}$ 为参数集,其中 $e_i(i=1,2)$表示参数集,$E=\{e_1=\mathrm{big},e_2=\mathrm{beautiful}\}$,$X=\{x_1,x_2\}$是一组专家集。设 Z 为 $Z\to \mathrm{IHF}^U$,则有

$$F(e_1,x_1,1)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.1,0.8\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.1,0.6\rangle}\right)\right\},\quad F(e_2,x_1,1)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.5,0.25\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.25,0.6\rangle}\right)\right\},$$

$$F(e_1,x_2,1)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.2,0.7\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.4,0.3\rangle}\right)\right\},\quad F(e_2,x_2,1)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.2,0.6\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.3,0.2\rangle}\right)\right\},$$

$$F(e_1,x_1,0)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.2,0.4\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.1,0.9\rangle}\right)\right\},\quad F(e_2,x_1,0)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.3,0.4\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.2,0.7\rangle}\right)\right\},$$

$$F(e_1,x_2,0)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.3,0.4\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.1,0.6\rangle}\right)\right\},\quad F(e_2,x_2,0)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.2,0.7\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.4,0.3\rangle}\right)\right\}。$$

将直觉犹豫模糊软专家集(F,Z)看作由以下近似集合组成:

$$(F,Z)=\left\{(e_1,x_1,1)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.1,0.8\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.1,0.6\rangle}\right)\right\}\right\},\ \left\{(e_2,x_1,1)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.5,0.25\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.25,0.6\rangle}\right)\right\}\right\},$$
$$\left\{(e_1,x_2,1)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.2,0.7\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.4,0.3\rangle}\right)\right\}\right\},\ \left\{(e_2,x_2,1)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.2,0.6\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.3,0.2\rangle}\right)\right\}\right\},$$
$$\left\{(e_1,x_1,0)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.2,0.4\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.1,0.9\rangle}\right)\right\}\right\},\ \left\{(e_2,x_1,0)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.3,0.4\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.2,0.7\rangle}\right)\right\}\right\},$$
$$\left\{(e_1,x_2,0)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.3,0.4\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.1,0.6\rangle}\right)\right\}\right\},\ \left\{(e_2,x_2,0)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.4,0.4\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.8,0.2\rangle}\right)\right\}\right\},$$

则称(F,Z)是软论域(U,Z)上的直觉犹豫模糊软专家集。

定义 16　设(F,A)和(G,B)是软论域(U,Z)上 2 个直觉犹豫模糊软专家集,称(F,A)是(G,B)的直觉犹豫模糊软专家子集,(G,B)为(F,A)的直觉犹豫模糊软专家超集,用$(F,A)\Subset(G,B)$表示,其中$\varepsilon\in A$,若满足:

(1) $B\subseteq A$;

(2) $F(\varepsilon)$是$G(\varepsilon)$的一个直觉犹豫模糊子集。

定义 17　软论域(U,Z)上的 2 个直觉犹豫模糊软专家集(F,A)和(G,B)相等,若(F,A)是(G,B)的直觉犹豫模糊软专家子集且(G,B)是(F,A)的直觉犹豫模糊软专家子集。

定义 18　若(F,A)称为一个空直觉犹豫模糊软专家集,其中$F(\alpha)=(\bar{\phi},A)$且$F(\alpha)=\langle 0,1\rangle$,记为$(\bar{\phi},A)$,即$\mu_{F(\alpha)}=0$且$\nu_{F(\alpha)}=1$, $\alpha\in Z$。

定义 19　若(F,A)为一个绝对直觉犹豫模糊软专家集,记为$|(F,A)|$,其中$F(\alpha)=|(F,A)|$且$F(\alpha)=\langle 0,1\rangle$,即$\mu_{F(\alpha)}=0$且$\nu_{F(\alpha)}=1$, $\alpha\in Z$。

定义 20　设(F,A)是软论域(U,Z)上的 IHFSES,则U上的一致直觉犹豫模糊软专家集(agree-IHFSES)定义为$(F,A)_{11}=\{F(\alpha)\mid\alpha\in\alpha\times X\times\{1\}\}$,记为$(F,A)_{11}$。

定义 21　设(F,A)是软论域(U,Z)上的 IHFSES,则U上的不一致直觉犹豫模糊软专家集(disagree-IHFSES)定义为$(F,A)_{00}=\{F(\alpha)\mid\alpha\in\alpha\times X\times\{0\}\}$,记为$(F,A)_{00}$。

例 2　根据例 1,一致直觉犹豫模糊软专家集为

$$(F,A)_{11}=\left((e_1,x_1,1)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.1,0.8\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.1,0.6\rangle}\right)\right\}\right),\ \left((e_2,x_1,1)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.5,0.25\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.25,0.6\rangle}\right)\right\}\right),$$
$$\left((e_1,x_2,1)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.2,0.7\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.4,0.3\rangle}\right)\right\}\right),\ \left((e_2,x_2,1)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.2,0.6\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.3,0.2\rangle}\right)\right\}\right);$$

不一致直觉犹豫模糊软专家集为

$$(F,A)_{00}=\left((e_1,x_1,0)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.2,0.4\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.1,0.9\rangle}\right)\right\}\right),\ \left((e_2,x_1,0)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.3,0.4\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.2,0.7\rangle}\right)\right\}\right),$$
$$\left((e_1,x_2,0)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.3,0.4\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.1,0.6\rangle}\right)\right\}\right),\ \left((e_2,x_2,0)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.4,0.4\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.8,0.2\rangle}\right)\right\}\right)。$$

3　直觉犹豫模糊软专家集的基本运算

定义 22　设(F,A)是软论域(U,Z)上的 IHFSES,$(F,A)^C$表示(F,A)的补集,定义$(F,A)^C=\bar{C}(F(\alpha))$, $\alpha\in U$,其中$\bar{C}$是直觉犹豫模糊集的补。

例 3　根据例 1,则$(F,A)^C$为

$$(F,Z)^C=\left\{(e_1,x_1,1)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.8,0.1\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.6,0.1\rangle}\right)\right\}\right\},\ \left\{(e_2,x_1,1)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.25,0.5\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.6,0.25\rangle}\right)\right\}\right\},$$
$$\left\{(e_1,x_2,1)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.7,0.2\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.3,0.4\rangle}\right)\right\}\right\},\ \left\{(e_2,x_2,1)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.6,0.2\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.2,0.3\rangle}\right)\right\}\right\},$$

$$\left\{(e_1,x_1,0)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.4,0.2\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.9,0.1\rangle}\right)\right\}\right\},\quad \left\{(e_2,x_1,0)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.4,0.3\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.7,0.2\rangle}\right)\right\}\right\},$$
$$\left\{(e_1,x_2,0)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.4,0.3\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.6,0.1\rangle}\right)\right\}\right\},\quad \left\{(e_2,x_2,0)=\left\{\left(\frac{u_1}{\langle 0.4,0.4\rangle}\right),\left(\frac{u_2}{\langle 0.2,0.8\rangle}\right)\right\}\right\}。$$

定义 23　若(F,A)是软论域(U,Z)上的 IHFSES,则$((F,A)^C)^C=(F,A)$。

证明　设(F,A)是软论域(U,Z)上的 IHFSES,定义$(F,A)=F(d)$,令 IHFSES$(F,A)^C=(G,B)$。由定义 23 可知,$(G,B)=G(d)$,即 $G(d)=\overline{C}(F(d))$,得到

$$(G,B)^C=\overline{C}(G(d))=\overline{C}(\overline{C}(F(d)))=F(d)=(F,A),$$

从而$((F,A)^C)^C=(G,B)^C=(F,A)$,故$((F,A)^C)^C=(F,A)$。

定义 24　设(F,A)和(G,B)是软论域(U,Z)上的 IHFSES,定义$(F,A)\,\overline{\cup}\,(G,B)=(H,C)$,其中 $C=A\cup B$,则 $H(\varepsilon)=F(\varepsilon)\,\overline{\cup}\,G(\varepsilon)$, $\varepsilon\in C$,故

$$H(\varepsilon)=\begin{cases}F(\varepsilon), & \varepsilon\in A-B,\\ G(\varepsilon), & \varepsilon\in B-A,\\ F(\varepsilon)\cup G(\varepsilon), & \varepsilon\in A\cup B。\end{cases}$$

定义 25　设(F,A)和(G,B)是软论域(U,Z)上的 IHFSES,定义$(F,A)\,\overline{\cap}\,(G,B)=(H,C)$,其中 $C=A\cap B$,则 $H(\varepsilon)=F(\varepsilon)\,\overline{\cap}\,G(\varepsilon)$, $\varepsilon\in C$,故

$$H(\varepsilon)=\begin{cases}F(\varepsilon), & \varepsilon\in A-B,\\ G(\varepsilon), & \varepsilon\in B-A,\\ F(\varepsilon)\cap G(\varepsilon), & \varepsilon\in A\cap B。\end{cases}$$

定理 1　设(F,A)、(G,B)和(H,C)是软论域(U,Z)上的任意 IHFSES,则

(ⅰ) $(F,A)\,\overline{\cup}\,(G,B)=(G,B)\,\overline{\cup}\,(F,A)$;

(ⅱ) $(F,A)\,\overline{\cup}\,((G,B)\,\overline{\cup}\,(H,C))=((F,A)\,\overline{\cup}\,(G,B))\,\overline{\cup}\,(H,C)$;

(ⅲ) $(F,A)\,\overline{\cup}\,(F,A)\subseteq(F,A)$;

(ⅳ) $(F,A)\,\overline{\cup}\,(\Phi,A)=(\Phi,A)$;

(ⅴ) $(F,A)\,\overline{\cap}\,(G,B)=(G,B)\,\overline{\cap}\,(F,A)$;

(ⅵ) $(F,A)\,\overline{\cap}\,((G,B)\,\overline{\cap}\,(H,C))=((F,A)\,\overline{\cap}\,(G,B))\,\overline{\cap}\,(H,C)$;

(ⅶ) $(F,A)\,\overline{\cap}\,(F,A)\subseteq(F,A)$;

(ⅷ) $(F,A)\,\overline{\cap}\,(\Phi,A)=(\Phi,A)$。

证明　(ⅰ) 令$(F,A)\,\overline{\cup}\,(G,B)=(H,C)$,由定义 24 可知,$\forall\alpha\in C$,有$(H,C)=H(\alpha)$其中 $H(\alpha)=F(\alpha)\,\overline{\cup}\,G(\alpha)$,然而 $H(\alpha)=F(\alpha)\,\overline{\cup}\,G(\alpha)=G(\alpha)\,\overline{\cup}\,F(\alpha)$,集合的并集满足交换律,$(H,C)=(G,B)\,\overline{\cup}\,(F,A)$,故 IHFSES 是可交换的,则$(F,A)\,\overline{\cup}\,(G,B)=(G,B)\,\overline{\cup}\,(F,A)$。

其他证明类似于(ⅰ)。

定理 2　设(F,A)、(G,B)和(H,C)为软论(U,Z)上的任意 3 个 IHFSES,则

$(F,A)\,\overline{\cup}\,((G,B)\,\overline{\cap}\,(H,C))=((F,A)\,\overline{\cup}\,(G,B))\,\overline{\cap}\,((F,A)\,\overline{\cup}\,(H,C))$;

$(F,A)\,\overline{\cap}\,((G,B)\,\overline{\cup}\,(H,C))=((F,A)\,\overline{\cap}\,(G,B))\,\overline{\cup}\,(F,A)\,\overline{\cap}\,(H,C))$。

定理 3　设(F,A),(G,B)为软论域(U,Z)上的任意两个 IHFSES,则

(ⅰ) $((F,A)\,\overline{\cup}\,(G,B))^C=(G,B)^C\,\overline{\cap}\,(F,A)^C$;

(ⅱ) $((F,A)\,\overline{\cap}\,(G,B))^C=(G,B)^C\,\overline{\cup}\,(F,A)^C$。

证明　(ⅰ) 设(F,A)和(G,B)是软论域(U,Z)上的 IHFSES,定义$(F,A)=F(\alpha)$,$\alpha\in A\subseteq Z$,$(G,B)=G(\alpha)$,$\beta\in B\subseteq Z$, IHFSES 满足交换律和结合律,由定义 23 和定理 1 可得$(G,B)^C\,\overline{\cap}\,(F,A)^C=(G(\alpha))^C\,\overline{\cap}\,(F(\alpha))^C=(\overline{C}(G(\alpha)))\,\overline{\cap}\,(\overline{C}(F(\alpha)))=((G,B)\,\overline{\cup}\,(F,A))^C$。

(ⅱ) 证明类似于(ⅰ)。

定义 26　设(F,A)、(G,B)为软论域(U,Z)上的任意 IHFSES,则(F,A)和(G,B)定义为$(F,A)\overline{\wedge}(G,B)=(H,A\times B)$,其中$(H,A\times B)=H(\alpha,\beta)$,$H(\alpha,\beta)=F(\alpha)\cap G(\beta)$, $\forall(\alpha,\beta)\in A\times B$。

定义 27　设(F,A)、(G,B)为软论域(U,Z)上的任意 IHFSES,则(F,A)或(G,B)定义为$(F,A)\overline{\vee}(G,B)=(H,A\times B)$,其中$(H,A\times B)=H(\alpha,\beta)$,$H(\alpha,\beta)=F(\alpha)\cup G(\beta)$, $\forall(\alpha,\beta)\in A\times B$。

定理 4　设(F,A)、(G,B)和(H,C)为软论域(U,Z)上的任意 IHFSES,则

(ⅰ) $(F,A)\overline{\wedge}((G,B)\overline{\wedge}(H,C))=((F,A)\overline{\wedge}(G,B))\overline{\wedge}(H,C)$;

(ⅱ) $(F,A)\overline{\vee}((G,B)\overline{\vee}(H,C))=((F,A)\overline{\vee}(G,B))\overline{\vee}(H,C)$;

(ⅲ) $(F,A)\overline{\vee}((G,B)\overline{\wedge}(H,C))=((F,A)\overline{\vee}(G,B))\overline{\wedge}((F,A)\overline{\vee}(H,C))$;

(ⅳ) $(F,A)\overline{\wedge}((G,B)\overline{\vee}(H,C))=((F,A)\overline{\wedge}(G,B))\overline{\vee}((F,A)\overline{\wedge}(H,C))$。

注:此处“交”和“并”运算不满足交换律。

定理 5　设(F,A)、(G,B)为软论域(U,Z)上的任意 IHFSES,则

(ⅰ) $((F,A)\overline{\wedge}G,B))^C=(G,B)^C\overline{\vee}(F,A)^C$,

(ⅱ) $((F,A)\overline{\vee}(G,B))^C=(G,B)^C\overline{\wedge}(F,A)^C$。

证明　(ⅰ) 设(F,A)和(G,B)是软论域(U,Z)上的 IHFSES,定义为$(F,A)=F(\alpha)$,其中$\alpha\in A\subseteq Z$,$(G,B)=G(\alpha)$,$\beta\in B\subseteq Z$。由于 IHFSES 满足交换律和结合律,根据定义 26、27,则

$$\begin{aligned}(F(\alpha))^C\overline{\wedge}(G(\alpha))^C &=(F(\alpha)\cap G(\beta))^C=(\bar{C}(F(\alpha)\cap G(\beta))=(\bar{C}(F(\alpha))\cup\bar{C}(G(\beta)))^C\\ &=(F(\alpha))^C\overline{\vee}(G(\beta))^C=(F,A)^C\overline{\vee}(G,B)^C。\end{aligned}$$

(ⅱ) 证明类似于(ⅰ)。

4　直觉犹豫模糊软专家集在决策问题中的应用

假设 Y 公司计划招聘一个人来填补其公司的空缺职位,在所有申请该职位的人中,有 7 名候选人入围。这 7 名候选人形成元素集 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7\}$,招聘委员会由公司的招聘经理、部门负责人和人力资源总监组成,该委员会由集合 $R=\{r_1,r_2,r_3\}$ 表示,集合 $Q=\{1=$同意$,0=$不同意$\}$ 表示聘用委员会成员的意见集合,雇用委员会考虑一组参数 $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$,其中参数 e_i 表示候选人被评估的特征或品质,即分别为“相关工作经验”、“相关领域的优秀学术资格”、“专业态度和水平”以及“技术知识”,参数集的权重集为 $w_i=\{0.3,0.2,0.2,0.3\}$。在面试所有候选人并检查他们的证书和其他支持文件后,招聘委员会构建 IHFSES,如表 1 所示。

表 1　IHFSES(F,Z)的表格表示

Table 1　A table representation of the IHFSES set (F,Z)

(F,Z)	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
$(e_1,r_1,1)$	{0.2,0.4}	{0.1,0.4}	{0.1,0.7}	{0.25,0.6}	{0.3,0.7}	{0.3,0.5}	{0.5,0.4}
$(e_2,r_1,1)$	{0.3,0.2}	{0.25,0.2}	{0.2,0.6}	{0.4,0.5}	{0.3,0.4}	{0.2,0.5}	{0.25,0.55}
$(e_3,r_1,1)$	{0.2,0.7}	{0.4,0.3}	{0.1,0.6}	{0.3,0.6}	{0.4,0.3}	{0.1,0.7}	{0.4,0.5}
$(e_4,r_1,1)$	{0.2,0.6}	{0.3,0.2}	{0.3,0.1}	{0.3,0.5}	{0.3,0.4}	{0.2,0.6}	{0.1,0.4}
$(e_1,r_2,1)$	{0.4,0.6}	{0.2,0.3}	{0.3,0.2}	{0.5,0.4}	{0.2,0.5}	{0.25,0.55}	{0.4,0.5}
$(e_2,r_2,1)$	{0.3,0.3}	{0.9,0.1}	{0.1,0.2}	{0.8,0.1}	{0.2,0.7}	{0.4,0.4}	{0.5,0.2}
$(e_3,r_2,1)$	{0.1,0.4}	{0.6,0.2}	{0.2,0.4}	{0.3,0.4}	{0.5,0.3}	{0.15,0.55}	{0.4,0.5}
$(e_4,r_2,1)$	{0.5,0.3}	{0.8,0.2}	{0.3,0.4}	{0.7,0.2}	{0.4,0.5}	{0.6,0.2}	{0.4,0.3}
$(e_1,r_3,1)$	{0.4,0.5}	{0.6,0.4}	{0.2,0.4}	{0.4,0.4}	{0.4,0.5}	{0.3,0.4}	{0.75,0.15}
$(e_2,r_3,1)$	{0.3,0.7}	{0.3,0.2}	{0.2,0.2}	{0.2,0.5}	{0.1,0.6}	{0.25,0.25}	{0.4,0.3}
$(e_3,r_3,1)$	{0.5,0.2}	{0.1,0.6}	{0.3,0.2}	{0.6,0.1}	{0.2,0.3}	{0.35,0.55}	{0.6,0.2}
$(e_4,r_3,1)$	{0.3,0.5}	{0.5,0.2}	{0.2,0.4}	{0.3,0.3}	{0.4,0.5}	{0.3,0.2}	{0.4,0.4}
$(e_1,r_1,0)$	{0.1,0.4}	{0.3,0.2}	{0.2,0.4}	{0.6,0.3}	{0.3,0.4}	{0.25,0.5}	{0.1,0.5}
$(e_2,r_1,0)$	{0.3,0.4}	{0.6,0.2}	{0.2,0.5}	{0.4,0.5}	{0.2,0.7}	{0.2,0.4}	{0.3,0.5}
$(e_3,r_1,0)$	{0.3,0.2}	{0.2,0.4}	{0.3,0.1}	{0.1,0.5}	{0.1,0.55}	{0.2,0.3}	{0.3,0.4}

续表

(F,Z)	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
$(e_4,r_1,0)$	{0.3,0.2}	{0.6,0.4}	{0.4,0.5}	{0.3,0.5}	{0.35,0.55}	{0.3,0.6}	{0.4,0.2}
$(e_1,r_2,0)$	{0.2,0.4}	{0.1,0.9}	{0.1,0.2}	{0.1,0.7}	{0.2,0.6}	{0.7,0.3}	{0.3,0.2}
$(e_2,r_2,0)$	{0.3,0.4}	{0.2,0.7}	{0.3,0.5}	{0.2,0.5}	{0.6,0.3}	{0.1,0.4}	{0.2,0.4}
$(e_3,r_2,0)$	{0.2,0.8}	{0.1,0.2}	{0.6,0.3}	{0.1,0.5}	{0.2,0.5}	{0.3,0.4}	{0.3,0.3}
$(e_4,r_2,0)$	{0.2,0.4}	{0.6,0.2}	{0.3,0.4}	{0.4,0.3}	{0.25,0.55}	{0.35,0.6}	{0.3,0.5}
$(e_1,r_3,0)$	{0.3,0.4}	{0.3,0.6}	{0.25,0.2}	{0.3,0.3}	{0.4,0.2}	{0.3,0.5}	{0.25,0.6}
$(e_2,r_3,0)$	{0.4,0.5}	{0.4,0.2}	{0.4,0.3}	{0.5,0.3}	{0.3,0.6}	{0.4,0.4}	{0.3,0.4}
$(e_3,r_3,0)$	{0.3,0.2}	{0.3,0.5}	{0.5,0.1}	{0.25,0.7}	{0.2,0.4}	{0.3,0.4}	{0.25,0.6}
$(e_4,r_3,0)$	{0.3,0.4}	{0.4,0.3}	{0.5,0.2}	{0.4,0.2}	{0.3,0.4}	{0.1,0.5}	{0.5,0.4}

将 IHFSES(F,Z)与广义算法一起用于解决决策问题。招聘委员会采用算法 1 来确定该职位的最佳或最合适候选人。

算法 1　IHFSES 算法。

输入　候选人元素集 U、参数集 E、专家集 R、意见集 Q、参数权重集 W_i。

输出　得分最高的候选人。

步骤 1　求出犹豫值 $\Pi_{F(Z_i)}=1-\mu_{F(Z_i)}(\mu_i)-\nu_{F(Z_i)}(\mu_i)\,(0\leqslant\Pi_{F(Z_i)}(X)\leqslant1)$, $\forall u_i\in U$;

步骤 2　根据得分函数 $S(\mu_i)=\mu_{F(Z_i)}-\nu_{F(Z_i)}+\dfrac{2+3(\mu_{F(Z_i)}-\nu_{F(Z_i)})}{6}\Pi_{F(Z_i)}w_i$,求出候选人每个元素集的得分;

步骤 3　分别对每个元素集的同意 IHFSES 求和,对不同意 IHFSES 的元素集合求和(分别用 A_i 和 D_i 表示,其中$i=1,2,\cdots,7$),得到得分情况;

步骤 4　计算每个候选人的综合得分 $M_i=A_i-D_i(i=1,2,\cdots,7)$;

步骤 5　根据每个候选人的综合得分进行排序,确定最高分值,$S=\max_{u_i}\{M_i\}$。确定最优或最佳解决方案,若有一个以上的元素具有最高分数 M_i,则可以选择这些元素中的任何一个作为最优解。

根据算法步骤 1 中 $\Pi_{F(Z_i)}=1-\mu_{F(Z_i)}(\mu_i)-\nu_{F(Z_i)}(\mu_i)\,(0\leqslant\Pi_{F(Z_i)}(X)\leqslant1)$求出犹豫值,再根据算法步骤 2 得分函数 $S(\mu_i)=\mu_{F(Z_i)}-\nu_{F(Z_i)}+\dfrac{2+3(\mu_{F(Z_i)}-\nu_{F(Z_i)})}{6}\Pi_{F(Z_i)}w_i$,得到每位专家对 7 个候选人在“相关工作经验”、“相关领域的优秀学术资格”、“专业态度和水平”以及“技术知识”的一致同意 IHFSES 与一致不同意 IHFSES的得分情况。

通过综合得分情况及算法步骤 3,采用 4 个参数,对 7 名候选人在同意 IHFSES 和不同意 IHFSES 的元素集合求和,得到每位候选人一致同意总得分(用 A_i 表示,$i=1,2,\cdots,7$)和不一致同意总得分(用 D_i 表示,$i=1,2,\cdots,7$),再通过步骤 4,$M_i=A_i-D_i(i=1,2,\cdots,7)$来计算每位候选人的综合得分,具体数值见表 2。

表 2　每位候选人 M_i 值

Table 2　Each candidate M_i value

A_i	D_i	M_i
−1.501	−1.188	−0.313
1.855	−0.452	2.307
−1.535	0.822	−2.357
0.647	−0.270	0.917
−1.840	−2.138	0.298
−1.782	−1.633	−0.149
0.913	−1.248	2.161

对每位候选人的综合得分排序,可得 $u_2>u_7>u_4>u_5>u_6>u_1>u_3$,根据算法步骤 5 最终确定最高分值为 $S=\max\{M_i\}=u_2$,即表示招聘委员会应聘用候选人 u_2 填补空缺。

分别将文献[23-25]的算法应用到此例中,得到表 3 所示的得分值及排序结果。

表 3　不同决策方法下的调度方案排序

Table 3　Sort of scheduling schemes under different decision methods

来源	方案排序
文献[23]	$u_2>u_7>u_4>u_1>u_6>u_5=u_3$
文献[24]	$u_2>u_7>u_5>u_4>u_6>u_1>u_3$
文献[25]	$u_7>u_4>u_2>u_1>u_5>u_6>u_3$
本文	$u_2>u_7>u_4>u_5>u_6>u_1>u_3$

为了验证本文模型的有效性,分别将文献[23-25]的算法应用到此例中得到排序结果,对比 4 种排序得到候选人 u_2 排名第一,候选人 u_3 排名倒数第一。本文提出的 IHFSES 模型不仅考虑犹豫度,而且相比于其他软集决策模型计算简单、准确性更高且具有真实性,能保持原始数据的完整性及专家的固有思想,并保证结果的准确性。将专家一致同意 IHFSES 和一致不同意 IHFSES 分开计算,克服直觉犹豫不决的情况,使得最终结果符合真实的决策问题,给参数集赋予权重,符合公司在进行应聘时重视应聘者的不同方面能力,因此本文模型得到的排名结果是真实可靠的,能最大限度地减少决策问题计算的复杂性。

表 4　本文模型与其他软集模型的定性比较

Table 4　Qualitative comparison of the present article model with other soft-set models

模型	单独考虑多个专家的意见	多个参数	考虑多位专家评价的犹豫模糊信息	考虑参数权重的标准	考虑犹豫度
直觉模糊软集[13]	×	√	×	×	×
模糊软专家集[15]	×	√	×	×	×
直觉模糊软专家集[23]	×	√	×	×	×
犹豫模糊软集[26]	√	√	×	√	×
犹豫模糊 N-软集[27]	√	√	√	×	×
直觉犹豫模糊软专家集(本文)	√	√	√	√	√

注:“√“表示满足条件,“×”表示不满足条件。

与其他软集模型的定性比较分析,直觉犹豫模糊软专家集具有多个参数,能够考虑到多位专家的意见及评价的犹豫模糊信息,将犹豫度和参数权重运用到算法中。数值实验表明,本文模型具有更好的结合性、准确性和决策性,能高效地解决实际的决策问题。

5　结论

本文引入直觉犹豫模糊软专家集的概念,并研究其重要的性质,定义直觉犹豫模糊软专家集的补、并、交、与、或运算,给出直觉犹豫模糊软专家集的决策算法,在算法中考虑决策者对备选方案给出评估信息的犹豫性并给参数集赋予权重,将直觉犹豫模糊软专家集决策算法应用于招聘委员会应聘候选人的实际决策问题中,并将其与其他软集类模型进行对比。结果表明,直觉犹豫模糊软专家集在多因素决策问题中计算简单,具有更好的准确性,能够更加清晰地展现专家对不同方面的打分情况。IHFSES 模型具有更好的结合性、准确性和决策性,这一新的扩展对于推动决策理论和方法的发展,提高决策的科学性和有效性具有重要的理论和实际意义。

参考文献:

[1] 郝文强,孟雪,段智慧. 动态能力视角下城市数字化转型的理论逻辑与组态路径:基于全国重点城市的模糊集定性比较分析[J].电子政务, 2023, 10(7):73-86.

HAO Wenqiang, MENG Xue, DUAN Zhihui. Theoretical logic and configuration path of urban digital transformation from the perspective of dynamic capability: qualitative comparative analysis of fuzzy set based on national key cities[J]. E-Government, 2023, 10(7):73-86.

[2] IBRAHIM H Z. New extensions of fuzzy sets with applications to rough topology and medical diagnosis[J]. Soft Computing, 2022, 27(2):821-835.

[3] 曾守桢,潘燕. 基于模糊后悔理论-TODIM 组合方法的众包物流平台服务质量评价研究[J]. 系统科学与数学, 2023, 43(3): 629-650.

ZENG Shouzhen, PAN Yan. Research on service quality evaluation of crowd sourced logistics platform based on fuzzy regret

theory-TODIM combination method[J]. Systems Science and Mathematics, 2023, 43(3):629-650.
[4] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3):338-356.
[5] 冯雪,耿生玲,李永明. 加权犹豫模糊偏好关系及其在群体决策中的应用[J]. 山东大学学报(理学版), 2023, 58(3):39-47.
FENG Xue, GENG Shengling, LI Yongming. Weighted hesitation fuzzy preference relationship and its application to group decision making[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2023, 58(3):39-47.
[6] KAZANCI O, DAVVAZ B. Multipolar fuzzy hyperideals in semihypergroups[J].Soft Computing, 2023, 27(19):13835-13841.
[7] ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1):87-96.
[8] BROUMI S, SMARANDACHE F. Intuitionistic fuzzy soft expert sets and its application in decision making[J]. Journal of New Theory, 2015, 28(1):89-105.
[9] 王金波,吴伟志. 双论域上的直觉模糊粗糙集[J]. 模糊系统与数学, 2021, 35(6):1-13.
WANG Jinbo, WU Weizhi. Intuitive fuzzy rough set on bitheory domain[J]. Fuzzy System and Mathematics, 2021,35(6): 1-13.
[10] TORRA V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25(6):529-539.
[11] XIAO Huimin, WANG Meiqi. Research on hesitant fuzzy matroid based on satisfaction function[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2021, 41(6):7387-7396.
[12] 华维灿,孙刚,王贵君. 基于概率犹豫模糊相似度的交互式群体决策方法[J]. 浙江大学学报(理学版),2022,49(4):398-407.
HUA Weican, SUN Gang, WANG Gungui. Interactive group decision method based on probabilistic hesitation fuzzy similarity[J]. Journal of Zhejiang University (Science edition), 2022, 49(4):398-407.
[13] MAJI P K. Soft set theory[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2003, 45(5):555-562.
[14] MAJI P K, BISWAS R, ROY A R. Intuitionistic fuzzy soft sets[J]. Journal of Fuzzy Mathematics, 2001, 9(3):677-692.
[15] LEINA Z, TAHIR Mahmood. Spherical fuzzy soft rough average aggregation operators and their applications to multi criteria decision making[J]. IEEE Access, 2022, 10:2169-3536.
[16] AIKHAZALEH S, SALLEHA R. Soft expert sets[J]. Advances in Decision Sciences, 2011, 2011(12):12-25.
[17] 许宏伟,刘卫锋. 区间软专家集及其应用[J]. 模糊系统与数学, 2014, 28(6):137-143.
XU Hongwei, LIU Weifeng. Interval soft expert set and its application[J]. Fuzzy System and Mathematics, 2014, 28(6): 137-143.
[18] AFSHAN Q, SALEEM A,MUHAMMAD A. Cubic soft expert sets and their application in decision making[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2016, 31(3):1585-1596.
[19] SATHIYASEELAN N, VIJAYABALAJI S, ALCANTUD J. Symmetric matrices on inverse soft expert sets and their applications[J]. Symmetry, 2023, 15(2):313-324.
[20] ALI G, AKRAM M. Decision-making method based on fuzzy *N*-soft expert sets[J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2020, 45(3):10381-10400.
[21] AKRAM M, ALI G, ALCANTUD J. A new method of multi-attribute group decision making based on hesitant fuzzy soft expertinformation[J]. Expert Systems, 2023, 40(8):14-44.
[22] ALI G, MUHIUDDIN G. Ranking effectiveness of COVID-19 tests using fuzzy bipolar soft expert sets[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2021, 2021(3):1-19.
[23] SMARANDACHE F. Intuitionistic fuzzy soft expert sets and its application in decision making[J]. Abstract and Applie Analysis, 2015, 2015(1):13-28.
[24] 司瑾,李洪波. 基于直觉犹豫模糊集的群体决策规则提取方法[J]. 计算机仿真, 2022, 39(1):248-251.
SI Jin, LI Hongbo. Group decision rule extraction method based on intuitive hesitation fuzzy set[J]. Computer Simulation, 2022, 39(1):248-251.
[25] ZHANG Haiyan, MA Winmin. A novel decision making approach based on intuitionistic fuzzy soft sets[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2017(8):1107-1117.
[26] CHEN Na, XIA Zeshui. Correlation coefficients of hesitant fuzzy sets and their applications to clustering analysis[J]. Application Mathematical Modelling, 2013, 37(4):2197-2211.
[27] MUHAMMED A, AROOJ A, et al. Hesitant fuzzy *N*-soft sets: a new model with applications in decision-making[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2019, 36(6):6113-6127.

(编辑:陈丽萍)